

М. А. Лялинов

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ИМПЕДАНСНОМ КОНУСЕ. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени задача дифракции на импедансном конусе исследовалась в целом ряде работ [1–7]. История изучения задачи начинается с содержательной работы [1]. Стоит отметить, что при рассмотрении задачи дифракции на полубесконечном конусе, в том числе с идеальными краевыми условиями [8–11], естественно выделяются два круга взаимосвязанных вопросов. Во-первых, это изучение интегральных представлений для решения, исследование уравнений для интегральных трансформант, обсуждение вопросов существования и единственности решения. Во-вторых, описание асимптотического поведения решения на больших расстояниях от конической точки. Построение асимптотики дальнего поля, дополненное построением численных алгоритмов для моделирования волнового поля, в определенном смысле завершило бы решение задачи. К настоящему времени получены устойчивые численные результаты для сферической волны, рассеянной вершиной импедансного конуса в “оазисе” – в области, не засвеченной лучами волны, отраженной от поверхности конуса [6]. Выражение для диаграммы рассеяния вне “оазиса”, а также равномерные формулы для дальнего поля, обсуждаются в работе [7]. В этой же работе, при определенных условиях на импеданс, отмечается вклад в асимптотику поверхностных волн, хотя соответствующие асимптотические выражения не приводятся.<sup>1</sup>

В настоящей работе мы изучаем вклад в асимптотику поверхностных волн. Исследование основано на использовании интегрального представления Зоммерфельда для решения. Изучается поведе-

---

*Ключевые слова* : дифракция плоской волны, импедансный конус, поверхностные волны, интегралы Зоммерфельда.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, 09-01-00191-а.

<sup>1</sup>Вычисления поверхностных волн, предложенные в конце работы [4], должны быть исправлены.

ние трансформанты Зоммерфельда в окрестности комплексных особенностей, отвечающих поверхностной волне. Именно эти особенности пересекаются контуром интегрирования при деформации его в перевальные и дают вклад в виде поверхностных волн в результате асимптотической оценки интеграла Зоммерфельда. Вычисление коэффициента возбуждения поверхностной волны, который имеет нелокальный характер, т.е. зависит от полного решения задачи, требует отдельного обсуждения. В частности, для этого необходимо использовать аналитическое продолжение трансформанты Зоммерфельда. Обсуждается связь полученного выражения для поверхностной волны с известными лучевыми построениями поверхностных волн [14], выделяется аналог геометрической фазы (фазы Берри) для кругового импедансного конуса.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Плоская акустическая волна падает вдоль оси симметрии кругового импедансного конуса  $C^2$

$$U^i(kr, \vartheta, \varphi) = e^{-ikr \cos \vartheta}, \quad (1)$$

$(r, \vartheta, \varphi)$  – сферические координаты, естественно связанные с осью симметрии и вершиной конуса [7]. Полное поле  $\widehat{U}(kr, \vartheta, \varphi)$  является суммой падающей и рассеянной волн

$$\widehat{U}(kr, \vartheta, \varphi) = U^i(kr, \vartheta, \varphi) + U(kr, \vartheta, \varphi) \quad (2)$$

и удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)(U + U^i) = 0. \quad (3)$$

Краевое условие на границе кругового конуса  $C$  имеет вид

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - ik\eta \right] (U + U^i) \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = 0, \quad (4)$$

<sup>2</sup>Случай осесимметричного освещения плоской волной рассматривается для формального упрощения. Произвольное падение изучается аналогично.

где  $\eta = \sin \zeta$ ,  $\text{Im} \zeta < 0$ ,  $\text{Re} \zeta = 0$ , и  $\vartheta = \vartheta_1$  уравнение конической поверхности  $C$ .<sup>3</sup>

Рассеянное поле  $U(kr, \vartheta)$  удовлетворяет условию Мейкснера в вершине и условиям излучения на бесконечности ( $kr \rightarrow \infty$ )

$$U(kr, \vartheta) = U_{sw}(kr, \vartheta) + D(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{(-ikr)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right), \quad (5)$$

где второе слагаемое в (5) – неравномерное по  $\vartheta$  выражение для сферической волны [7], которое не применимо в окрестности поверхности сингулярных направлений  $\vartheta = 2\vartheta_1 - \pi$ ,  $r > 0$ . Первое слагаемое в правой части равенства (5)

$$U_{sw}(kr, \vartheta) = D_s(kr, \vartheta) e^{ik\tau_s(kr, \vartheta)} \quad (6)$$

искомое асимптотическое разложение для поверхностной волны,  $\text{Im} \tau_s \geq 0$ ,  $D_s(kr, \vartheta)$  асимптотический ряд по степеням  $(kr)^{-1}$ . Нашей основной задачей является вычисление  $\tau_s(kr, \vartheta)$  и старшего члена асимптотического разложения для  $D_s(kr, \vartheta)$ .

