

М. И. Белишев, А. Л. Пестов

## ПРЯМАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

### 1. ВВЕДЕНИЕ

**Задача.** В работе рассматривается начально-краевая задача для системы

$$\rho u_{tt} - (\Gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0 \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

в которой  $\rho$ ,  $\Gamma$ ,  $A$ ,  $B$  суть достаточно гладкие  $2 \times 2$  – матрицы-функции вида

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1(x) & 0 \\ 0 & \rho_2(x) \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) & 0 \\ 0 & \gamma_2(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -e(x) \\ e(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{pmatrix},$$

причем ненулевые элементы матриц  $\rho$  и  $\Gamma$  положительны и удовлетворяют условию *разделенности скоростей*

$$0 < \sqrt{\frac{\gamma_2(x)}{\rho_2(x)}} < \sqrt{\frac{\gamma_1(x)}{\rho_1(x)}} \leq \text{const}, \quad x \geq 0; \quad (4)$$

$f = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \end{pmatrix}$  – граничное управление;  $u = \begin{pmatrix} u^1(x, t) \\ u^2(x, t) \end{pmatrix}$  – решение. Система соответствует известной модели теории упругости (*балка Тимошенко*), описывающей колебания балки, в которой возможны два типа волн (мод), распространяющихся с разными скоростями. Взаимодействие мод приводит к интересным физическим эффектам и, в то же время, осложняет исследование системы.

---

*Ключевые слова* : Балка Тимошенко, обобщенные решения, главные особенности фундаментального решения, медленные волны.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00511 и НШ-8336.2006.1.

**Результаты.** В работе определяется обобщенное  $L_2$ -решение задачи (1)–(3) для управлений класса  $L_2((0, T); \mathbb{R}^2)$  и дается точное описание пространств, в которых задача оказывается корректной. Метод исследования вполне традиционный: задача сводится к системе интегральных уравнений вольтерровского типа, затем устанавливается разрешимость последней в подходящем пространстве вектор-функций<sup>1</sup>. Вводится фундаментальное решение задачи и детально исследуются его главные особенности.

**Комментарий.** Наши рассуждения подготавливают исследование динамической обратной задачи для системы (1)–(3) методом граничного управления. Известные в ней результаты относятся к случаю постоянных скоростей: в работах [3]–[6, 11] определяются матрицы-функции  $A, B$ . Задача о восстановлении переменных коэффициентов в главной части сложнее и требует более основательного изучения свойств решения прямой задачи. В последнем и состоит основная цель данной статьи.

## 2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

### 2.1. Постановка

**Балка.** Механическая модель, описывающая полубесконечную балку Тимошенко, взята из [7] (см. также [10]). Балка заполняет полуось  $x \geq 0$ ; входящие в нее физические параметры

$E$  – модуль Юнга,

$I$  – момент инерции поперечного сечения относительно оси,

$\mu$  – объемная плотность,

$G$  – постоянная Ламе (модуль сдвига),

$EI$  – изгибная жесткость,

$k$  – коэффициент сдвига,

$F$  – площадь поперечного сечения

суть *положительные* функции переменной  $x \geq 0$ . Состояние балки в момент времени  $t \geq 0$  описывается парой функций  $w(x, t), \psi(x, t)$ , где  $w$  – вертикальный прогиб балки в точке  $x$ , а  $\psi$  – угол наклона нейтральной линии, обусловленный изгибом.

<sup>1</sup>Заметим, что такой подход делает ненужным применение спектральной техники (преобразования Фурье по  $t$ ), не вполне адекватной гиперболическим задачам на конечном интервале времени.

Колебания балки в отсутствие внешних сил описываются системой

$$\begin{aligned}\mu F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGF \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] \\ \mu I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + kGF \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right),\end{aligned}$$

которая приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \mu F & 0 \\ 0 & \mu I \end{pmatrix} u_{tt} - \left[ \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & EI \end{pmatrix} u_x \right]_x + \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} 0 & e_x \\ 0 & e \end{pmatrix} u = 0$$

с  $e = kGF$  и  $u = \begin{pmatrix} w \\ \psi \end{pmatrix}$ . Как легко видеть, система (5) является частным случаем системы (1)–(3). Особенностью этого случая является соотношение  $\frac{d}{dx} A = B^* - B$ ; как можно показать, оно приводит к закону сохранения энергии в адекватной форме. В наших последующих рассмотрениях это соотношение не используется.

