

А. П. Крауклис, П. В. Крауклис, Л. А. Молотков

К ЗАДАЧЕ МОНИТОРИНГА РЕЗЕРВУАРОВ УГЛЕВОДОРОДОВ В ПРОЦЕССЕ ИХ РАЗРАБОТКИ

К настоящему времени в связи с развитием эффективных средств измерения, ростом объемов экспериментальных данных и методов обработки стало возможным приступить к мониторингу резервуаров углеводородов в процессе их разработки. Большую роль в этом играет межскважинное прозвучивание и повторные измерения волновых полей в скважинах, пересекающих коллектора. В данной работе обсуждается задача мониторинга положения границы резервуар-вмещающая среда по записям волны S^* на дневной поверхности.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЕЙ СМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим модель среды, состоящую из упругого полупространства 0 ($z \geq 0$) и пороупругого полупространства 1 ($z < 0$), составленного из чередующихся жидких и твердых слоев. Среда 0 возбуждается источником, находящимся в точке ($r = 0, z = h$) и излучающим продольные волны. Для простоты предположим, что источник представляет собой центр давления, и образующееся волновое поле обладает осевой симметрией. На границе $z = 0$ выполняются условия скользящего контакта:

$$u_z = u_{z1}, \quad \tau_{zz} = \tau_{zz1}, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz1} = 0. \quad (1)$$

Эти условия выражают непрерывность нормальных смещений и напряжений и исчезновение тангенциальных напряжений. Пусть индекс 1 будет присутствовать у переменных, описывающих волновое поле в среде 1, а у переменных, соответствующих среде 0, индекс будет отсутствовать. Наша задача – построить точные выражения для поля смещений в среде 0.

Ключевые слова : сейсмические волны, мониторинг резервуаров, поро-упругие среды, асимптотические методы.

Смещения и напряжения в упругой среде с аксиальной симметрией описываются уравнениями:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ \tau_{zz} &= \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

в терминах потенциалов φ и ψ . Эти потенциалы удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где

$$v_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad v_S^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

λ, μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотность и v_P, v_S – скорости распространения продольной и поперечной волн.

Решение уравнения (4) представляется интегралами Фурье и Меллина:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^\infty \frac{J_0(kr)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (X^+ e^{kz\alpha} + X^- e^{-kz\alpha}) e^{kt\eta} d\eta, \\ \psi &= \int_0^\infty \frac{J_1(kr)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (Y^+ e^{kz\beta} + Y^- e^{-kz\beta}) e^{kt\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha = \sqrt{1 + \eta^2/v_P^2}$, $\beta = \sqrt{1 + \eta^2/v_S^2}$ и функции $X^+(k\eta), X^-(k\eta), Y^+(k\eta), Y^-(k\eta)$ – произвольны. Для единственности радикалов α и β проведены разрезы от точек ветвления $\eta = \pm iv_P$ и $\eta = \pm iv_S$ в левую полуплоскость (см. Рис.1), а основные ветви фиксированы условиями:

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (6)$$

для $\eta > 0$.

Согласно этим допущениям первые слагаемые в формулах (5), содержащие функции $X^+(k\eta)$ и $Y^+(k\eta)$, описывают в среде 1 распространение волн в направлении плоскости $z = 0$. Вторые слагаемые с

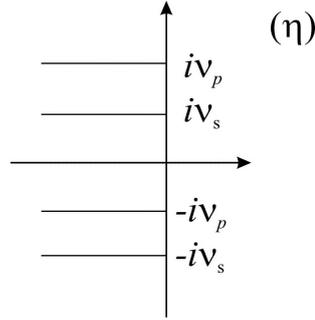


Рис. 1. Разрезы в левую полушарность.

величинами $X^-(k\eta)$ и $Y^-(k\eta)$ характеризуют распространение волны в противоположном направлении.

Потенциалы волнового поля, возбуждаемого источником такого типа описываются следующим образом:

$$X^+ = \frac{kF(k\eta)e^{-kh\alpha}}{3(\lambda + 2\mu)\alpha}, \quad X^- = Y^+ = Y^- = 0, \quad (7)$$

где $z < h$,

$$X^- = \frac{kF(k\eta)e^{kh\alpha}}{3(\lambda + 2\mu)\alpha}, \quad X^+ = Y^+ = Y^- = 0, \quad (8)$$

где $h < z$.

Отношения (7) и (8) вместе с формулами (5) описывают две продольные волны. Первая распространяется в направлении $z = 0$ и падает на плоскость $z = 0$ в момент времени $t = h/v_P$. На этой плоскости процессы отражения и преломления начинаются с $t = h/v_P$, и образуются две отраженные волны PP и PS . Потенциалы φ для волны PP и ψ для волны PS описываются формулами:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \overline{\varphi} F(k\eta) e^{k[t\eta - (z+h)\alpha]} d\eta, \\ \psi &= \int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \overline{\psi} F(k\eta) e^{k[t\eta - h\alpha - z\beta]} d\eta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} &= \frac{1}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha \rho \mu_1^2 R_1 - \alpha_1 \rho_1 \mu^2 T}{\alpha (\alpha \rho \mu_1^2 R_1 + \alpha_1 \rho_1 \mu^2 R')}, \\ \bar{\psi} &= -\frac{4\rho_1 \mu^2}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha_1 g}{\alpha \rho \mu_1^2 R_1 + \alpha_1 \rho_1 \mu^2 R'} \\ T &= g^2 + 4\alpha\beta, \quad R' = g^2 - 4\alpha\beta, \quad R_1 = g_1^2 - 4\alpha_1\beta_1.\end{aligned}\tag{10}$$

Опираясь на формулы (2), (3) и (9), мы приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned}u_{rPP} &= -\int_0^\infty \frac{k^2 J_1(k\eta) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{\varphi} F(k\eta) e^{k[t\eta - (z+h)\alpha]} d\eta, \\ u_{zPP} &= -\int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha \bar{\varphi} F(k\eta) e^{k[t\eta - (z+h)\alpha]} d\eta;\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}u_{rPS} &= \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \beta \bar{\psi} F(k\eta) e^{k[t\eta - h\alpha - z\beta]} d\eta, \\ u_{zPS} &= \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{\psi} F(k\eta) e^{k[t\eta - h\alpha - z\beta]} d\eta\end{aligned}\tag{12}$$

для смещений в волнах PP и PS . Для простоты рассмотрим случай, когда параметры сред 0 и 1 одинаковы:

$$\lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1, \quad \rho = \rho_1.\tag{13}$$

В этом случае выражения (10) могут быть заменены другими:

$$\bar{\varphi} = -\frac{4}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\beta}{R'}, \quad \bar{\psi} = -\frac{2}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{g}{R'},\tag{14}$$

которые совместно с уравнениями (11) и (12) определяют смещения в волнах PP и PS .

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ PP

Для построения асимптотического представления волны PP рассмотрим интеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(k, \eta) e^{kf(\eta)} d\eta, \quad (15)$$

в котором фазовая функция дается формулами:

$$f(\eta) = t\eta - z_1\alpha, \quad z_1 = z + h. \quad (16)$$

Получим для этого интеграла асимптотическое представление для больших k посредством метода седловой точки. Для этого мы определим седловые точки

$$\eta_0 = \pm \frac{itv_P^2}{\sqrt{v_P^2 t^2 - z_1^2}}, \quad (17)$$

где выполняются условия

$$f'(\eta_0) = 0. \quad (18)$$

В седловых точках функция $f(\eta_0)$ и ее вторая производная $f''(\eta_0)$ определяются следующим образом:

$$f(\eta_0) = \pm i\sqrt{v_P^2 t^2 - z_1^2}, \quad f''(\eta_0) = \mp i(v_P^2 t^2 - z_1^2)^{3/2} / (v_P^2 t_1^2). \quad (19)$$

Стационарный контур λ_0 , на котором функция

$$|\exp[kf(\eta)]| \quad (20)$$

уменьшается при удалении от седловых точек, удовлетворяет условиям:

$$\operatorname{Im} f(\eta) = \operatorname{Im} f\{\eta_0\} = \sqrt{v_P^2 t^2 - z_1^2} \quad (21)$$

и симметрична относительно реальной оси. Эти контуры представлены на рис. 2, где направления уменьшения указаны стрелками.