Как известно [1, 2, 3], при определенных ограничениях на параметры задачи решение будет найдено в виде интегралов Конторовича–Лебедева

$$U^i(kr, \vartheta) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \sin(\pi\nu) u_\nu^i(\vartheta) \frac{K_\nu(-ikr)}{\sqrt{-ikr}} d\nu, \quad (7)$$

$$U(kr, \vartheta) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu \sin(\pi\nu) u_\nu(\vartheta) \frac{K_\nu(-ikr)}{\sqrt{-ikr}} d\nu, \quad (8)$$

где

$$u_\nu^i(\vartheta) = -\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \vartheta)}{4 \cos(\pi\nu)},$$

$K_\nu(z)$  функция Макдональда,  $P_{\nu-1/2}(x)$  коническая функция Лежандра [2]. Интегралы экспоненциально сходятся, если

$$\vartheta > \frac{\pi}{2} + |\arg(-ik)|, \quad 2\vartheta_1 - \vartheta > \frac{\pi}{2} + |\arg(-ik)|$$

<sup>3</sup>Очевидно, что волновое поле не зависит от координаты  $\varphi$  в силу осевой симметрии задачи.

соответственно,  $|\arg(-ik)| \leq \pi/2$ . Удобно представить  $u_\nu^i(\vartheta)$  в виде

$$\begin{aligned} u_\nu^i(\vartheta) &= R^i(\nu) \frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \vartheta)}{d_{\vartheta_1} P_{\nu-1/2}(-\cos \vartheta_1)}, \\ R^i(\nu) &= -\frac{d_{\vartheta_1} P_{\nu-1/2}(-\cos \vartheta_1)}{4 \cos \pi \nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем  $R(\nu)$  по формуле

$$u_\nu(\vartheta) = R(\nu) \frac{P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta)}{d_{\vartheta_1} P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta_1)}, \quad (10)$$

тогда  $R(\nu)$  удовлетворяет разностному уравнению [1], которое следует из граничного условия,

$$R(\nu+1) - R(\nu-1) = (-2i)[\eta w(\nu)R(\nu) - G_i(\nu)], \quad (11)$$

$$w(\nu) = -i\nu \frac{P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta_1)}{d_{\vartheta_1} P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta_1)},$$

$$G_i(\nu) = \frac{1}{2}[R_i(\nu+1) - R_i(\nu-1)] - w_i(\nu)\eta R_i(\nu),$$

$$w_i(\nu) = -i\nu \frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \vartheta_1)}{d_{\vartheta_1} P_{\nu-1/2}(-\cos \vartheta_1)}.$$

Отметим, что функционально-разностное уравнение (11) исследуется сведением к интегральному уравнению

$$R(\nu) = \frac{1}{2}\eta \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{w(t) \sin(\pi t) R(t) dt}{\cos(\pi \nu) + \cos(\pi t)} + S_i(\nu), \quad \nu \in (-i\infty, i\infty), \quad (12)$$

(см. [1, 4]),  $S_i(\nu)$  известная функция, определяемая  $R_i(\nu)$ . Решение уравнения (11) является мероморфной четной функцией, регулярной в полосе  $|\operatorname{Re} \nu| < 1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ , и допускающей асимптотическую оценку

$$R(\nu) = R_r(\nu) + R_s(\nu), \quad \nu \rightarrow i\infty,$$

$$R_r(\nu) = \sum_{m=0}^{\infty} i\nu a_m \frac{e^{i\nu \vartheta_1}}{(i\nu)^{m+1/2}} + O(\sqrt{\nu} e^{i\nu(2\pi - \vartheta_1)}), \quad (13)$$

$$R_s(\nu) = O(e^{i\nu(\pi+\zeta)}\nu^{\mu_0}),$$

$\mu_0$  чисто мнимое.