В рамках принятой модели, величины

$$c_1 = \sqrt{\frac{kG}{\mu}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

интерпретируются как (переменные) скорости изгибной и наклонной мод. Мы рассматриваем случай  $c_1 > c_2$ , когда изгибная мода распространяется с большей скоростью, что соответствует условию (4).

Предполагается, что в начальный момент времени балка находилась в покое:  $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$ . Колебания балки инициируются граничным источником (*управлением*)  $u|_{x=0} = f(t)$ ,  $t \geq 0$ . Решение системы  $u = u(x, t)$  описывает двухмодовую волну, распространяющуюся вдоль балки от ее конца  $x = 0$ . В силу условия  $e \neq 0$ , моды  $\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$ , составляющие волну, взаимодействуют друг с другом.

**Система (1)–(3).** В дальнейшем мы имеем дело с системой (1)–(3) и предполагаем, что входящие в нее матрицы удовлетворяют следующим условиям гладкости<sup>2</sup>:

$$\rho, \Gamma \in C_{\text{loc}}^4([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad A \in C_{\text{loc}}^3([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad B \in C_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathbb{M}^2). \quad (6)$$

<sup>2</sup>Здесь и ниже в работе,  $\mathbb{M}^2$  – множество  $2 \times 2$ -матриц, снабженное евклидовой нормой.

Напомним, что матрицы  $\rho$  и  $\Gamma$  положительно определены при всех  $x \geq 0$ . В обозначениях

$$c_\alpha := \sqrt{\frac{\gamma_\alpha}{\rho_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2$$

условие (4) принимает вид

$$c_1(x) > c_2(x), \quad x \geq 0.$$

Определим *эйконылы*

$$\tau_\alpha(x) := \int_0^x \frac{ds}{c_\alpha(s)}, \quad x \geq 0;$$

пусть

$$x_\alpha(\tau), \quad \tau \geq 0$$

суть функции, обратные к  $\tau_\alpha$ . Эйконылы определяют *характеристики* системы (1) – кривые  $\{(x, t) | t \pm \tau_\alpha(x) = \text{const}\}$ . Характеристики  $t = \tau_1(x)$  и  $t = \tau_2(x)$  мы называем быстрой и медленной соответственно (см. рис. 1), где  $X := x_1(T)$ ).

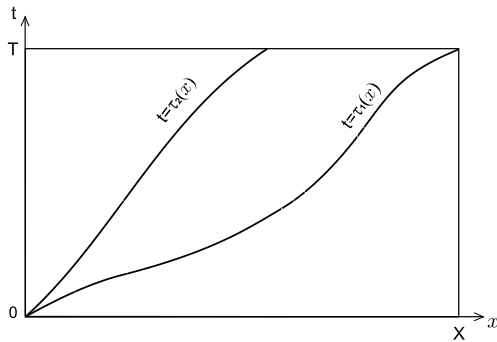


Рис. 1. Характеристики.

## 2.2. Скалярное интегральное уравнение

Рассмотрим вспомогательную задачу для скалярного волнового уравнения

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - u_{xx} &= h, & x > 0, \quad 0 < t < T \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0, & x \geq 0 \\ u|_{x=0} &= f, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где  $\rho = \rho(x) > 0$  есть функция класса  $C_{\text{loc}}^2[0, \infty)$ ,  $f = f(t)$  – граничное управление. Эйконал

$$\tau(x) := \int_0^x \sqrt{\rho(s)} ds$$

определяет семейство характеристик  $t \pm \tau(x) = \text{const}$  (см. рис. 2); через

$$x(\tau) := \int_0^\tau \frac{d\xi}{\sqrt{\rho(x(\xi))}}$$

обозначим функцию, обратную к эйконалу. Такая задача стандартным образом (с помощью замены переменных  $x \rightarrow \tau$ , формулы Даламбера и обратной замены  $\tau \rightarrow x$ )<sup>3</sup> сводится к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left( \frac{\rho(0)}{\rho(x)} \right)^{\frac{1}{4}} f(t - \tau(x)) \\ &+ \frac{1}{2\rho^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{K(x, t)} \left[ \frac{h(\xi, \eta)}{\rho^{\frac{1}{4}}(\xi)} + u(\xi, \eta) \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{1}{\rho^{\frac{1}{4}}(\xi)} \right) \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