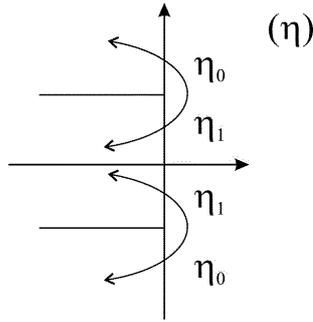


Рис. 2. Контуры интегрирования.

Стационарный контур пересекает мнимую ось в седловых точках и в точках

$$\eta_1 = \pm i \sqrt{v_P^2 t^2 - z_1^2} / t. \quad (22)$$

На своих концах стационарный контур приближается к асимптотическим прямым $\text{Im } \eta = \text{const}$ в левой полуплоскости η .

Между контуром Меллина и стационарным контуром могут существовать полюсы, являющихся корнями уравнения $R' = 0$. Поверхностные волны, распространяющиеся с Релеевской скоростью связаны именно с этими полюсами, но эти волны не регистрируются на удалении от границы $z = 0$. Поэтому мы не будем принимать во внимание эти полюса. На основании леммы Жордана мы можем заменить контур Меллина стационарным контуром. Функции $f(\eta)$ и $Z(k, \eta)$ удовлетворяют условиям:

$$f(\bar{\eta}) = \overline{f(\eta)}, \quad Z(k, \bar{\eta}) = \overline{Z(k, \eta)}, \quad (23)$$

где черта над символами означает комплексный характер переменных. Таким образом, возможно проводить интегрирование только по верхнему контуру λ , а затем необходимо удвоить вещественную часть результата интегрирования. Интеграл I выражается асимптотическим образом:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k |f''(\eta_0)|}} \left[\text{Re } Z \cos \left(k\omega_0 + \frac{\pi}{4} \right) - \text{Im } Z \sin \left(k\omega_0 + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (24)$$

где

$$\text{Re } Z = \text{Re } Z(k, \eta_0), \quad \text{Im } Z = \text{Im } Z(k, \eta_0),$$

$$\omega_0 = \text{Im } f(\eta_0) = \sqrt{v_P^2 t^2 - z_1^2}, \quad (25)$$

Асимптотическое представление (24) используется при исследовании волновых полей вблизи фронтов, где определяющими являются высокие и средние частоты, а низкими можно пренебречь. Это позволяет сузить промежуток интегрирования во внешних интегралах (11) и (12) до (k_0, ∞) . Полезно выбрать переменную k_0 так, чтобы были удовлетворены условия:

$$k_0 t |\eta| \gg 1. \quad (26)$$

$$k_0 r \gg 1. \quad (27)$$

Условие (26) определяет область применимости метода седловой точки. Условие (27) позволяет заменить функции Бесселя асимптотическими выражениями:

$$J_0(kr) = \frac{\sqrt{2} \cos(kr - \pi/4)}{\sqrt{\pi kr}}, \quad J_1(kr) = -\frac{\sqrt{2} \cos(kr + \pi/4)}{\sqrt{\pi kr}}. \quad (28)$$

После подстановки формул (24) и (28) в уравнения (11), и после элементарных преобразований мы приходим к следующим тождествам:

$$\begin{aligned} u_{rPP} &= -\frac{4}{3(\lambda + 2\mu)\pi\sqrt{r|f''(\eta_0)|}} \int_{k_0}^{\infty} k \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\beta_0}{R_0} F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0 - r)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Im} \left[\frac{\beta_0}{R_0} F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0 + r)} \right] \right\} dk, \\ u_{zPP} &= -\frac{4\bar{\alpha}_0}{3(\lambda + 2\mu)\pi\sqrt{r|f''(\eta_0)|}} \int_{k_0}^{\infty} k \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{\beta_0}{R_0} F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0 - r)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im} \left[\frac{\beta_0}{R_0} F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0 + r)} \right] \right\} dk, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\beta_0 = \beta(\eta_0), \quad R_0 = R'(\eta_0), \quad \bar{\alpha}_0 = \operatorname{Im} \alpha(\eta_0). \quad (30)$$

Правые части уравнений (29) являются интегралами осциллирующих функций, имеющих сингулярности при

$$r = \omega_0. \quad (31)$$

Характер этих сингулярностей определяется функцией источника $f(t)$. Вторые слагаемые в формулах (29) не имеют сингулярностей, и, поэтому, ими можно пренебречь вблизи волнового фронта.

Условие (31) эквивалентно уравнению фронта отраженной волны PP

$$r^2 + (z + h)^2 = v_P^2 t^2. \quad (32)$$

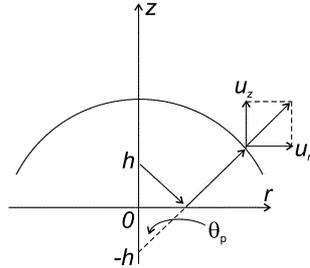


Рис. 3. Сферический фронт волны.

В соответствии с уравнением (32) фронт волны есть сфера с центром $r = 0, z = -h$. Эта точка симметрична точечному источнику $r = 0, z = h$ над границей $z = 0$ (см. рис. 3). Между точками фронта волны и седловыми точками в верхней полуплоскости существует соответствие, выражаемое следующим образом:

$$\eta_0 = i v_P / \sin \theta_P, \quad (33)$$

где θ_P есть угол между осью z и лучом, направленным вверх к точке на волновом фронте, соответствующей седловой точке η_0 . Координата r вдоль волнового фронта определена величиной:

$$r = \text{Im } f(\eta_0) \quad (34)$$

в слагаемом, определяющем фазовую функцию в седловых точках. На основании отношения (33), радикал $\alpha(\eta_0)$ в седловой точке выражается как:

$$\alpha(\eta_0) = i \text{ctg } \theta_P \quad (35)$$

через θ_P . Принимая во внимание (35) и формулы (29), связь между асимптотическими выражениями для компонентов смещений для волны PP представляется как:

$$u_{zPP} = \text{ctg } \theta_P u_{rPP}. \quad (36)$$

Рисунок 3 демонстрирует, что направление вектора смещений волны PP совпадает с направлением луча.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ PS

Для получения асимптотического выражения волны PS рассмотрим интеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(k, \eta) e^{k f(\eta)} d\eta, \quad (37)$$

где

$$f(\eta) = t\eta - h\alpha - z\beta. \quad (38)$$

В этом случае фазовая функция $f(\eta)$ также всегда имеет на мнимой оси в верхней полуплоскости одну седловую точку, удовлетворяющую уравнению:

$$t - \frac{h\eta}{v_P^2 \alpha} - \frac{z\eta}{v_S^2 \beta} = 0. \quad (39)$$

Эта точка определяется выражением:

$$\eta_0 = i\tau_0 = \frac{iv_P}{\sin \theta_P} = \frac{iv_S}{\sin \theta_S} \quad (40)$$

и соответствует лучам, падающим на границу $z = 0$ под углом θ_P и отражающимся под углом θ_S . Углы соответствуют закону Снеллиуса.