При исследовании асимптотики волнового поля вдали от конической точки удобно вместо интегральных представлений решения в виде интегралов Конторовича–Лебедева (7), (8) использовать интегральные представления Зоммерфельда для решения. Эти интегральные представления получаются из (7), (8) с использованием представления Зоммерфельда для  $K_\nu(z)$  (см. [2]) и последующей перестановки порядков интегрирования

$$\begin{aligned} U(kr, \vartheta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \vartheta) d\alpha, \\ U(k, r, \vartheta) &= \frac{\sqrt{-ikr}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} \sin \alpha \tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta) d\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\gamma$  контур Зоммерфельда (рис. 1),

$$\Phi(\alpha, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta). \quad (15)$$

Аналогично получается представление

$$\begin{aligned} U^i(kr, \vartheta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi_i(\alpha, \vartheta) d\alpha, \\ U^i(kr, \vartheta) &= \frac{\sqrt{-ikr}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} \sin \alpha \tilde{\Phi}_i(\alpha, \vartheta) d\alpha, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Phi_i(\alpha, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( -\frac{\sqrt{\pi}}{2} [\cos \alpha - \cos \vartheta]^{-1/2} \right), \quad (17)$$

$\tilde{\Phi}_i(\alpha, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{\Phi}_i(\alpha, \vartheta)$ . Ветвь квадратного корня в (17) при  $|\operatorname{Re} \alpha| < 3\pi/2$  фиксируется условиями: разрезы проводятся из  $\pm\vartheta$  на  $\pm\infty$  соответственно и  $[\cos \alpha - \cos \vartheta]^{-1/2} > 0$  при  $-\vartheta < \alpha < \vartheta$ . Заметим, что выражение (17) получается с помощью интегрального представления

$$\tilde{\Phi}_i(\alpha, \vartheta) = -\sqrt{2\pi} i \int_{-i\infty}^{i\infty} \cos(\nu\alpha) u_\nu^i(\vartheta) d\nu = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} [\cos \alpha - \cos \vartheta]^{-1/2}$$

при переходе от интеграла (8) к (16). Последнее равенство выведено с использованием формулы (51) из [7]. Можно показать, что трансформанты Зоммерфельда  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  и  $\tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta)$  регулярны<sup>4</sup> по  $\alpha$  при  $\text{Im } \alpha > |\text{Im } \zeta|$  и  $\text{Im } \alpha < -|\text{Im } \zeta|$ , а также в полосе  $|\text{Re } \alpha| < \hat{\vartheta}'$ , где  $\hat{\vartheta}' = 2\vartheta_1 - \vartheta$ , (см. [5]). В полосе  $|\text{Re } \alpha| < \hat{\vartheta}'$  для трансформант  $\Phi(\alpha, \vartheta)$ ,  $\tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta)$  справедливы представления

$$\Phi(\alpha, \vartheta) = \sqrt{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu R(\nu) \frac{P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta)}{d_{\vartheta_1} P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta_1)} \frac{e^{i\nu\alpha} - e^{-i\nu\alpha}}{2} d\nu, \quad (18)$$

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta) = \sqrt{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} R(\nu) \frac{P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta)}{d_{\vartheta_1} P_{\nu-1/2}(\cos \vartheta_1)} \frac{e^{i\nu\alpha} + e^{-i\nu\alpha}}{2i} d\nu. \quad (19)$$

$\Phi(\alpha, \vartheta)$  нечетна и экспоненциально убывает в полосе при  $|\text{Im } \alpha| \rightarrow \infty$ . Нетривиальной и важной оказывается задача аналитического продолжения представлений (18), (19) в более широкую полосу, например,  $|\text{Re } \alpha| < 3\pi/2$ .

Интегральные представления (14) особенно удобны при вычислении асимптотики  $U(kr, \vartheta)$  при  $kr \rightarrow \infty$ . Для этого, контур интегрирования  $\gamma$  деформируется в перевальные (рис. 1), проходящие через точки  $\pm\pi$ . В процессе деформации захватываются особенности трансформанты  $\Phi(\alpha, \vartheta)$ . Вещественные особенности определяют отраженную волну, комплексные сингулярности отвечают поверхностным волнам. Вклад точек перевала приводит к вычислению сферической волны от вершины конуса [7].

### 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТРАНСФОРМАНТ ЗОММЕРФЕЛЬДА

При исследовании особенностей трансформанты  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  естественно выписать уравнение и граничное условие, которым она удовлетворяет.

Из литературы известно, что, если  $\Phi(\alpha, \vartheta, \varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \Delta_\omega - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{4} \right) \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) = 0, \quad (20)$$

<sup>4</sup>Если наряду с другими условиями  $\Phi(\alpha, \theta)$ ,  $\tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta)$  обладают указанными свойствами регулярности, интегральные представления (14) являются решением задачи.