в полуполосе  $\{(x, t) | x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ ; область интегрирования есть “трапеция”  $K(x, t)$ , ограниченная характеристиками

$$\eta + \tau(\xi) = t + \tau(x); \quad \eta - \tau(\xi) = t - \tau(x); \quad \eta + \tau(\xi) = t - \tau(x);$$

она показана на рис. 2. В записи уравнения (7) и всюду ниже в работе мы используем

<sup>3</sup>детали см., например, в [8].

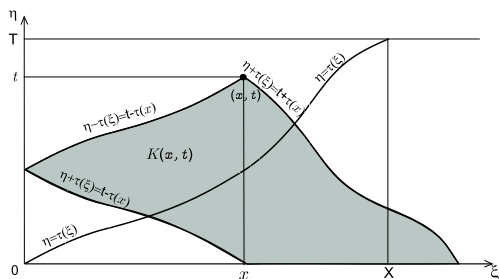


Рис. 2. Область интегрирования.

**Соглашение.** Все зависящие от времени функции полагаются доопределенными нулем при  $t < 0$ .

Соответственно, слагаемое  $f(t - \tau(x))$  в правой части понимается как функция от  $(x, t)$ , аннулирующаяся при  $t < \tau(x)$ .

Отметим существенную особенность уравнения (7): если его правая часть  $h$  аннулируется при  $t < \tau(x)$ , то и решение обладает тем же свойством. Это следует из того, что определяющий уравнение интегральный оператор не нарушает указанного свойства функций. В этом случае, при исследовании уравнения можно, вместо рассмотренной в полосе, ограничиться прямоугольником  $\{(x, t) | 0 \leq x \leq X := x(T), 0 \leq t \leq T\}$ , а интегрирование проводить по части области  $K(x, t)$ , расположенной выше характеристики  $t = \tau(x)$ .

### 2.3. Векторное интегральное уравнение

Сведем задачу (1)–(3) к интегральному уравнению. Для  $\alpha = 1, 2$  примем обозначение

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 2 \\ 2, & \text{если } \alpha = 1. \end{cases}$$

Система уравнений (1) в покомпонентной записи имеет вид:

$$\rho_\alpha u_{tt}^\alpha - \gamma_\alpha u_{xx}^\alpha - (\gamma_\alpha)_x u_x^\alpha + (-1)^\alpha \epsilon u_x^{\bar{\alpha}} + \sum_{\beta=1}^2 B_\beta^\alpha u^\beta = 0. \quad (8)$$

Для дальнейшего удобно удалить слагаемые  $(\gamma_\alpha)_x u_x^\alpha$ . Вводя новые неизвестные функции  $v^\alpha$  соотношениями

$$u^\alpha(x, t) = \left( \frac{\gamma_\alpha(0)}{\gamma_\alpha(x)} \right)^{\frac{1}{2}} v^\alpha(x, t), \quad (9)$$

после подстановки в (8) получаем систему для  $v^\alpha$ :

$$\tilde{\rho}_\alpha v_{tt}^\alpha - \tilde{\gamma}_\alpha v_{xx}^\alpha + \tilde{e}_\alpha v_x^\alpha + \sum_{\beta=1}^2 \tilde{B}_\beta^\alpha v^\beta = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\alpha &:= \rho_\alpha \left( \frac{\gamma_\alpha(0)}{\gamma_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{\gamma}_\alpha := (\gamma_\alpha(0))^{\frac{1}{2}} (\gamma_\alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{e}_\alpha := (-1)^\alpha e \left( \frac{\gamma_{\bar{\alpha}}(0)}{\gamma_{\bar{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \tilde{B}_\alpha^\alpha &:= B_\alpha^\alpha \left( \frac{\gamma_\alpha(0)}{\gamma_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} (\gamma_\alpha(0))^{\frac{1}{2}} \gamma_\alpha^{-\frac{3}{2}} (\gamma_\alpha')^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_\alpha(0)}{\gamma_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma_\alpha'', \\ \tilde{B}_{\bar{\alpha}}^\alpha &:= B_{\bar{\alpha}}^\alpha \left( \frac{\gamma_{\bar{\alpha}}(0)}{\gamma_{\bar{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (-1)^\alpha e (\gamma_{\bar{\alpha}}(0))^{\frac{1}{2}} \gamma_{\bar{\alpha}}^{-\frac{3}{2}} \gamma_{\bar{\alpha}}'. \end{aligned} \quad (10)$$