Особенность рассматриваемого случая в том, что седловая точка может быть неединственной в верхней полуплоскости. Действительно, рассмотрим случай, когда $h = 0$. В этой ситуации фазовая функция

$$f(\eta) = t\eta - z\beta \quad (41)$$

имеет седловую точку

$$\eta_1 = \frac{itv_S^2}{\sqrt{v_S^2 t^2 - z^2}}, \quad (42)$$

содержащуюся в интервале

$$v_S < \text{Im } \eta_1 < v_P \quad (43)$$

на мнимой оси при условии:

$$\frac{tv_S^2}{\sqrt{v_S^2 t^2 - z^2}} < v_P. \quad (44)$$

Для малых $h \ll z$ появляется седловая точка η_0 (40), но седловая точка η_1 смещается влево и определяется приближенным выражением:

$$\eta_1 = \frac{itv_s^2}{\sqrt{v_s^2 t^2 - z^2}} \left[1 + \frac{ihv_s^2 z^2}{v_P(v_s^2 t^2 - z^2)\sqrt{(v_P^2 - v_s^2)v_s^2 t^2 - v_P^2 z^2}} \right]. \quad (45)$$

Таким образом, в верхней полуплоскости при условии (44) существует две седловые точки и два стационарных контура:

$$\begin{aligned} \lambda_0 : \operatorname{Im} f(\eta) &= \operatorname{Im} f(\eta_0), \\ \lambda_1 : \operatorname{Im} f(\eta) &= \operatorname{Im} f(\eta_1). \end{aligned} \quad (46)$$

Их взаимоположение существенно зависит от отношения между переменными $\operatorname{Im} f(\eta_0)$ и $\operatorname{Im} f(\eta_1)$. В случае:

$$\operatorname{Im} f(\eta_0) = \operatorname{Im} f(\eta_1), \quad (47)$$

стационарные контуры λ_0 и λ_1 частично совпадают (рис. 5). Если условие

$$\operatorname{Im} f(\eta_0) > \operatorname{Im} f(\eta_1) \quad (48)$$

выполняется, то стационарный контур λ_0 достигает верхней седловой точки η_1 (рис. 4). При условии

$$\operatorname{Im} f(\eta_0) < \operatorname{Im} f(\eta_1), \quad (49)$$

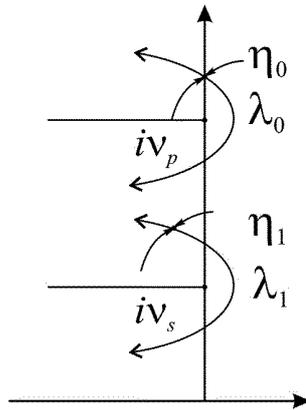
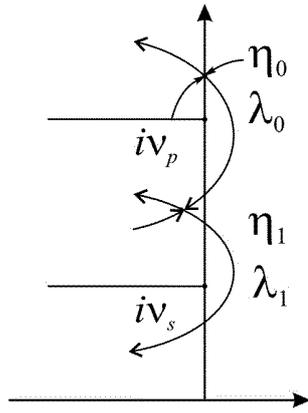
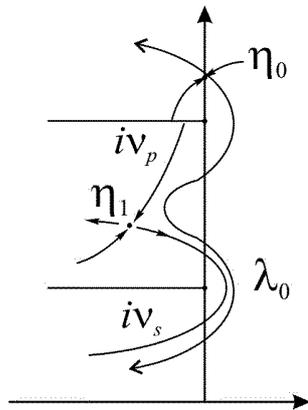


Рис. 4. $\operatorname{Im} f(\eta_0) > \operatorname{Im} f(\eta_1)$.

Рис. 5. $\text{Im } f(\eta_0) = \text{Im } f(\eta_1)$.Рис. 6. $\text{Im } f(\eta_0) < \text{Im } f(\eta_1)$.

стационарный контур λ_0 располагается справа от седловой точки η_1 (рис. 6, 7), кроме того контур λ_0 смещается вправо, если разность $\text{Im } f(\eta_1) - \text{Im } f(\eta_0)$ возрастает. Согласно (рис. 4–7), мы приходим к выводу, что после замены контура Меллина стационарным контуром необходимо учитывать интеграл по контуру λ_0 всегда, а интеграл по контуру λ_1 только при условии (48). Эти интегралы описывают соответственно волны PS и S^* . Вычисление внутренних интегралов по контуру λ_0 и преобразование внешних интегралов в случае волны PS выполняются по методам, использованным нами ранее в преды-

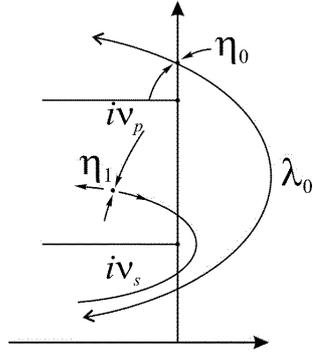


Рис. 7. $\text{Im } f(\eta_0) < \text{Im } f(\eta_1)$.

дущем параграфе. В результате мы приходим к асимптотическим выражениям:

$$\begin{aligned}
 u_{rPS} &= -\frac{2\overline{\beta_0}g_0}{3(\lambda + 2\mu)\pi R_0\sqrt{rf_0''}} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \text{Im} \left[F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0-r)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \text{Re} \left[F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0+r)} \right] \right\} kdk, \\
 u_{zPS} &= \frac{2g_0}{3(\lambda + 2\mu)\pi R_0\sqrt{rf_0''}} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \text{Im} \left[F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0-r)} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \text{Re} \left[F(k\eta_0) e^{ik(\omega_0+r)} \right] \right\} kdk,
 \end{aligned} \tag{50}$$

где

$$\overline{\beta_0} = \text{Im } \beta(\eta_0), \quad R_0 = R'(\eta_0), \quad f_0'' = |f''(\eta_0)|, \quad \omega_0 = \text{Im } f(\eta_0). \tag{51}$$

Интегралы (50) подобны интегралам (29). Таким образом, фронт волны PS описывается уравнением:

$$r = \omega_0. \tag{52}$$

Вблизи фронта вторыми слагаемыми в формулах (50) можно пренебречь, потому что они не имеют сингулярностей. После этого правые части уравнений (50) будут отличаться только множителем

$$\overline{\beta_0} = \cot g\theta_S, \tag{53}$$

и для компонентов смещений u_{rPS} и u_{zPS} справедлива формула:

$$u_{rPS} = -\cot g\theta_S u_{zPS}. \quad (54)$$

Из уравнения (54) следует, что в околорасположенной области вектор смещений перпендикулярен лучу (рис. 8).

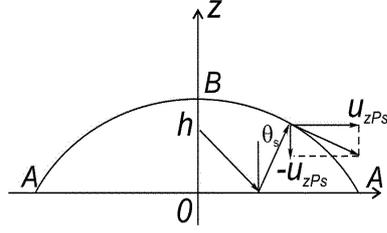


Рис. 8. Фронт волны. Вектор смещений перпендикулярен лучу.

Для построения фронта волны PS необходимо принять во внимание однозначное соответствие между седловыми точками $\eta_0 = i\tau$ и точками пересечения фронта волны PS и плоскости r, z . Используя формулы (38), (39), (51) и (52), запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} r &= t\tau - h\bar{\alpha} - z\bar{\beta}, \\ t &= \frac{h\tau}{v_P^2\bar{\alpha}} + \frac{z\tau}{v_S^2\bar{\beta}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Решая систему (55) относительно r , приходим к выражениям, параметрически описывающим фронт волны P :

$$\begin{aligned} z &= v_S^2\bar{\beta} \left(\frac{t}{\tau} - \frac{h}{v_P^2\bar{\alpha}} \right), \\ r &= \frac{h(v_P^2 - v_S^2)}{v_P^2\bar{\alpha}} + \frac{v_S^2 t}{\tau}, \end{aligned} \quad (56)$$

где параметром являются координаты седловой точки τ . Чтобы определить область определения этого параметра, мы рассмотрим точки экстремумов на фронте A и B (рис. 8). В точке A , где $z = 0$, мы получим отношения:

$$\tau = \tau_0 = \frac{v_P^2 t}{\sqrt{v_P^2 t^2 - h^2}}, \quad (57)$$

$$r = \sqrt{v_P^2 t^2 - h^2}. \quad (58)$$

Тождество (57) определяет начальные координаты τ_0 седловой точки, но формула (58) показывает, что точка A также располагается на фронте волны PP . В другой точке - B , где $r = 0$, мы получаем выражения:

$$\tau = \infty, \tag{59}$$

$$z = v_S t - \frac{v_S}{v_P} h. \tag{60}$$

Формула (59) очевидна. Ее можно объяснить, если принять во внимание, что волна PS , как и волна P , распространяется вдоль оси z в течение времени h/v_P , а в оставшееся время $t - h/v_P$ эта волна распространяется со скоростью v_S . Таким образом, формулы (56) определяют фронт волны PS . Параметр τ меняется в интервале (τ_0, ∞) . На основании соотношений (56) можно доказать, что фронт волны выпуклый.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ S^*

