### Н. Я. Кирпичникова, Л. А. Молотков

### О СКОРОСТИ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

При распространении волн в доль свободной от напряжения поверхности упругой среды образуется волна Релея. Эта волна является поверхностной и ее интенсивность убывает по экспоненциальному закону по мере удаления от указанной поверхности. На свободной границе волна Релея, как правило, является самой интенсивной волной и опасной при землетрясении. Вследствие этого волна Релея представляет большой интерес для сейсмологии.

В случае плоской границы волна Релея распространяется с определенной скоростью  $v_R$  и не обладает дисперсией. Если же свободная поверхность является криволинейной, то волна Релея обладает дисперсией, при этом фазовая скорость при бесконечной частоте также равна  $v_R$ . Исследование скорости волны Релея в общем случае криволинейных границ было проведено асимптотическими методами в работах [1–3]. В настоящей работе проводятся дополнительные исследования скорости волны Релея в частных случаях, когда поверхности являются или цилиндрическими, или сферическими. В этих случаях для уравнений теории упругости могут быть построены точные решения (см., например, [4]) и [5], а для функций Ханкеля и Лежандра, входящих в эти решения, использованы асимптотические представления [6].

В результате в предлагаемой работе устанавливаются малые поправки к скорости волны Релея  $v_R$  в случае малой кривизны вдоль траектории волны Релея и малой кривизны в направлении, перпендикулярном к этой траектории. На основании сравнения этих поправок удается сделать предположение о фазовой скорости волны Релея в общем случае кривизны поверхности.

 $Knoue6ыe\ cnosa$ : волна Релея, криволинейные поверхности, точные решения, асимптотика, поправки на кривизну.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 08-01-00511.

Кроме того, проводятся сравнения результатов настоящей работы с выводами работ [1-3]. В случае, когда волна Релея распространяется вдоль прямой, а кривизна поверхности имеет место в направлении, перпендикулярном этой прямой, результаты полностью совпадают. В тех случаях, когда волна Релея распространяется по кривой, подходы исследований в настоящей работе и в [1-3] оказываются разными и поэтому поправки к скорости  $v_R$  получаются разными.

### §1. Волна Релея на плоской границе

Пусть в цилиндрической системе координат  $r,\, \theta,\, z$  задано однородное упругое полупространство  $z\geqslant 0$ , возбуждаемое некоторым точечным источником, расположенным в начале координат. Вне этого источника на границе z=0 отсутствуют напряжения и

$$\tau_{rz} = \tau_{zz} = 0. \tag{1.1}$$

Источник создает осесимметричное волновое поле, в котором вектор смещения

$$\vec{u}(r,z,t) = u_r(r,z,t)\vec{r}_1 + u_z(r,z,t)\vec{k}$$
(1.2)

не содержит азимутальной составляющей  $u_{\theta}$  и не зависит от координаты  $\theta$ . Согласно, например, монографии [7], составляющие смещений и напряжений представляются равенствами

$$u_{r} = -\int_{0}^{\infty} \frac{kJ_{1}(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ X(k,\eta)e^{-kz\alpha} - \beta Y(k,\eta)e^{-kz\beta} \right] e^{kt\eta} d\eta,$$

$$u_{z} = \int_{0}^{\infty} \frac{kJ_{0}(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ -\alpha X(k,\eta)e^{-kz\alpha} + Y(k,\eta)e^{-kz\beta} \right] e^{kt\eta} d\eta;$$

$$(1.3)$$

$$\tau_{rz} = -\mu \int_{0}^{\infty} \frac{k^{2} J_{1}(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left[ gX e^{-kz\alpha} - 2\alpha Y e^{-kz\beta} \right] e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{zz} = \mu \int_{0}^{\infty} \frac{k^{2} J_{0}(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left[ -2\beta X e^{-kz\alpha} + gY e^{-kz\beta} \right] e^{kt\eta} d\eta,$$
(1.4)

в которых

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_p^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_s^2}}, \quad g = 2 + \frac{\eta^2}{v_s^2}.$$
 (1.5)

 $v_p$  и  $v_s$  – скорости продольных и поперечных волн. Для однозначности радикалов  $\alpha$  и  $\beta$  проведем разрезы в левую полуплоскость из точек  $\eta=\pm iv_p,$   $\eta=\pm iv_s$  и фиксируем основной лист условиями  $\alpha>0,$   $\beta>0$  при  $\eta>0$ . На основании граничных условий (1.1) устанавливается система уравнений

$$gX - 2\alpha Y = 0,$$
  

$$-2\beta X + gY = 0.$$
(1.6)

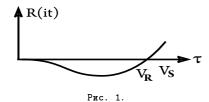
Условие ненулевого решения этой системы выражается равенством

$$g^2 - 4\alpha\beta = 0. (17)$$

Функция

$$R(\eta) = g^2 - 4\alpha\beta \tag{18}$$

представляется на мнимой оси  $\eta=i\tau$  графиком



и имеет корень  $\tau=v_R$ , который определяет скорость волны Релея на свободной границе упругого полупространства.