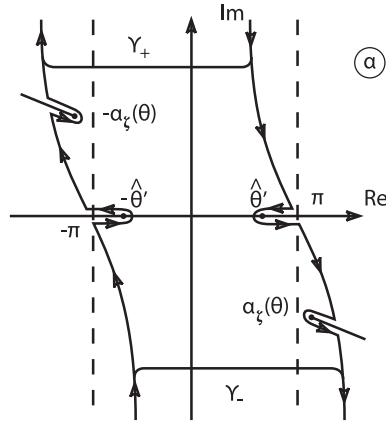


Рис. 1. Деформация контура Зоммерфельда в перевальные контуры,  $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ .

где  $\Delta_\omega$  оператор Лапласа–Бельтрами на единичной сфере в  $\mathbb{R}^3$ , то интегральное представление Зоммерфельда (14) решает уравнение Гельмгольца.

Данное утверждение можно проверить и непосредственно

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{r^2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \left\{ \frac{1}{r^2} \Delta_\omega \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{4} \right) \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) \right\} d\alpha \\
 &= \frac{r^2}{2\pi i} \int_{\gamma} \left\{ \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \frac{1}{r^2} \Delta_\omega \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \right] \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) \right\} d\alpha \\
 &= \frac{r^2}{2\pi i} \int_{\gamma} \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) \right. \\
 &\quad \left. + r^{-2} \Delta_\omega \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \right\} d\alpha \\
 &= r^2 (\Delta + k^2) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \vartheta, \varphi) d\alpha,
 \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по частям и воспользовались равенством

$$-r^{-2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{4} \right) \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}}.$$

Отметим, что  $\tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta, \varphi)$  удовлетворяет тому же уравнению (20).

Проверим также, что, если  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  удовлетворяет краевому условию

$$\frac{\partial(\Phi + \Phi_i)}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} + \sin \zeta \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{(\Phi + \Phi_i)}{\sin \alpha} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = 0, \quad (21)$$

то  $U(kr, \vartheta) + U^i(kr, \vartheta)$ , представленное интегралом Зоммерфельда в (14), (16), удовлетворяет краевому условию (4). Действительно, используя интегрирование по частям, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(U + U^i)}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{r} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \frac{\partial(\Phi + \Phi_i)}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} d\alpha \\ &= \frac{(-\sin \zeta)}{2\pi} \int_{\gamma} d\alpha \frac{1}{r} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\Phi + \Phi_i}{\sin \alpha} \right) \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} \\ &= \frac{\sin \zeta}{2\pi i} \int_{\gamma} d\alpha \frac{ikr \sin \alpha}{r\sqrt{-ikr}} e^{-ikr \cos \alpha} \left( \frac{\Phi + \Phi_i}{\sin \alpha} \right) \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = ik \sin \zeta (U + U^i) \Big|_{\vartheta=\vartheta_1}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что для  $\tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta)$  краевое условие имеет вид

$$\sin \alpha \frac{\partial(\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}_i)}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} + \sin \zeta \frac{\partial(\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}_i)}{\partial \alpha} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = 0. \quad (22)$$

Аналитическая функция  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  имеет особенности  $O([\alpha \pm \hat{\vartheta}]^{-3/2})$  на вещественной оси,  $\hat{\vartheta} = 2\vartheta_1 - \vartheta$ . Вклад этих особенностей в асимптотику приводит к выражению для отраженной волны [7]. Эти особенности действительно захватываются при деформации контура  $\gamma$  в перевальные, если  $\hat{\vartheta} \leq \pi$ .

В данной работе нас интересуют комплексные сингулярности, определяющие асимптотический вклад в виде поверхностных волн. Такими сингулярностями являются точки  $\alpha = \pm \alpha_{\zeta}(\vartheta)$ ,  $\alpha_{\zeta}(\vartheta) = \pi + \zeta +$



$\vartheta_1 - \vartheta$ . Предположим, что в окрестности точки  $\alpha = \alpha_\zeta(\vartheta)$  трансформанта  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  имеет вид<sup>5</sup>

$$\Phi(\alpha, \vartheta) = (A_0(\vartheta) + A_1(\vartheta)(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta)) + \dots)[\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta)]^\lambda + B(\alpha, \vartheta), \quad (23)$$