Волна S^* описывается формулами (12), в которых контур внутреннего интеграла заменен контуром λ_1 , определенным вторым уравнением (46). Контур λ_1 в верхней полуплоскости проходит через комплексную седловую точку η_1 , которая представляется отношением (45) для малых h и при условии (44). Асимптотические вычисления внутреннего интеграла по контуру λ_1 приводят к следующему тождеству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda_1)} Z(k, \eta) e^{k f(\eta)} d\eta = \frac{\sqrt{2} e^{-k\kappa}}{\sqrt{\pi k D}} \left[\operatorname{Re} Z(k, \eta_1) \cos \left(k\omega_1 - \frac{\chi}{2} \right) - \operatorname{Im} Z(k, \eta_1) \sin \left(k\omega_1 - \frac{\chi}{2} \right) \right], \tag{61}$$

где

$$\omega_1 = \operatorname{Im} f(\eta_1), \quad \kappa = |\operatorname{Re} f(\eta_1)|, \tag{62}$$

а переменные D, χ определяются формулой:

$$f''(\eta_1) = D e^{i\chi}. \tag{63}$$

Используя (61) и асимптотические формулы (28) для функций Бесселя мы приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}
 u_{rPS*} &= \frac{2}{3\pi(\lambda + 2\mu)\sqrt{rD}} \operatorname{Re} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\beta_1 g_1}{R_1} F(k\eta_1) \phi_r k dk, \\
 \phi_r &= \left\{ \exp \left[i \left(k\omega_1 - kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left[i \left(k\omega_1 + kr + \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] \right\} \exp(-k\kappa), \\
 u_{zPS*} &= -\frac{2}{3\pi(\lambda + 2\mu)\sqrt{rD}} \operatorname{Re} \int_{k_0}^{\infty} \frac{g_1}{R_1} F(k\eta_1) \phi_z k dk, \\
 \phi_z &= \left\{ \exp \left[i \left(k\omega_1 + kr + \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left[i \left(k\omega_1 + kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] \right\} \exp(-k\kappa),
 \end{aligned} \tag{64}$$

где

$$\beta_1 = \beta(\eta_1), \quad g_1 = g(\eta_1), \quad R_1 = R'(\eta_1). \tag{65}$$

Подынтегральные функции в (64) содержат экспоненциальные множители. Так что интегралы (64) и их производные сходятся в рассматриваемой области, и, поэтому, волны S^* не имеют фронтов. Поверхности, где смещения максимальны, определяются формулой:

$$\omega_1 = r \tag{66}$$

и могут быть названы квази-фронтами. Из условия (48) и из равенств (51), (52) и (65) следует, что квази-фронты волн S^* всегда располагаются позади фронтов волн PS . Если условие (48) не выполняется в какой-то области, то в ней волна S^* отсутствует.

Другие ограничения на существование волны S^* даются вторым условием (43). Чтобы учесть эти ограничения, мы представим седловую точку η_1 приближенным выражением:

$$\operatorname{Im} \eta_1 = \frac{v_S}{\sin \theta_S} \tag{67}$$

и приходим к следующему неравенству:

$$\frac{v_S}{\sin \theta_S} < v_P. \tag{68}$$

Рассмотрим критический угол θ_0 , удовлетворяющий уравнению:

$$\sin \theta_0 = \frac{v_S}{v_P}, \quad (69)$$

тогда мы получим условие:

$$\theta_S > \theta_0. \quad (70)$$

На основании (70) мы приходим к следующему выводу: учитывая вышеуказанные условия существования волны S^* , возможно выделить области, где эта волна распространяется. Эти области представляются треугольником AEO на Рис. 9.

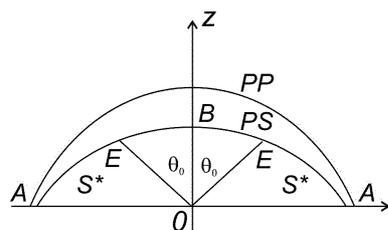


Рис. 9. Фронт волны S^* .

5. СЛУЧАЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим теперь случай, когда среда 1 является пористой средой, заполненной жидкостью. Для описания такой среды мы будем использовать метод эффективной модели. В модели будем использовать чередующиеся упругие и жидкие слои и совершим предельный переход, устремив период к нулю. Отношение толщин упругих и жидких слоев остается при этом постоянным. Такая эффективная модель была впервые предложена и описана Л.Молотковым. Она является частным случаем среды Био (Молотков, Бакулин, 1995), когда жидкие частицы и скелет представляют собой жидкие и упругие слои соответственно. Исследуемая модель была изучена также в работах М. Schoenberg (1983, 1984). В этих работах было выполнено низкочастотное усреднение упруго-жидкой среды и изучены некоторые характеристики модели, но аналитические выражения получены не были. Лабораторные исследования процесса распространения волн в чередующихся упругих и жидких слоях были проведены Т. Плона, К.

Winkler, M. Schoenberg (1987). Они показали, что эффективная модель может быть использована в задачах с широким частотным интервалом.

Уравнения эффективной модели в осесимметричном случае представляются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\tau_{rr1} &= [(1 - \varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1] \left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{u_{r1}}{r} \right) \\ &\quad + b_1\varepsilon\tilde{\lambda} \left(\frac{\partial u_{r2}}{\partial r} + \frac{u_{r2}}{r} \right) + b_1\tilde{\lambda} \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}, \\ \tau_{rr2} = \tau_{zz1} = \tau_{zz2} &= (1 - \varepsilon)b_1\tilde{\lambda} \left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{u_{r1}}{r} \right) \\ &\quad + \varepsilon\tilde{\lambda} \left(\frac{\partial u_{r2}}{\partial r} + \frac{u_{r2}}{r} \right) + \tilde{\lambda} \frac{\partial u_{z1}}{\partial z},\end{aligned}\quad (71)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{rr1}}{\partial r} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u_{r1}}{\partial t^2}, & \frac{\partial \tau_{rr2}}{\partial r} &= \rho_2 \frac{\partial^2 u_{r2}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} &= \bar{\rho} \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2}, & u_{z1} &= u_{z2},\end{aligned}$$

где u_{r1} , u_{r2} – горизонтальные смещения в упругой и жидкой средах, u_{z1} , u_{z2} – соответствующие вертикальные смещения, t_{rr1} , t_{rr2} – горизонтальные напряжения в упругости и жидкости; кроме того, в соответствии с законом Паскаля напряжения в жидкости одинаковы во всех направлениях. Коэффициенты в уравнениях (71) имеют вид:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{4\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1}, & b_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}, & \bar{\rho} &= \rho_1(1 - \varepsilon) + \rho_2\varepsilon, \\ \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\varepsilon(\lambda_1 + 2\mu_1) + \lambda_2(1 - \varepsilon)}, & \lambda_2 &= \rho_2 v_2^2,\end{aligned}\quad (72)$$

где λ_1 , μ_1 – коэффициенты Ламе для упругих слоев, ρ_1 , ρ_2 – плотности упругих и жидких слоев, $\bar{\rho}$ – средняя плотность в среде 1 ($z < 0$), λ_2 – коэффициент Ламе в среде 1, v_2 – скорость распространения волны по жидкому слою.

На поверхности $z = 0$ выполняются условия:

$$u_z = u_{z1}, \quad \tau_{zz} = \tau_{zz1}, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (73)$$

Условия (73) подобны условиям (1). Разница между этими условиями заключается только в том, что тангенциальные напряжения τ_{rz1} пропадают во всех эффективных моделях среды (1) $z < 0$.