# §2. Волна Релея вдоль образующей цилиндрической поверхности

Пусть задан упругий цилиндр  $0\leqslant r\leqslant r_0$ , в котором распространяются волны, не содержащие составляющей смещений вдоль координаты  $\theta$  и не зависящие от координаты  $\theta$ . Будем рассматривать только

волны, образующиеся на поверхности  $r=r_0$ , и представим эти волны равенствами

$$u_{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} k e^{-ikz} dk \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} U_{r}(k, \eta) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} k^{2} e^{-ikz} dk \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} T_{rz}(k, \eta) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{rr} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} k^{2} e^{-ikz} dk \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} T_{rr}(k, \eta) e^{kt\eta} d\eta,$$
(2.1)

в которых

$$U_{r} = i\alpha X H_{1}^{(1)}(x) + Y H_{1}^{(1)}(y),$$

$$T_{rz} = i2\mu X H_{1}^{(1)}(x) + \mu g Y H_{1}^{(1)}(y),$$

$$T_{rr} = T_{rr}^{*} - \frac{2\mu U_{r}}{kr},$$

$$T_{rr}^{*} = \mu g X H_{0}^{(1)}(x) - i2\mu \beta Y H_{0}^{(1)}(y);$$

$$x = -ikr\alpha, \quad y = -ikr\beta.$$
(2.2)

Предположим, что поверхность  $r=r_0$  свободна от напряжений и на ней выполняются условия

$$\tau_{rr} = \tau_{rz} = 0. \tag{2.4}$$

Эти условия приводят к системе уравнений

$$\left[gH_0^{(1)}(x) - \frac{i2\alpha}{kr}H_1^{(1)}(x)\right]X - \left[i2\beta H_0^{(1)}(y) + \frac{2}{kr}H_1^{(1)}(y)\right]Y = 0, 
i2\alpha X H_1^{(1)}(x) + gY H_1^{(1)}(y) = 0,$$
(2.5)

ненулевое решение которой существует при условиях

$$g^{2}H_{0}^{(1)}(x_{0})H_{1}^{(1)}(y_{0}) - 4\alpha\beta H_{1}^{(1)}(x_{0})H_{0}^{(1)}(y_{0}) - \frac{i2\alpha\eta^{2}}{kr_{0}v_{s}^{2}}H_{1}^{(1)}(x_{0})H_{1}^{(1)}(y_{0}) = 0,$$
(2.6)

$$x_0 = -ikr_0\alpha, \quad y_0 = -ikr_0\beta. \tag{2.7}$$

Исследуя уравнение (2.6), полезно его заменить уравнением

$$g^{2} \frac{H_{1}^{(1)}(y_{0})}{H_{0}^{(1)}(y_{0})} - 4\alpha\beta \frac{H_{1}^{(1)}(x_{0})}{H_{0}^{(1)}(x_{0})} - \frac{i2\alpha\eta^{2}}{kr_{0}v_{s}^{2}} \frac{H_{1}^{(1)}(x_{0})}{H_{0}^{(1)}(x_{0})} \frac{H_{1}^{(1)}(y_{0})}{H_{0}^{(1)}(y_{0})} = 0$$
 (2.8)

и использовать асимптотику функций Ханкеля [6]

$$H_p^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i(z - 0.5p\pi - 0.25\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p+k+0.5)}{\Gamma(p-k+0.5)}$$
(2.9)

при  $|z|\gg 1$ . Из асимптотических формул (2.9) следует асимптотическое выражение для отношений функций Ханкеля

$$\frac{H_1^{(1,2)}(z)}{H_0^{(1,2)}(z)} = \mp i \left( 1 + \frac{i}{2z} \right). \tag{2.10}$$

С учетом формул (2.10) приходим к равенствам

$$\frac{H_1^{(1,2)}(x_0)}{H_0^{(1,2)}(x_0)} = \mp i \left(1 - \frac{1}{2kr_0\alpha}\right), \quad \frac{H_1^{(1,2)}(y_0)}{H_0^{(1,2)}(y_0)} = \mp i \left(1 - \frac{1}{2kr_0\beta}\right). \quad (2.11)$$

После подстановки выражений (2.11) в уравнение (2.8) и ряда преобразований получаем уравнение

$$R(\tau) + \frac{2\alpha\tau^2}{kr_0v_s^2} - \frac{\tau^4}{2kr_0\beta v_s^4} = 0.$$
 (2.12)

Корень уравнения (2.12) в интервале  $\tau \in [0, v_s]$  определяет с точностью до  $O(1/kr_0)$  фазовую скорость волны Релея, распространяющейся вдоль образующей цилиндрической поверхности (рис. 2).