где  $B(\alpha, \vartheta)$  регулярна по  $\alpha$  в окрестности  $\alpha_\zeta(\vartheta)$ , коэффициенты разложения в ряд Тейлора  $A_0, A_1, \dots$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$  должны быть найдены. Подставим разложение в (23) в уравнение (20) и приравняем коэффициенты при  $[\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta)]^{\lambda+k}$ ,  $k = -1, 0, 1, \dots$ . В старших порядках получим ( $\lambda$  считается нецелым)

$$\begin{aligned} A_0'(\vartheta) + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \vartheta A_0(\vartheta) &= 0, \\ A_1'(\vartheta) + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \vartheta A_1(\vartheta) &= \frac{1}{2(\lambda+1)} \left( \frac{1}{4} A_0(\vartheta) - A_0''(\vartheta) - \operatorname{ctg} \vartheta A_0'(\vartheta) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Интегрируя (24), находим

$$A_0(\vartheta) = C_0 \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta}}, \quad (25)$$

где  $C_0$  неизвестная постоянная. Явные выражения для  $A_1(\vartheta), A_2(\vartheta)$  и т.д. нам не понадобятся, так как вычисляется лишь старший член асимптотики.

Подставим разложение (23) в краевое условие (22), приравняв нулю коэффициент при старшем нетривиальном слагаемом  $O([\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta_1)]^\lambda)$ , получим

$$\lambda + 1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \zeta \operatorname{ctg} \vartheta_1$$

или

$$\lambda = -1 + \mu, \quad \mu = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \zeta \operatorname{ctg} \vartheta_1. \quad (26)$$

Отметим, что величина  $\mu$  чисто мнимая, так как  $\zeta = i \operatorname{Im} \zeta$ ,  $\operatorname{Im} \zeta < 0$ . Постоянная интегрирования  $C_1$  в  $A_1(\vartheta)$  выражается через  $C_0$  с использованием слагаемых порядка  $O([\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta_1)]^{\lambda+1})$  в граничном условии.

Стоит отметить, что коэффициенты  $A_1, A_2, \dots$  в (23) рекуррентно определяются из локальных рассмотрений через  $A_0$ , если  $C_0$  в (25) известно. Постоянная  $C_0$  в рамках описанной локальной процедуры не

<sup>5</sup>Такая форма разложения может быть угадана в результате анализа формул (18), (19) с учетом поведения  $R(\nu)$  при  $\nu \rightarrow i\infty$ .

находится и является функционалом от  $R(\nu)$  – решения интегрального уравнения (12), т.е., фактически, зависит от решения задачи в целом.

Для того, чтобы фиксировать ветвь аналитической функции  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  по  $\alpha$ , нужно провести разрезы, в частности, из точек  $\pm\alpha_\zeta(\vartheta)$  на  $\pm\infty$ , и задать значение  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  в какой-либо регулярной точке. Выражение (18) задает значение  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  в полосе регулярности, если  $R(\nu)$  определено как решение интегрального уравнения (12).

Обратимся к вычислению  $C_0$  в (25). Воспользуемся краевым условием (22), равенством  $\Phi(\alpha, \vartheta) = \frac{\partial \tilde{\Phi}(\alpha, \vartheta)}{\partial \alpha}$  и интегральным представлением (19), получим

$$\Phi(\alpha, \vartheta_1) = -\sqrt{2\pi} \frac{\sin \alpha}{\sin \zeta} \psi(\alpha) + \hat{\psi}_i(\alpha), \quad (27)$$

где

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\nu\alpha} R(\nu) d\nu, \quad (28)$$

$$\hat{\psi}_i(\alpha) = -\frac{\sin \alpha}{\sin \zeta} \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_1} - \frac{\Phi_i(\alpha, \vartheta_1)}{\sin \zeta}.$$

Если  $\alpha \in (-i\infty, i\infty)$ , то  $\psi(\alpha)$  является преобразованием Фурье для  $R(\nu)$  в (28), формула обращения имеет вид

$$R(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \psi(\alpha) e^{-i\nu\alpha} d\alpha. \quad (29)$$

Функция  $\psi(\alpha)$  регулярна в полосе  $|\operatorname{Re} \alpha| < 2\vartheta_1 - \vartheta$ , однако, необходимо получить аналитическое продолжение правой части в (27) в окрестность точки  $\alpha_\zeta(\vartheta_1)$ . Отметим, что  $\hat{\Psi}_i(\alpha)$  задана явными выражениями.

Формула для аналитического продолжения фактически может быть извлечена из работы [1]. Мы кратко воспроизведем необходимые нам результаты.