Чтобы определить волны отраженные от поверхности $z = 0$, представим смещения и напряжения в среде (1) как:

$$\begin{aligned}
 u_{r1} &= \int_0^{\infty} \frac{k J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{u}_{ri} e^{k(t\eta+z\bar{\alpha})} d\eta, \quad (i = 1, 2), \\
 u_{z1} &= \int_0^{\infty} \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{u}_{z1} e^{k(t\eta+z\bar{\alpha})} d\eta, \\
 \tau_{zz1} &= \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{\tau}_{zzi} e^{k(t\eta+z\bar{\alpha})} d\eta, \\
 \tau_{rr1} &= \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{\tau}_{rr1} e^{k(t\eta+z\bar{\alpha})} d\eta.
 \end{aligned} \tag{74}$$

После подстановки формул (74) в (71) приходим к выражениям:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau}_{rr1} &= [(1 - \varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1]\tilde{u}_{r1} + b_1\varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{u}_{r2} + b_1\tilde{\lambda}\tilde{\alpha}\tilde{u}_{z1}, \\
 \tilde{\tau}_{zz1} &= (1 - \varepsilon)b_1\tilde{\lambda}\tilde{u}_{r1} + \varepsilon\tilde{\lambda}u_{r2} + \tilde{\lambda}\tilde{\alpha}\tilde{u}_{z1}, \\
 \tilde{\tau}_{rr1} + \rho_1\eta^2\tilde{u}_{r1} &= 0, \\
 \tilde{\tau}_{zz1} + \rho_2\eta^2\tilde{u}_{r2} &= 0, \\
 \tilde{\alpha}\tilde{\tau}_{zz1} - \bar{\rho}\eta^2\tilde{u}_{z1} &= 0.
 \end{aligned} \tag{75}$$

Система уравнений (75) имеет ненулевое решение только в случае, когда ее детерминант равен нулю. Это условие:

$$\begin{vmatrix}
 -1 & 0 & (1 - \varepsilon)b_1^2\tilde{\lambda} + a_1 & b_1\varepsilon\tilde{\lambda} & b_1\tilde{\lambda}\tilde{\alpha} \\
 0 & -1 & (1 - \varepsilon)b_1\tilde{\lambda} & \varepsilon\tilde{\lambda} & \tilde{\lambda}\tilde{\alpha} \\
 1 & 0 & \rho_1\eta^2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & \rho_2\eta^2 & 0 \\
 0 & \tilde{\alpha} & 0 & 0 & -\bar{\rho}\eta^2 \text{***}
 \end{vmatrix} = 0 \tag{76}$$

определяет функцию:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \sqrt{\bar{\rho} \frac{\rho_1 \rho_2 \eta^4 + [a_1 \rho_2 + (1 - \varepsilon) b_1^2 \tilde{\lambda} \rho_2 + \varepsilon \tilde{\lambda} \rho_1] \eta^2 + \varepsilon a_1 \tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} \rho_2 (\rho_1 \eta^2 + a_1)}} \\ &= \eta \sqrt{\bar{\rho} \left[\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \frac{(1 - \varepsilon) b_1^2}{\rho_1 \eta^2 + a_1} + \frac{\varepsilon}{\rho_2 \eta^2} \right]}.\end{aligned}\quad (77)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (73), подставим в эти условия выражения для потенциалов: φ , ψ (5), где: $X^- = 0$. Функция источника X^+ дается формулой (7). Кроме того, примем во внимание пятую формулу из (75), связывающую изменения смещений \tilde{u}_{z1} и напряжений $\tilde{\tau}_{zz1}$. В результате мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}\alpha X^- - Y^- + \tilde{u}_{z1} &= \alpha X^+, \\ 2\alpha X^- - gY^- &= 2\alpha X^+, \\ \mu g X^- - 2\mu\beta Y^- - \frac{\bar{\rho}\eta^2}{\tilde{\alpha}} \tilde{u}_{z1} &= -\mu g X^+, \end{aligned}\quad (78)$$

относительно переменных X^- , Y^- и \tilde{u}_{z1} .

Решение системы уравнений (78) представляется отношениями:

$$\begin{aligned}X^- &= -\frac{\mu^2 \tilde{\alpha} T - \rho \tilde{\rho} \alpha \eta^4}{\mu^2 \tilde{\alpha} R' + \rho \tilde{\rho} \alpha \eta^4} X^+, \\ Y^- &= -\frac{4\mu^2 \alpha \tilde{\alpha} g}{\mu^2 \tilde{\alpha} R' + \rho \tilde{\rho} \alpha \eta^4} X^+, \\ \tilde{u}_{z1} &= \frac{2\rho\mu\alpha\tilde{\alpha}g\eta^2}{\mu^2\tilde{\alpha}R' + \rho\tilde{\rho}\alpha\eta^4} X^+.\end{aligned}\quad (79)$$

Потенциал φ волны PP и потенциал ψ волны PS , определяющие вол-

новое поле в упругой среде (0), описываются как

$$\begin{aligned}
 \varphi &= -\frac{1}{3(\lambda+2\mu)} \int_0^\infty \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \\
 &\times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\alpha} \frac{\mu^2 \tilde{\alpha} T - \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4}{\mu^2 \tilde{\alpha} R' + \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4} e^{k[t\eta-(z+h)\alpha]} d\eta, \\
 \psi &= -\frac{4\mu^2}{3(\lambda+2\mu)} \int_0^\infty \frac{k J_1(kr) dk}{2\pi i} \\
 &\times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta) \frac{\tilde{\alpha} g}{\mu^2 \tilde{\alpha} R' + \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4} e^{k(t\eta-h\alpha-z\beta)} d\eta.
 \end{aligned} \tag{80}$$

На основании формул (2), (11), (12) и (80), мы получаем:

$$\begin{aligned}
 u_{rPP} &= \frac{1}{3(\lambda+2\mu)} \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \\
 &\times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\alpha} \frac{\mu^2 \tilde{\alpha} T - \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4}{\mu^2 \tilde{\alpha} R' + \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4} e^{k[t\eta-(z+h)\alpha]} d\eta, \\
 u_{zPP} &= \frac{1}{3(\lambda+2\mu)} \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \\
 &\times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta) \frac{\mu^2 \tilde{\alpha} T - \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4}{\mu^2 \tilde{\alpha} R' + \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4} e^{k[t\eta-(z+h)\alpha]} d\eta, \\
 u_{rPS} &= -\frac{4\mu^2}{3(\lambda+2\mu)} \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \\
 &\times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta) \frac{\beta \tilde{\alpha} g}{\mu^2 \tilde{\alpha} R' + \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4} e^{k[t\eta-h\alpha-z\beta]} d\eta,
 \end{aligned} \tag{81}$$

$$u_{zPS} = -\frac{4\mu^2}{3(\lambda+2\mu)} \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta) \frac{\tilde{\alpha}g}{\mu^2 \tilde{\alpha}R' + \rho \bar{\rho} \alpha \eta^4} e^{k[t\eta - h\alpha - z\beta]} d\eta$$

для смещений отраженных волн PP и PS . В формулах (81) мы использовали соотношения (72), (77) и обозначения:

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, & v_S &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, & \alpha &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_P^2}}, \\ \beta &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_S^2}}, & g &= 2 + \frac{\eta^2}{v_S^2}, \\ R' &= g^2 - 4\alpha\beta, & T &= g^2 + 4\alpha\beta, \end{aligned} \quad (82)$$

относящиеся к среде (0).