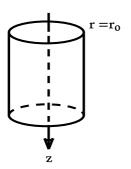


Рис. 2.

После преобразования уравнение заменяется на соотношение

$$R + \frac{\tau^2}{2\beta v_s^2 k r_0} \left( 4\alpha \beta - \frac{\tau^2}{v_s^2} \right) = 0.$$
 (2.13)

Уравнение (2.13) отличается от уравнения (1.7) наличием поправочного члена, который оказывается малым при  $kr_0\gg 1$ . Существование поправочного члена приводит к тому, что корень уравнения (1.7)  $\tau=v_R$  смещается по мнимой оси при переходе к уравнению (2.13). Чтобы учесть это смещение, полезно представить левую часть уравнения (2.13) в виде суммы первых членов ряда Тейлора в окрестности точки  $\tau=v_R$ . При этом уравнение (2.13) заменяется равенством

$$R'(v_R)(\tau - v_R) + \frac{1}{2v_s^2 k r_0} \left[ \frac{\tau^2}{\beta} \left( 4\alpha\beta - \frac{\tau^2}{v_s^2} \right) \right] \bigg|_{\tau = v_R} = 0.$$
 (2.14)

Из соотношения (2.14) следует выражение

$$\tau = v_R - \frac{1}{2v_s^2 k r_0 R'(v_R)} \left[ \frac{\tau^2}{\beta} \left( 4\alpha\beta - \frac{\tau^2}{v_s^2} \right) \right] \bigg|_{\tau = v_R}$$
 (2.15)

для корня уравнения Релея с учетом указанной поправки.

Равенство (2.15) не является однозначным, так как второй член в правой части может быть заменен равным значением другой функции при  $\tau = v_R$ . Используя указанную неоднозначность, проведем замену по формуле

$$4\alpha\beta = g^2 \tag{2.16}$$

и получим вместо равенства (2.15) соотношение

$$\tau = v_R - \frac{1}{2v_s^2 R'(v_R) k r_0} \left[ \frac{\tau^2}{\beta} \left( g^2 - \frac{\tau^2}{v_s^2} \right) \right] \bigg|_{\tau = v_R}.$$
 (2.17)

После ряда преобразований равенство (2.17) заменяется формулами

$$\tau = v_R - \frac{\beta_R v_R^2}{2v_s^2 R'(v_R) k r_0} \left( 4 - \frac{v_R^2}{v_s^2} \right), \quad \beta_R = \sqrt{1 - \frac{v_R^2}{v_s^2}} > 0$$
 (2.18)

для фазовой скорости волны Релея вдоль образующей цилиндра в случае малой кривизны.

Так как выполняются неравенства

$$R'(v_R) > 0, \quad 4 - \frac{v_R^2}{v_c^2} > 0,$$
 (2.19)

то на основании уравнения (2.18) приходим к выводу, что волна Релея вдоль образующей цилиндра распространяется с меньшей фазовой скоростью, чем в случае плоской границы. Если рассмотреть упругую среду  $r > r_0$  с цилиндрическим вырезом (рис. 2), то в равенствах (2.2), (2.5), (2.6) и (2.8) следует заменить первые функции Ханкеля на вторые. В результате поправки на кривизну в уравнениях (2.12)–(2.15), (2.17) и (2.18) изменят знаки. а фазовая скорость волны Релея выразится равенством

$$\tau = v_R + \frac{\beta_R v_R^2}{2v_s^2 k r_0 R'(v_R)} \left( 4 - \frac{v_R^2}{v_s^2} \right), \tag{2.20}$$

из которого следует, что волна Релея распространяется вдоль образующей цилиндрического выреза с бо́льшей скоростью, чем в плоском случае.

В заключение отметим, что поправки (2.17) и (2.18), связанные с кривизной поверхности в направлении, перпендикулярном траектории волны Релея, совпадают с аналогичными поправками в работах [1–3]. Такое совпадение оказалось возможным, так как в обоих случаях предполагается прямолинейное распространение волны Релея.