Воспользуемся преобразованием Фурье в уравнении (11), после сложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
& (\sin \alpha + \sin \zeta) \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\nu\alpha} R(\nu) d\nu \\
&= \sin \zeta \left\{ \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [w(\nu) + i \operatorname{tg}(b\nu)] e^{i\nu\alpha} R(\nu) d\nu \right. \\
&\quad + \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [\operatorname{sign}(i\nu) - i \operatorname{tg}(b\nu)] e^{i\nu\alpha} R(\nu) d\nu \\
&\quad \left. + \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [1 - \operatorname{sign}(i\nu)] e^{i\nu\alpha} R(\nu) d\nu \right\} - T_i(\alpha), \\
T_i(\alpha) &= \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} G_i(\nu) e^{i\nu\alpha} d\nu, \quad b > 2\pi,
\end{aligned}$$

где  $T_i(\alpha)$  аналитически продолжается с использованием явных выражений для  $G_i(\nu)$ . В результате мы приходим к представлению  $\Psi(\alpha)$  (см. (28))

$$\Psi(\alpha) = \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha + \sin \zeta} \{V(\alpha) + V_1(\alpha) + V_2(\alpha) - T_i(\alpha)/\sin \zeta\}, \quad (30)$$

где

$$V_1(\alpha) = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [\operatorname{sign}(i\nu) - i \operatorname{tg}(b\nu)] e^{i\nu\alpha} R(\nu) d\nu$$

регулярна в полосе  $|\operatorname{Re} \alpha| < 2b$ ,

$$V_2(\alpha) = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [1 - \operatorname{sign}(i\nu)] e^{i\nu\alpha} R(\nu) d\nu$$

регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ . Наконец, используя теорему о преобразовании Фурье от свертки, имеем

$$V(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} H_b(\alpha - \tau) \Psi(\tau) d\tau, \quad (31)$$

где ядро  $H_b(\alpha)$  (см. [1]) нечетно, регулярно при  $|\operatorname{Im} \alpha| > 0$ ,

$$H_b(\alpha) = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [w(\tau) + i \operatorname{tg}(b\nu)] e^{i\nu\alpha} d\nu,$$

имеет особенности на вещественной оси.  $V(\alpha)$  имеет особенность вида  $C_0[\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta_1)]^\mu$  в точке  $\alpha = \alpha_\zeta(\vartheta_1)$  и определена интегралом (31) в полосе  $|\operatorname{Re} \alpha| < 2\pi$ .

Воспользуемся тем, что

$$\Phi(\alpha, \vartheta_1) = C_0[\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta_1)]^{-1+\mu} + \dots, \quad (32)$$

$\alpha_\zeta(\vartheta_1) = \pi + \zeta$ , в окрестности  $\alpha = \alpha_\zeta(\vartheta_1)$ . Учтем формулу (27) и выражение (30), дающее аналитическое продолжение  $\psi(\alpha)$ , получим<sup>6</sup>

$$C_0 = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_\zeta(\vartheta_1)} \left\{ [\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta_1)]^{-\mu} (-\sqrt{2\pi} \operatorname{tg} \zeta) \times [V(\alpha) + V_1(\alpha) + V_2(\alpha) - T_i(\alpha)/\sin \zeta] \right\}. \quad (33)$$

По-видимому, формула (33) малоэффективна для практического вычисления  $C_0$ .

#### 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

Будем считать, что особенности  $\pm\alpha_\zeta(\vartheta)$  не находятся вблизи точек перевала  $\pm\pi$  соответственно. Это позволяет оценить асимптотический вклад особенностей  $\pm\alpha_\zeta(\vartheta)$ ,  $\alpha_\zeta(\vartheta) = \pi + \zeta + \vartheta_1 - \vartheta$  независимо от точек перевала и других особенностей.

Вычислим вклад в асимптотику ( $kr \rightarrow \infty$ ) интеграла (14) по участку контура интегрирования  $l_\zeta^\pm$  по берегам разрезов (Рис. 1), выходящих из  $\pm\alpha_\zeta(\vartheta)$ . Обозначим соответствующий интеграл

$$U_{sw}(kr, \vartheta) = \frac{1}{\pi i} \int_{l_\zeta^+} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \vartheta) d\alpha, \quad (34)$$

<sup>6</sup>Ветвь функции  $(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta_1))^\mu$  в (33) будет зафиксирована ниже, разрез из точки  $\alpha_\zeta(\vartheta_1)$  показан на Рис. 1.