Для получения асимптотических формул для отраженных волн (81) заранее выделим сингулярности в подынтегральных выражениях (81). В соответствие с формулами (77) и (81) эти функции имеют помимо точек ветвления $\eta = \pm i v_P$ и $\eta = \pm i v_S$ еще и дополнительные точки:

$$\begin{aligned} \eta &= \pm i v_{1,2,3}, \\ v_{1,2}^2 &= \frac{\varepsilon \rho_1 \tilde{\lambda} + (1-\varepsilon) b_1^2 \rho_2 \tilde{\lambda} + a_1 \rho_2 \pm \sqrt{[\varepsilon \rho_1 \tilde{\lambda} + (1-\varepsilon) b_1^2 \rho_2 \tilde{\lambda} + a_1 \rho_2]^2 - 4\varepsilon \rho_1 \rho_2 \tilde{\lambda}}}{2\rho_1 \rho_2}, \end{aligned} \quad (83)$$

$$v_3^2 = a_1 / \rho_1.$$

Переменные v_1 , v_2 и v_3 являются скоростями распространения волн вдоль оси X ; кроме того, v_1 есть скорость первой (быстрой) продольной волны, v_2 есть скорость второй (медленной) продольной волны и v_3 скорость пластинчатой волны. Эти скорости удовлетворяют неравенствам:

$$v_1 > v_2, \quad v_1 > v_3. \quad (84)$$

Подынтегральные выражения в равенствах (81) имеют полюсы $\eta = \pm i \tau'_R$ на мнимой оси в корнях уравнения:

$$R' + \frac{\rho \bar{\rho} \alpha \eta^4}{\mu^2 \tilde{\alpha}} = 0. \quad (85)$$

Вычеты в этих полюсах описывают распространение волны Стоунли вдоль границы между упругим и пористым полупространствами. Скорости этих волн располагаются в интервале:

$$0 < \tau'_R < \min(v_S, v_2, v_3) \quad (86)$$

и удовлетворяют неравенству:

$$\tau'_R < \tau_R, \quad (87)$$

где τ_R скорость волны Релея вдоль свободной поверхности упругой среды и корень уравнения $R'(i\tau) = 0$.

Асимптотическое вычисление выражений (81) производится методом седловой точки. Фазовые функции отраженных волн имеют такой же вид (16) и (38), как и в случае упругой среды (1). Поэтому седловые точки определяются аналогично по формулам (17), (40), (42) и (45). Положение стационарного контура такое же, как и в ранее рассмотренном случае. Между контуром Меллина и стационарным контуром могут размещаться полюса $\eta = \pm i\tau'_R$ и дополнительные точки ветвления $\eta = \pm iv_l$ ($l = 1, 2, 3$). Волна Стоунли, связанная с вышеуказанным полюсом, может быть зарегистрирована только около поверхности $z = 0$ и, поэтому, такой тип волн не представляет интерес при изучении среды вдали от границы. Точки ветвления:

$$\eta = \pm iv_l \quad (88)$$

должны быть приняты во внимание, если выполняется неравенство:

$$|\eta_0| < v_l. \quad (89)$$

Результатом этого являются интегралы вдоль разреза, проведенного из точек ветвления (88) (рис. 10). Эти интегралы описывают головные волны. Эти волны имеют конические фронты, касающиеся фронтов волны PP и PS (рис. 11). Количество головных волн не может превышать трех. Аналитическое описание и исследование этих волн может быть выполнено, но нам бы хотелось сосредоточить внимание на волнах типа PP , PS и S^* . Эти волны имеют большую интенсивность, чем головные волны.

Дифференцирование асимптотических формул для волн PP , PS и S^* выполняется аналогично случаю упругой среды (1). Чтобы выписать асимптотические тождества для этих волн в случае пористой

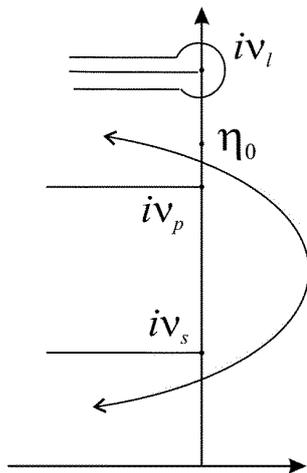
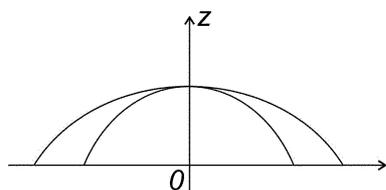


Рис. 10. Разрезы интегрирования.

Рис. 11. Фронт головной волны и волны PP (PS).

среды (1), можно сравнить формулы (81) и (11), (12) и (14). На основании этого сравнения и асимптотических формул (29), (50) и (64) мы получаем асимптотические выражения для волн PP , PS и S^* .

Волна PP описывается формулами:

$$\begin{aligned}
 u_{rPP} &= -\frac{1}{\pi \bar{\alpha}_0 \sqrt{r} |f''(\eta_0)|} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \operatorname{Im} \left[G_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0 - r)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re} \left[G_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0 + r)} \right] \right\} dk, \\
 u_{zPP} &= -\frac{1}{\pi \sqrt{r} |f''(\eta_0)|} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \operatorname{Im} \left[G_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0 - r)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re} \left[G_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0 + r)} \right] \right\} dk,
 \end{aligned} \tag{90}$$

где

$$G_0 = \frac{1}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\mu^2 \tilde{\alpha}_0 T_0 - \rho \bar{\rho} \alpha_0 \eta_0^4}{\mu^2 \tilde{\alpha}_0 R_0 + \rho \bar{\rho} \alpha_0 \eta_0^4}, \quad \eta_0 = \pm \frac{itv_P^2}{\sqrt{v_P^2 t^2 - (z+h)^2}},$$

$$\bar{\alpha}_0 = \text{Im } \alpha(\eta_0), \quad \tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}(\eta_0), \quad R_0 = R'(\eta_0),$$

$$T_0 = T(\eta_0), \quad \varpi_0 = \sqrt{v_P^2 t^2 - (z+h)^2}. \quad (91)$$

Волна PS выражается следующим образом:

$$u_{rPS} = -\frac{\bar{\beta}_0}{\pi \sqrt{r} |f_0''|} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \text{Im} \left[H_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0-r)} \right] \right.$$

$$\left. + \text{Re} \left[H_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0+r)} \right] \right\} k dk, \quad (92)$$

$$u_{zPS} = \frac{1}{\pi \sqrt{r} |f_0''|} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \text{Im} \left[H_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0-r)} \right] \right.$$

$$\left. - \text{Re} \left[H_0 F(k\eta_0) e^{ik(\varpi_0+r)} \right] \right\} k dk,$$

где

$$H_0 = \frac{4\mu^2}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\tilde{\alpha}_0 g_0}{\mu^2 \tilde{\alpha}_0 R_0 + \rho \bar{\rho} \alpha_0 \eta_0^4},$$

$$\alpha_0 = \alpha(\eta_0), \quad \tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}(\eta_0), \quad g_0 = g(\eta_0),$$

$$R_0 = R'(\eta_0), \quad f_0'' = f''(\eta_0), \quad \varpi_0 = \text{Im } f(\eta_0), \quad (93)$$

седловая точка η_0 является мнимым корнем уравнения:

$$t - \frac{h\eta}{v_P^2 \alpha} - \frac{z\eta}{v_S^2 \beta} = 0. \quad (94)$$

Фронты волн PP и PS сохраняют свое положение после замены упругого полупространства (1) пористым.