## §3. Волна Релея вдоль направляющей цилиндрической поверхности

Пусть задан упругий цилиндр  $r < r_0$ , в котором распространяются волны, не содержащие смещений  $u_z$  и не зависящие от координаты z. Будем рассматривать только волны, образующиеся на окружности  $r=r_0$ , и напряжения в них представим равенствами

$$\tau_{rr} = \frac{k^2}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{rr}(m,\eta,r) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{k^2}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{r\theta}(m,\eta,r) e^{kt\eta} d\eta,$$
(3.1)

в которых

$$T_{rr} = \left[\widetilde{\theta} H_m^{(1)}(x) - \frac{2\mu\varkappa}{kr} H_m^{(1)'}(x)\right] X + 2\mu M \left[\varepsilon H_m^{(1)'}(y) - \frac{1}{kr} H_m^{(1)}(y)\right] Y,$$
(3.2)

$$T_{r\theta} = 2\mu M \left[ \varkappa H_m^{(1)'}(x) - \frac{1}{kr} H_m^{(1)}(x) \right] X + \left[ \widetilde{\theta} H_m^{(1)}(y) - \frac{2\mu\varepsilon}{kr} H_m^{(1)'}(y) \right] Y.$$

В равенствах (3.1) и (3.2) используются обозначения

$$M = \frac{m}{kr}, \quad \varkappa = \frac{x}{kr} = -\frac{i\eta}{v_p}, \quad \varepsilon = \frac{y}{kr} = -\frac{i\eta}{v_s}, \quad \widetilde{\theta} = 2\mu M^2 + \rho \eta^2.$$
 (3.3)

На границе  $r=r_0$  выполняются условия

$$\tau_{rr} = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \tag{3.4}$$

которые совместно с равенствами (3.2) приводят к однородной системе уравнений. Ненулевое решение этой системы существует, если выполняется уравнение

$$\widetilde{\theta}^{2} H_{m}^{(1)}(x_{0}) H_{m}^{(1)}(y_{0}) - 4\mu^{2} M^{2} \varkappa \varepsilon H_{m}^{(1)'}(x_{0}) H_{m}^{(1)'}(y_{0}) 
- \frac{2\mu}{k r_{0}} \rho \eta^{2} \left[ \varkappa H_{m}^{(1)'}(x_{0}) H_{m}^{(1)}(y_{0}) + \varepsilon H_{m}^{(1)}(x_{0}) H_{m}^{(1)'}(y_{0}) \right] = 0.$$
(3.5)

После удовлетворения граничных условий (3.4) были проведены замены  $r \to r_0, \ x \to x_0$  и  $y \to y_0$ . Для преобразования уравнения (3.5) используем асимптотику функции Ханкеля [4]

$$H_m^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{z^2 - m^2}}} \exp\left[i\left(\sqrt{z^2 - m^2} - m \arccos\frac{m}{z} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \times \left(1 - \frac{i}{8\sqrt{z^2 - m^2}}\right)$$
(3.6)

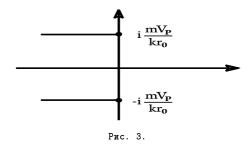
при  $z\gg 1,\, z>m,\, m>0.$  Уравнение (3.5) полезно заменить соотношением

$$\widetilde{\theta}^{2} - 4\mu^{2}M^{2} \varkappa \varepsilon \frac{H_{m}^{(1)'}(x_{0})}{H_{m}^{(1)}(x_{0})} \frac{H_{m}^{(1)'}(y_{0})}{H_{m}^{(1)}(y_{0})} - \frac{2\mu\rho\eta^{2}}{kr_{0}} \left[ \varkappa \frac{H_{m}^{(1)'}(x_{0})}{H_{m}^{(1)}(x_{0})} + \varepsilon \frac{H_{m}^{(1)'}(y_{0})}{H_{m}^{(1)}(y_{0})} \right] = 0. \quad (3.7)$$

Из равенства (3.6) следуют соотношения

$$\frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} = i \frac{\sqrt{x_0^2 - m^2}}{x_0} - \frac{x_0}{2(x_0^2 - m^2)}, 
\frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} = i \frac{\sqrt{y_0^2 - m^2}}{y_0} - \frac{y_0}{2(y_0^2 - m^2)}.$$
(3.8)

В соответствии с асимптотическими формулами (3.6), предполагается, что радикал  $\sqrt{x_0^2-m^2}>0$  на мнимой оси  $\eta=i\tau$  при  $\tau>\frac{mv_p}{kr_\theta}$ . Для униформизации радикала  $\sqrt{x_0^2-m^2}$  проведем разрезы в левую плоскость из точек ветвления  $\eta=\pm i\frac{mv_p}{kr_0}$  (см. рис. 3)



Тогда на мнимой оси основного листа между точками ветвления  $\eta=\pm i {mv_p\over kr_0}$  радикал  $\sqrt{x_0^2-m^2}$  представится равенствами

$$\sqrt{x_0^2 - m^2} = \sqrt{-\frac{k^2 r_0^2 \eta^2}{v_p^2} - m^2} = \sqrt{\frac{k^2 r_0^2 \tau^2}{v_p^2} - m^2} 
= -i\sqrt{m^2 - \frac{k^2 r_0^2 \tau^2}{v_p^2}} = -im\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{M^2 v_p^2}}.$$
(3.9)