где мы воспользовались нечетностью  $\Phi(\alpha, \vartheta)$ , поэтому достаточно оценить лишь вклад контура  $l_\zeta^+$  вблизи точки  $\alpha_\zeta(\vartheta)$ . Воспользуемся локальным разложением (23) и представим  $\cos \alpha$  в экспоненте интеграла (34) отрезком ряда Тейлора в точке  $\alpha = \alpha_\zeta(\vartheta)$ :  $\cos \alpha = \cos \alpha_\zeta(\vartheta) - \sin \alpha_\zeta(\vartheta)[\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta)] + \dots$ , получим

$$U_{sw}(kr, \vartheta) \cong \left\{ \int_{l_\zeta^+} e^{ikr \sin \alpha_\zeta(\vartheta)(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta))} (\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta))^{-1+\mu} d\alpha \right\} \times \frac{C_0}{\pi i} \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta}} \frac{e^{-ikr \cos \alpha_\zeta(\vartheta)}}{\sqrt{-ikr}}. \quad (35)$$

Ветвь функции  $(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta))^\mu$  (см. (23), (26)) фиксируется условием  $a_0 < \arg(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta)) < 2\pi + a_0$ , где  $a_0 = \arg(\alpha - \alpha_\zeta)$  значение аргумента на том берегу разреза, на котором интегрирование ведется по направлению к  $\alpha_\zeta(\vartheta)$ . Постоянную  $a_0$  зафиксируем ниже.<sup>7</sup>

Обратимся к асимптотическому вычислению интеграла в (35). Сделаем в интеграле замену переменной интегрирования

$$\tau = -ikr \sin \alpha_\zeta(\vartheta)(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta)). \quad (36)$$

Будем считать, что разрез на Рис. 1 выходит из точки  $\alpha_\zeta(\vartheta)$  под таким углом к положительному направлению вещественной оси  $\alpha$ , что разрез из  $\tau = 0$  в результате замены (36) выходит вдоль положительного направления вещественной оси  $\tau$ . Кроме того, на верхнем берегу разреза  $\tau = |\tau|$  и  $\arg \tau = 0$ . Это означает, что  $\arg(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta)) =: a_0 = -\arg(-ikr \sin \alpha_\zeta(\vartheta))$ . На противоположном берегу разреза  $\arg \tau = 2\pi$ ,  $\tau^\mu = |\tau|^\mu e^{i\mu \arg \tau}$ ,  $0 < \arg \tau < 2\pi$ . В результате указанной замены (36), интеграл в (35) запишется в виде ( $k\tau \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} & \int_{l_\zeta^+} e^{ikr \sin \alpha_\zeta(\vartheta)(\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta))} (\alpha - \alpha_\zeta(\vartheta))^{-1+\mu} d\alpha \\ &= [-ikr \sin \alpha_\zeta(\vartheta)]^{-\mu} (e^{i2\pi\mu} - 1) \int_0^{ckr} e^{-\tau} |\tau|^{-1+\mu} d\tau \\ &= [-ikr \sin \alpha_\zeta(\vartheta)]^{-\mu} (e^{i2\pi\mu} - 1) \Gamma(\mu) (1 + o(e^{-ck\tau})), \quad c > 0, \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Напомним, что выделение регулярной ветви аналитического продолжения  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  в (18), помимо проведения необходимых разрезов (Рис. 1), подразумевает задания значения  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  в точке.

где  $\Gamma(\mu)$  гамма-функция. Окончательно, главный член разложения для поверхностной волны принимает вид

$$\begin{aligned} U_{sw}(kr, \vartheta) &= \frac{C_0 \Gamma(\mu)}{\pi i} [e^{i2\pi\mu} - 1] \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta}} (-i \sin[\zeta + \vartheta_1 - \vartheta])^{-\mu} \frac{e^{ikr \cos[\zeta + \vartheta_1 - \vartheta]}}{\sqrt{-ikr}} \\ &\times e^{-\frac{i}{2} \operatorname{ctg} \vartheta_1 \operatorname{th}(\operatorname{Im} \zeta) \ln(kr)} \left(1 + o\left(\frac{1}{kr}\right)\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Асимптотический вклад в виде поверхностной волны (36) возникает при условиях

$$\vartheta - \vartheta_1 - gd(\operatorname{Im} \zeta) > \operatorname{Re} \zeta = 0, \quad \operatorname{Im} \zeta < 0, \quad (37)$$

т.е. соответствующие сингулярности  $\Phi(\alpha, \vartheta)$  действительно захватываются при деформации контура  $\gamma$  в перевальные,  $gd(x) = \operatorname{sign}(x) \arccos(1/\cosh x)$ .