Волна S^* соответствует аналитическому выражению:

$$u_{rS^*} = \frac{1}{\pi \sqrt{r} D} \text{Re} \int_{k_0}^{\infty} \beta_1 H_1 F(k\eta_1) \phi_r k dk,$$

$$\phi_r = \left\{ \exp \left[i \left(k\varpi_1 - kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] + \exp \left[i \left(k\varpi_1 + kr + \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] \right\} \exp(-k\kappa),$$

$$u_{zS*} = \frac{1}{\pi\sqrt{rD}} \operatorname{Re} \int_{k_0}^{\infty} H_1 F(k\eta_1) \phi_z k dk, \quad (95)$$

$$\phi_z = \left\{ \exp \left[i \left(k\varpi_1 - kr + \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] + \exp \left[i \left(k\varpi_1 + kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\chi}{2} \right) \right] \right\} \exp(-k\kappa).$$

где

$$H_1 = \frac{4\mu^2}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\tilde{\alpha}_1 g_1}{\mu^2 \tilde{\alpha}_1 R_1 + \rho \bar{\rho} \alpha_1 \eta^4}, \quad (96)$$

$$\alpha_1 = \alpha(\eta_1), \quad \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}(\eta_1), \quad g_1 = g(\eta_1), \quad R_1 = R'(\eta_1), \quad (97)$$

$$\varpi_1 = \operatorname{Im} f(\eta_1), \quad D = |f''(\eta_1)|, \quad \chi_1 = \arg f''(\eta_1). \quad (98)$$

Седловая точка η_1 есть комплексный корень уравнения (94) и выражается приближенной формулой (45). Волна S^* регистрируется на углах больших, чем критический. Квази-фронт данной волны расположен вблизи поверхности $\varpi_1 = r$. Таким образом, после замены упругой среды (1) пористой волновое поле может измениться только количественно. Такое изменение может быть связано с различными коэффициентами отражения в этих двух случаях.

6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для численного моделирования была выбрана геометрия эксперимента, представленная на рис. 12, где схематически показаны все типы волн, приходящих к сетке приемников. Глубина границы резервуара равнялась 300м. Расстояние от источника до границы составляло 12.5м. Скорости в твердых слоях и во флюиде были, соответственно, в модели I: $V_p=3000\text{м/с}$, $V_s=1500\text{м/с}$, $V_f=1500\text{м/с}$ (рис. 13) и в модели II: $V_p=5000\text{м/с}$, $V_s=2500\text{м/с}$, $V_f=1500\text{м/с}$ (рис. 14). Поле для каждой модели рассчитывалось для трех значений пористости:

$$\epsilon = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = 0.1, 0.5, 0.9,$$

где h_1 – толщина жидкого слоя в периоде. По сейсмограммам отчетливо прослеживается, как, при приближении источника к границе, начиная с некоторого критического угла, сеткой приемников фиксируется приход сильной (в сравнении с остальными типами волн) волны S^* .

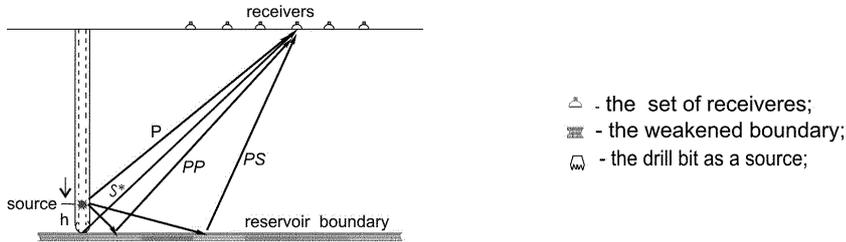
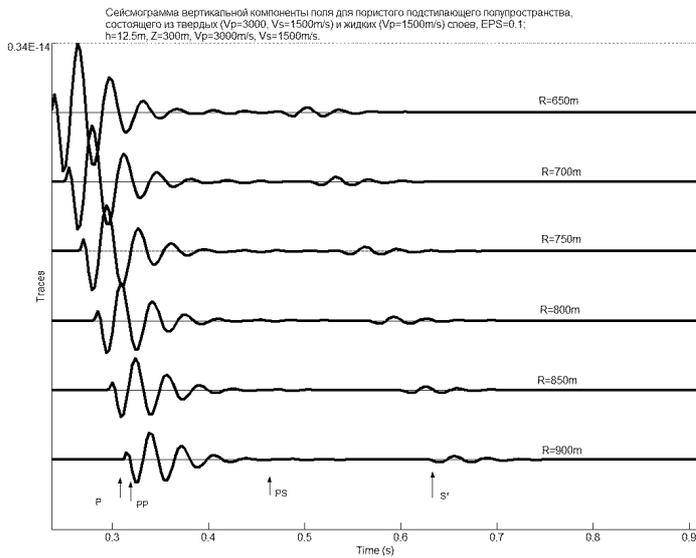


Рис. 12. Геометрия эксперимента.



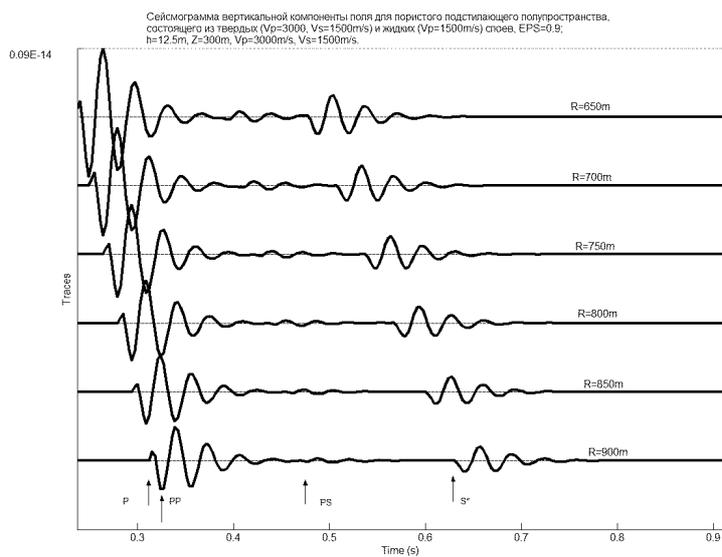
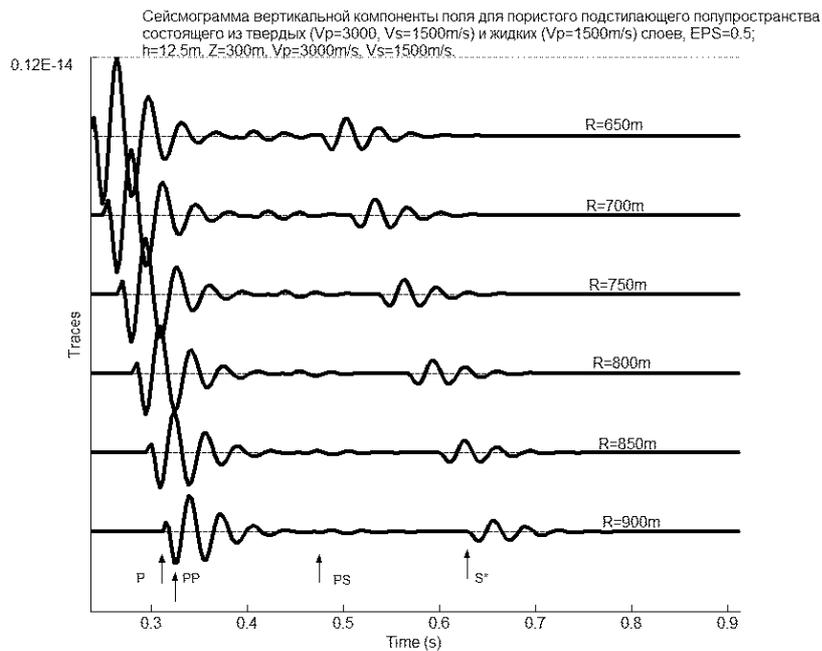
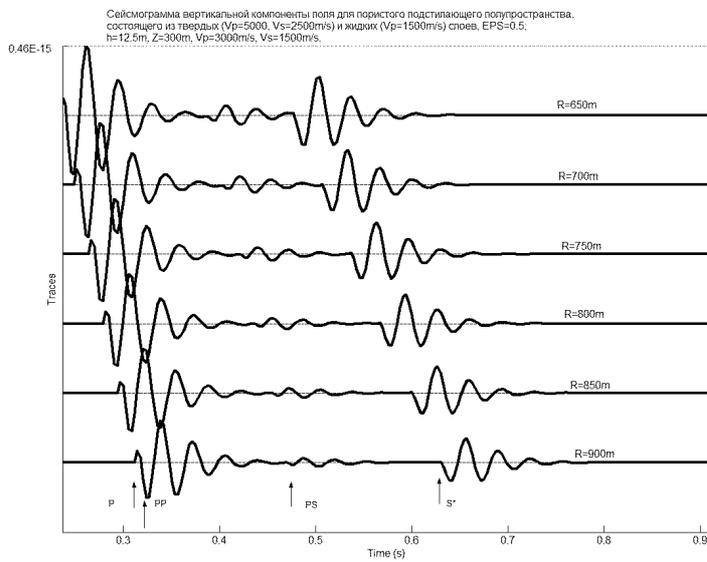
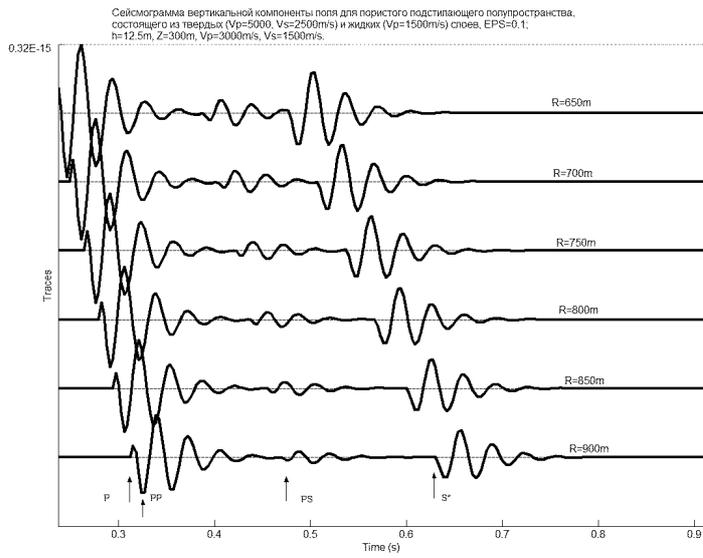