Аналогичное равенство

$$\sqrt{y_0^2 - m^2} = -im\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{M^2 v_s^2}}$$
 (3.10)

выполняется в интервале

$$-\frac{mv_s}{kr_0} < \tau < \frac{mv_s}{kr_0}. (3.11)$$

Если ввести функции

$$\widetilde{\alpha} = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{M^2 v_p^2}}, \quad \widetilde{\beta} = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{M^2 v_s^2}},$$
(3.12)

то равенства (3.9) и (3.11) заменяются соотношениями

$$\sqrt{x_0^2 - m^2} = -im\widetilde{\alpha}, \quad \sqrt{y_0^2 - m^2} = -im\widetilde{\beta}. \tag{3.13}$$

Из равенств (3.8) и (3.13) следуют формулы

$$\varkappa \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} = M\widetilde{\alpha} - \frac{\eta^2}{2kr_0v_p^2M^2\widetilde{\alpha}^2}, 
\varepsilon \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} = M\widetilde{\beta} - \frac{\eta^2}{2kr_0v_r^2M^2\widetilde{\beta}^2},$$
(3.14)

$$\varkappa \varepsilon \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} = M^2 \widetilde{\alpha} \widetilde{\beta} - \frac{\eta^2}{2kr_0 M} \left( \frac{\widetilde{\alpha}}{v_s^2 \beta^2} + \frac{\widetilde{\beta}}{v_p^2 \alpha^2} \right), \quad (3.15)$$

$$\varkappa \frac{H_m^{(1)'}(x_0)}{H_m^{(1)}(x_0)} + \varepsilon \frac{H_m^{(1)'}(y_0)}{H_m^{(1)}(y_0)} = M(\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}). \tag{3.16}$$

Согласно обозначениям (3.3), функция  $\widetilde{\theta}$  выражается равенствами

$$\widetilde{\theta} = \mu M^2 \widetilde{g}, \quad \widetilde{g} = 2 + \frac{\eta^2}{M^2 v_s^2}.$$
 (3.17)

После подстановки формул (3.14)–(3.16) в уравнение (3.7), последнее представляется в виде

$$\mu^{2}M^{4}\widetilde{g}^{2} - 4\mu^{2}M^{4}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} + \frac{2\mu^{2}M\eta^{2}}{kr_{0}} \left( \frac{\widetilde{\alpha}}{v_{s}^{2}\widetilde{\beta}^{2}} + \frac{\widetilde{\beta}}{v_{p}^{2}\widetilde{\alpha}^{2}} \right) - \frac{2\mu^{2}M\eta^{2}}{kr_{0}v_{s}^{2}} (\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}) = 0.$$

$$(3.18)$$

Разделим левую часть уравнения (3.18) на  $\mu^2 M^4$  и рассмотрим его на мнимой оси  $\eta=i\tau$ . Эти операции позволяют заменить (3.18) на уравнение

$$\widetilde{R} + \frac{2\tau^2}{kr_0 M^3} \left( \frac{\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}}{v_s^2} - \frac{\widetilde{\alpha}}{v_s^2 \widetilde{\beta}^2} - \frac{\widetilde{\beta}}{v_p^2 \widetilde{\alpha}^2} \right) = 0, \tag{3.19}$$

где

$$\widetilde{R} = \widetilde{q}^2 - 4\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}. \tag{3.20}$$

Корень уравнений (3.18) и (3.19) определяет фазовую скорость волны Релея, распространяющейся по границе вокруг цилиндра  $r=r_0$ .

Выражения (3.1) представляют собой наложение цилиндрических волн

$$kt\tau - m\theta = \text{const},$$
 (3.21)

среди которых находится и рассматриваемая волна Релея. Из равенства (3.21) следует, что фазовая скорость волны Релея выражается равенством

$$\frac{\tau}{M} = \frac{r_0 d\theta}{dt}.\tag{3.22}$$

Поэтому величина  $\tau/M$  в уравнении (3.19) является аналогом величины  $\tau$  в уравнении (2.13).