Поведение асимптотического выражения (36) характерно для поверхностной волны: волновое поле убывает экспоненциально при  $\vartheta < \vartheta_1$ ,  $kr \rightarrow \infty$ . При  $\vartheta = \vartheta_1$  амплитуда поверхностной волны убывает как  $O(1/\sqrt{kr})$ , что соответствует расходимости поверхностной волны на конической поверхности.

В выражении (36) мы выделили экспоненциальный множитель  $e^{ivkr}$ , где

$$v(kr) = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \vartheta_1 \operatorname{th}(\operatorname{Im} \zeta) \ln(kr)$$

так называемая геометрическая фаза (фаза Берри), [14]. В нашем случае эта величина изменяется значительно медленнее, как  $O(\ln(kr))$ , чем динамическая фаза  $kr \cos[\vartheta_1 - \vartheta + \zeta]$ , и определяется средней кривизной круговой конической поверхности [14]. Скорость распространения поверхностной волны  $c/\operatorname{ch}|\zeta|$ , где  $c$  – скорость акустических волн в окружающей среде. Стоит отметить, что прямое применение лучевого разложения (с комплексным эйконалом) для построения поверхностной волны из уравнения (3) и краевого условия (4) приводит к выражению (36) с точностью до произвольного множителя, который не находится из лучевых соображений. Вычисление коэффициента возбуждения поверхностной волны эквивалентно определению  $C_0$  в (36), (см. 33), т.е. полному решению задачи дифракции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J.-M. L. Bernard, *Methode analytique et transformees fonctionnelles pour la diffraction d'ondes par une singularite conique: equation integrale de noyau non oscillant pour le cas d'impedance constante*, rapport CEA-R-5764, Editions Dist-Saclay (1997).
2. J.-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Diffraction of acoustic waves by an impedance cone of an arbitrary cross-section*. — *Wave Motion* **33** (2001), 155–181.
3. J.-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov, *Electromagnetic scattering by a smooth convex impedance cone*. — *IMA Journ. Appl. Math.* **33** (2004), 285–333.
4. M. A. Lyalinov, *Diffraction of a plane wave by an impedance cone*. — *J. Math. Sciences* **127**, No. 6 (2005), 2446–2460.
5. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu and V. P. Smyshlyaev, *Scattering of a plane electromagnetic wave by a circular hollow cone with thin semi-transparent walls*, accepted to *IMA J. Appl. Math.* (2009).
6. J.-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov and N. Y. Zhu, *Analytical-numerical calculation of diffraction coefficients for a circular impedance cone*. — *IEEE Trans. Antennas Propag.* **56** (6) (2008), 1616–1623.
7. M. A. Lyalinov, *The far field asymptotics in the problem of diffraction of an acoustic plane wave by an impedance cone*. — *Russian J. Math. Physics*, **16**, No. 2, (2009), 277–286.
8. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках*. Наука, М. (1966).
9. V. P. Smyshlyaev, *Diffraction by conical surfaces at high frequencies*. — *Wave Motion* **22** (1995), 311–324.
10. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, and V. P. Smyshlyaev, *On evaluation of the diffraction coefficients for arbitrary "non-singular" directions of a smooth convex cone*. — *SIAM Appl. Math.* **60** (2) (2000), 536–573.
11. D. S. Jones, *Scattering by a cone*. — *Quarterly J. Mech. Appl. Math.* **50** (1997), 499–523.
12. В. М. Бабич, А. В. Кузнецов, *О распространении поверхностных электромагнитных волн, аналогичных волнам Рэлея, в случае краевых условий Леонтовича*. — *Зап. научн. семин. ПОМИ* **324** (2005), 5–19.
13. R. Grimshaw, *Propagation of surface waves at high frequencies*. — *J. Inst. Maths. Applics* **4** (1968), 174–193.
14. В. М. Бабич, В. С. Буддырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод*. Изд. Ленингр. Унив. (1985).

Lyalinov M. A. Diffraction of a plane acoustic wave by an impedance cone. Surface waves.

Diffraction of a plane wave by a circular impedance cone is studied. The surface waves propagating from the vertex of the cone are discussed. The excitation coefficient is computed by use of the incomplete separation of variables in the problem.

Санкт-Петербургский  
государственный университет

*E-mail*: lyalinov@yandex.ru

Поступило 20 сентября 2009 г.