Рис. 13. Сейсмограммы волнового фронта для модели I.



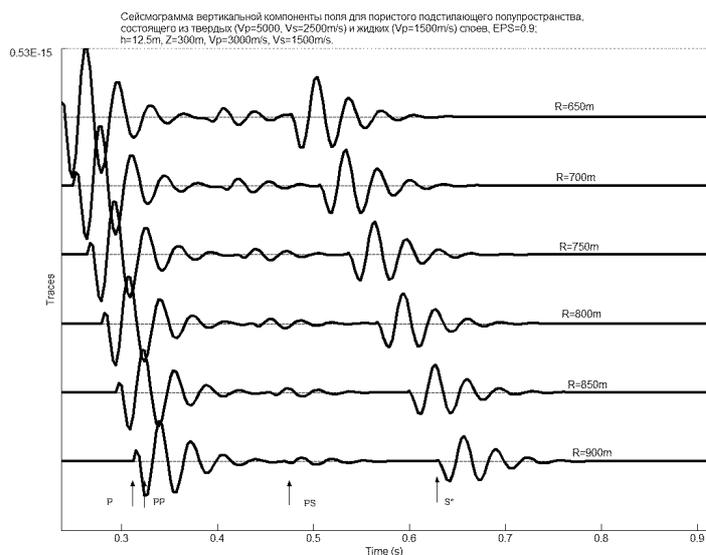


Рис. 14. Сейсмограммы волнового фронта для модели II.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. N. Albright, C. F. Pearson, M. C. Fehler, *Transmission of acoustic signals through hydraulic fractures*. — SPWLA Twenty-First Annual Logging Symposium (1980), pp. 1–18.
2. L. Aleotti, Miranda et al., *Seisbit-latest applications of seismic while drilling technology*. — EAGE 57th Conference and Technical Exhibition, Glasgow, Scotland, 1995.
3. V. M. Babich, A. P. Kiselev, *Non-geometrical waves – are there any? An asymptotic description of some “non-geometrical” phenomena in seismic wave propagation*. — Geophys. J. Int. **99** (1980), 415–420.
4. H. Bateman, A. Erdelyi, *Tables of integral transforms*. V. 1, N-Y, T, L, Mcgraw-Hill book Company, 1954.
5. L. M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*. Academic Press, New York, 1980.
6. P. F. Daley, F. Hron, *Nongeometric arrivals due to highly concentrated sources adjacent to plane interfaces*. — Bull. Seism. Soc. Amer. **73**, No. 6 (1983), 1655–1671.
7. P. R. Gutowski, F. Hron, D. E. Wagner, S. Treitel, *S**. — Amoko Technical Report,

- F82-E-8, Tulsa, Oklahoma, 1982.
8. J. Groenenboom, J. T. Fokkema, *Monitoring the width of hydraulic fractures with acoustic waves*. — *Geophysics* **63**, No. 1 (1998), 139–148.
 9. Gu. B. R. Suarez-Rivera, K. T. Nihei, L. R. Myer, *Incidence of plane waves upon a fracture*. — *J. Geophys. Res.* **101** (1996), 25337–25346.
 10. A. C. Johnston, *Air blast recognition and location using regional seismographic networks*. — *Bull. Seism. Soc. Amer.* **77**, No. 4 (1987), 1446–1456.
 11. J. Y. Kim, J. Behrens, *Experimental evidence of S^* wave*. — *Geophys. Prosp.* **34** (1986), 1000–1008.
 12. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Волны в средах с ослабленными границами*. — *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **18** (1988), 113–122.
 13. П. В. Крауклис, В. П. Крауклис, *Нелучевые явления в средах с источником, расположенным около границы*. — *Вопросы динам. теории распр. сейсм. волн* **26** (1986), 245–251.
 14. П. В. Крауклис, В. П. Крауклис, *Отражение и преломление волн на ослабленной границе*. — *Вопросы динам. теории распр. сейсм.* **30** (1990), 96–103.
 15. L. A. Molotkov, *On sources of the center of compression type in isotropic and transversally-isotropic media*. — *Probl. Dyn. Theory Seismic Wave Prop.* **25** (1986), 76–85.
 16. L. A. Molotkov, *Investigation of wave propagation in porous and fractured media on the basis of the effective models of Biot and layered media*. Nauka, St.-Peterburg (2001).
 17. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоистых однородных, изотропных упругих средах*. Наука, Москва, 1985.
 18. L. J. Pyrak-Nolte, L. R. Muer, N. G. W. Cook, *Transmission of seismic waves across single natural fractures*. — *J. Geophys. Res.* **95** (1990), 8617–8636.
 19. L. J. Pyrak-Nolte, R. Sanjit, *Monitoring fracture evolution with compressional-mode interface waves*. — *Geophys. Res. Lett.* **27** (2000), 33970–3400.
 20. J. W. III Rector, B. A. Hartage, *Radiation pattern and seismic waves generated by a working roller-cone drill bit*. — *Geophys.* **57** (1992), 1319–1333.
 21. J. W. III Rector, B. P. Marion, *The use of drill-bit energy as a downhole seismic source*. — *Geophys.* **56** (1991), 628–634.
 22. S. I. Rokhlin, Y. J. Wang, *Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids*. — *J. Acoust. Soc. Amer.* **89** (1991), 503–515.
 23. C. Salvado, J. B. Minster, *Slipping interfaces: a possible source of S radiation from explosive sources*. — *Bull. Seism. Soc. Amer.* **70** (1980), 659–670.
 24. Y. J. Wang, S. I. Rokhlin, *On transition between slip and rigid boundary conditions between two solid*. — *J. Acoust. Soc. Amer. Suppl.* **186** (1989), S93.

Krauklis A. P., Krauklis P. V., Molotkov L. A. To the problem of while production hydrocarbon reservoir monitoring.

The problem of monitoring of hydrocarbon collector boundary position while source's approaching is discussed. The day surface seismograms are

analysed. The specific properties of anomalous S^* wave are used. The case of porous medium inside reservoir is also considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: akrauklis@yandex.ru
krauklis@pdmi.ras.ru
molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 25 ноября 2009 г.