Уравнения (2.13) и (3.19) содержат главную часть R или  $\widetilde{R}$  и поправочные члены, связанные с кривизной границы. Поправочный член в уравнении (3.19) представляется выражанием

$$\frac{2\tau^2}{mM^3} \left( \frac{\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}}{v_s^2} - \frac{\widetilde{\alpha}}{v_s^2 \widetilde{\beta}^2} - \frac{\widetilde{\beta}}{v_p^2 \widetilde{\alpha}^2} \right) \tag{3.23}$$

и обращается в нуль в случае бесконечной частоты m или бесконечного радиуса. Учитывая выражение (3.22) для скорости, полезно в уравнении (3.19) произвести замену

$$\tau/M \to \tau.$$
 (3.24)

После этой замены уравнение (3.19) представится равенством

$$R + \frac{2\tau^2}{krM} \left( \frac{\alpha + \beta}{v_s^2} - \frac{\alpha}{v_s^2 \beta^2} - \frac{\beta}{v_p^2 \alpha^2} \right) = 0.$$
 (3.25)

Полученное уравнение (3.25), как и уравнение (2.13), содержит основной член R и поправочный член, связанный с кривизной границы. Чтобы учесть влияние кривизны на фазовую скорость волны Релея, представим левую часть в виде суммы первых членов ряда Тейлора в окрестности точки  $\tau=v_R$ . В результате получим выражение

$$\tau = v_R - \frac{2}{krMR'(v_R)} \left[ \tau^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{v_s^2} - \frac{\alpha}{v_s^2 \beta^2} - \frac{\beta}{v_p^2 \alpha^2} \right) \right] \bigg|_{\tau = v_R} = 0. \quad (3.26)$$

для фазовой скорости волны Релея.

Поправочный член

$$2\tau^2 \left[ \frac{\alpha + \beta}{v_s^2} - \frac{\alpha}{v_s^2 \beta^2} - \frac{\beta}{v_p^2 \alpha^2} \right] \tag{3.27}$$

полезно представить соотношением

$$2\tau^{2} \left[ \frac{\alpha + \beta}{v_{s}^{2}} - \frac{\alpha}{v_{s}^{2}\beta^{2}} - \frac{\beta}{v_{p}^{2}\alpha^{2}} \right]$$

$$= \frac{2\tau^{4}\beta}{v_{s}^{4}} \left[ \frac{v_{s}^{2}}{v_{p}^{2}} \left( \frac{v_{p}^{2} - v_{s}^{2}}{\tau^{2}} - 1 \right) - \frac{\alpha^{3}}{\beta^{3}} \right].$$
(3.28)

Квадратная скобка в правой части равенства (3.28) с ростом  $\tau$  монотонно убывает от  $+\infty$  до  $-\infty$  в интервале  $\tau \in (0, v_s)$ . Отсюда следует, что поправочный член (3.27) имеет единственный корень  $\tau = v_0$  и является положительным при  $\tau > v_0$  и отрицательным при  $\tau < v_0$ . Фазовая скорость волны Релея больше скорости  $v_R$  в случае

$$v_R < v_0 \tag{3.29}$$

и меньше при

$$v_R > v_0. \tag{3.30}$$

Если рассматривать цилиндрический вырез  $r=r_0$  в упругой среде, то первые функции Ханкеля следует заменить на вторые, а в условиях (3.29) и (3.30), определяющих соотношение между скоростью  $v_R$  и параметром  $v_0$ , следует изменить знаки.

В заключение укажем, что поправка (3.27) не совпадает с поправкой, полученной в работах [1-3]. Это несовпадение связано с тем, что указанные поправки были получены при разных условиях. Поправка в [1-3] была выведена для отдельной точки криволинейной поверхности. При получении же поправки (3.27) строилось точное решение, описывающее волновое поле на окружности  $r=r_0$  и представленное в виде ряда Фурье, члены которого характеризуются частотами m. Применяемая асимптотика (3.6) была выведена для больших m. Таким образом, поправка при больших частотах m, естественно, отличается от поправки [1-3], выведенной без использования частоты m.

### §4. МЕРИДИОНАЛЬНАЯ ВОЛНА РЕЛЕЯ

Пусть в цилиндрической системе координат r,  $\theta$ ,  $\varphi$  задан однородный упругий шар  $r\leqslant r_0$ , возбуждаемый точечным источником, расположенным на границе в точке  $r=r_0$ ,  $\theta=0$ . Образующееся волновое поле не содержит смещения  $u_{\varphi}$  и не зависит от координаты  $\varphi$ . Вне источника на границе  $r=r_0$  отсутствуют напряжения

$$\tau_{rr} = \tau_{r\theta} = 0. \tag{4.1}$$

Согласно монографии [4], напряжения в шаре выражются формулами

$$\tau_{rr} = \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{N} P_m(\cos \theta) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} T_{rr}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{k^2}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} P_m^1(\cos \theta) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} T_{r\theta}(m, \eta, r) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$(4.2)$$

в которых

$$T_{rr} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ \widetilde{\theta} H_{p}^{(1)}(x) - \frac{4\mu\varkappa}{kr} H_{p}^{(1)'}(x) \right] X + \left[ 2\mu M \varepsilon H_{p}^{(1)'}(y) - \frac{3\mu M}{kr} H_{p}^{(1)}(y) \right] Y \right\},$$

$$T_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ 2\mu M \varkappa H_{p}^{(1)'}(x) - \frac{3\mu M}{kr} H_{p}^{(1)}(x) \right] X + \left[ \widetilde{\theta} H_{p}^{(1)}(y) - \frac{2\mu M}{kr} H_{p}^{(1)'}(y) \right] Y \right\},$$
(4.3)

 $P_m(\cos\theta)$  и  $P_m^1(\cos\theta)$  — полиномы и функции Лежандра и использованы обозначения

$$M = \frac{m}{kr}, \quad \varkappa = -\frac{i\eta}{v_p}, \quad \varepsilon = -\frac{i\eta}{v_s},$$

$$x = -ikr\eta/v_p, \quad y = -ikr\eta/v_s, \quad \widetilde{\theta} = 2\mu M^2 + \rho\eta^2,$$

$$N = m(m+1), \quad p = m+0.5.$$
(4.4)

В дальнейшем будем предполагать, что p=m, так как будут рассматриваться скорости волны Релея в высокочастотном приближении.

Из условий (4.1) и выражений (4.3) следует однородная система уравнений, ненулевое решение которой существует при выполнении уравнения

$$\widetilde{\theta}^{2} - 4\mu^{2}M^{2} \varkappa \varepsilon \frac{H_{m}^{(1)'}(x_{0})}{H_{m}^{(1)}(x_{0})} \frac{H_{m}^{(1)'}(y_{0})}{H_{m}^{(1)}(y_{0})} - \frac{2\mu\rho\eta^{2}}{kr_{0}} \left[ \varkappa \frac{H_{m}^{(1)'}(x_{0})}{H_{m}^{(1)}(x_{0})} + \varepsilon \frac{H_{m}^{(1)'}(y_{0})}{H_{m}^{(1)}(y_{0})} \right] - \frac{2\mu^{2}M^{2}\varkappa}{kr_{0}} \left( 1 + \frac{\eta^{2}}{Mv_{s}^{2}} \right) \frac{H_{m}^{(1)'}(x_{0})}{H_{m}^{(1)}(x_{0})} + \frac{2\mu^{2}M^{2}\varepsilon}{kr_{0}} \frac{H_{m}^{(1)'}(y_{0})}{H_{m}^{(1)}(y_{0})} = 0,$$

$$(4.5)$$

в котором  $r \to r_0$ ,  $x \to x_0$  и  $y \to y_0$ . Преобразуем уравнение (4.5), используя асимптотики функций Ханкеля (3.6) и (3.8), выбор ветвей радикалов  $\sqrt{x_0^2-m^2}$  и  $\sqrt{y_0^2-m^2}$ , соотношения (3.14)–(3.16) и выражение для функций (3.12), (3.17) и (3.20). В результате уравнение (4.5) заменится соотношением

$$\mu^{2}M^{4}\widetilde{g}^{2} - 4\mu^{2}M^{4}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} + \frac{2\mu^{2}M\eta^{2}}{kr_{0}} \left( \frac{\widetilde{\alpha}}{v_{s}^{2}\widetilde{\beta}^{2}} + \frac{\widetilde{\beta}}{v_{p}^{2}\widetilde{\alpha}^{2}} \right) - \frac{2\mu^{2}M\eta^{2}}{kr_{0}v_{s}^{2}} (\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta})$$
$$- \frac{2\mu^{2}M^{3}}{kr_{0}}\widetilde{\beta}^{2}\widetilde{\alpha} + \frac{2\mu^{2}M^{3}\widetilde{\beta}^{2}}{kr_{0}} = 0. \tag{4.6}$$

Разделим левую часть уравнения (4.6) на  $\mu^2 M^4$  и рассмотрим уравнение (4.6) на мнимой оси  $\eta = i\tau$ . Уравнение (4.6) перейдет в соотношение

$$\widetilde{R} + \frac{2\tau^2}{kr_0M^3} \left( \frac{\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}}{v_s^2} - \frac{\widetilde{\alpha}}{v_s^2 \widetilde{\beta}^2} - \frac{\widetilde{\beta}}{v_p^2 \widetilde{\alpha}^2} \right) - \frac{2\widetilde{\beta}}{kr_0M} (\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} - 1) = 0.$$
 (4.7)

Уравнение (4.7) содержит два поправочных члена, и эти поправки вычисляются при  $\tau=v_R$ . Используя это утверждение, произведем замену

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta} = \widetilde{g}^2/4,\tag{4.8}$$

подобную замене (2.16). После преобразования последнего члена в уравнении (4.7) приходим к соотношению

$$\widetilde{R} + \frac{2\tau^2}{kr_0 M^3} \left( \frac{\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}}{v_s^2} - \frac{\widetilde{\alpha}}{v_s^2 \widetilde{\beta}^2} - \frac{\widetilde{\beta}}{v_p^2 \widetilde{\alpha}^2} \right) + \frac{\widetilde{\beta}\tau^2}{2M^3 v_s^2 k r_0} \left( 4 - \frac{\tau^2}{M^2 v_s^2} \right) = 0. \quad (4.9)$$

Для интерпретации уравнения (4.9) используем асимптотику

$$P_m^{\mu}(\cos \theta) = \frac{1}{m^{\mu+0.5}} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\mu \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$$
 (4.10)

функций и полиномов Лежандра. Выражение (4.3) с учетом формул (4.10) представляет собой наложение сферических волн

$$kt\tau - (m+0.5)\theta = \text{const},\tag{4.11}$$

среди которых существует и волна Релея.

В области рассматриваемых высоких частот  $m+0.5 \approx m$  и скорость волны Релея представляется равенством

$$\frac{\tau}{M} = r \frac{d\theta}{dt},\tag{4.12}$$

которое совпадает с формулой (2.22). В обеих формулах величины  $\tau/M$  являются линейными скоростями криволинейного пути волны Релея. После замены

$$\tau/M \to \tau$$
 (4.13)

уравнение (4.9) переходит в равенство

$$R + \frac{2\tau^2}{kr_0M} \left( \frac{\alpha + \beta}{v_s^2} - \frac{\alpha}{v_s^2\beta^2} - \frac{\beta}{v_r^2\alpha^2} \right) + \frac{\beta\tau^2}{2Mv_s^2kr_0} \left( 4 - \frac{\tau^2}{v_s^2} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14), как и уравнения (3.26) и (2.13), определяет фазовую скорость волны Релея

$$\tau = v_{R} - \frac{2}{MR'(v_{R})kr_{0}} \left[ \tau^{2} \left( \frac{\alpha + \beta}{v_{s}^{2}} - \frac{\alpha}{v_{s}^{2}\beta^{2}} - \frac{\beta}{v_{p}^{2}\alpha^{2}} \right) \right] \Big|_{\tau = v_{R}}$$

$$- \left[ \frac{\beta \tau^{2}}{2Mv_{s}^{2}R'(v_{R})kr_{0}} \left( 4 - \frac{\tau^{2}}{v_{s}^{2}} \right) \right] \Big|_{\tau = v_{R}}$$

$$(4.15)$$

Формула (4.15) содержит две поправки. Первая из них учитывает кривизну траектории волны Релея и совпадает с поправкой в равенстве (3.26). Вторая поправка учитывает кривизну границы в направлении, перпендикулярном трассе волны Релея, и отличается только множителем 1/M от поправки (2.18). Множитель 1/M появляется в поправке в случае криволинейных трасс. Учитывая указанные поправки, можно предположить о структуре формулы для фазовой скорости волны Релея в случае криволинейной поверхности общего вида. Такая формула будет подобной формуле (4.15), при этом радиусы в обеих поправках в общем случае будут разными.

#### Литература

- 1. В. М. Бабич, О распространении волн Релея вдоль поверхности однородного упругого тела произвольной формы. ДАН СССР **137**, No. 6 (1961), 1263—1266.
- 2. В. М. Бабич, Н. Я. Русакова, О распространении волн Релея по поверхности неоднородного тела произвольной формы. ЖВМ и МФ 4 (1962), 652-665.
- V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, A new approach to the problem of the Rayleigh wave propagation along the boundary of a nonhomogeneous elastic body. — Wave Motion 40 (2004), 209-223.
- 4. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, Волны в слоистооднородных изотропных упругих средах. П. Наука, Л., 1985.
- 5. В. Г. Рекач, *Руководство к решению задач по теории упругости*. Высшая школа, М., 1977.
- 6. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений.* ГИТТЛ, М.-Л., 1951.
- 7. Л. А. Молотков, Матричный метод в теории распространения воли в слоистых упругих и жидких средах. Наука, Л., 1984.

Kirpichnikova N. Ya., Molotkov L. A. On the velocity of the Rayleigh wave propagating along curvilinear surfaces.

In order to investigate propagation of the Rayleigh waves on curvilinear boundaries, we consider wave propagation along cylindrical and spherical surfaces. For the elastic media with the indicated boundaries, we construct exact solutions of equations of the theory of elasticity and use asymptotics of Hankel and Legendre functions. On the basis of comparison of results, we make assumption about dependence of velocity of the Rayleigh wave on the small curvature of route and on the small curvature in perpendicular direction.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

 $E ext{-}mail$ : nkirp@pdmi.ras.ru molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 20 октября 2009 г.