Окончательно, начально-краевая задача для  $v^\alpha$  принимает вид системы

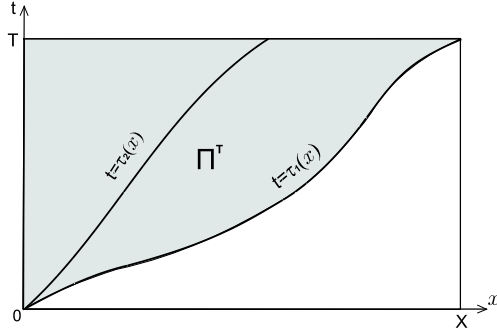
$$\begin{aligned} r_\alpha v_{tt}^\alpha - v_{xx}^\alpha &= h^\alpha, & x > 0, \quad 0 < t < T \\ v^\alpha|_{t=0} = v_t^\alpha|_{t=0} &= 0, & x \geq 0 \\ v^\alpha|_{x=0} &= f, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

в которой

$$r_\alpha := \frac{\rho_\alpha}{\gamma_\alpha} = c_\alpha^{-2}, \quad h^\alpha := -\frac{\tilde{e}_\alpha}{\tilde{\gamma}_\alpha} v_x^\alpha - \frac{1}{\tilde{\gamma}_\alpha} \sum_{\beta=1,2} \tilde{B}_\beta^\alpha v^\beta.$$

Применяя формулу (7) для каждой из компонент  $v^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , получаем систему интегральных уравнений в полуполосе  $\{(x, t) | x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ :

$$\begin{aligned} v^\alpha(x, t) &= \left( \frac{r_\alpha(0)}{r_\alpha(x)} \right)^{\frac{1}{4}} f^\alpha(t - \tau_\alpha(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2r_\alpha^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{K^\alpha(x, t)} \left[ \tilde{N}_{\bar{\alpha}} v_\xi^\alpha + \sum_{\beta=1,2} \tilde{M}_\beta^\alpha v^\beta \right] d\xi d\eta, \end{aligned}$$


 Рис. 3. Область  $\Pi^T$ .

где

$$\tilde{N}_\alpha := \frac{\tilde{e}_\alpha}{\tilde{\gamma}_\alpha r_\alpha^{\frac{1}{4}}}, \quad \tilde{M}_\alpha := \frac{\tilde{B}_\alpha}{\tilde{\gamma}_\alpha r_\alpha^{\frac{1}{4}}} - \left( \frac{1}{r_\alpha^{\frac{1}{4}}} \right)_{\xi\xi}, \quad \tilde{M}_\alpha^\alpha := \frac{\tilde{B}_\alpha^\alpha}{\tilde{\gamma}_\alpha r_\alpha^{\frac{1}{4}}}, \quad (11)$$

области интегрирования  $K^\alpha(x, t)$  ограничены характеристиками

$$\eta + \tau_\alpha(\xi) \leq t + \tau_\alpha(x); \quad \eta - \tau_\alpha(\xi) \leq t - \tau_\alpha(x); \quad \eta + \tau_\alpha(\xi) \geq t - \tau_\alpha(x)$$

и по форме аналогичны “трапеции” на рис. 2.

Далее, интегрируя по частям в слагаемых содержащих  $v_\xi^\alpha$ , имеем:

$$\int_{K^\alpha(x,t)} \tilde{N}_\alpha v_\xi^\alpha d\xi d\eta = \int_{\partial K^\alpha(x,t)} \tilde{N}_\alpha v^\alpha d\eta - \int_{K^\alpha(x,t)} \left( \tilde{N}_\alpha \right)_\xi v^\alpha d\xi d\eta,$$

где контур  $\partial K^\alpha(x, t)$  обходится в положительном направлении. В результате, приходим к системе

$$\begin{aligned} v^\alpha(x, t) &= \left( \frac{r_\alpha(0)}{r_\alpha(x)} \right)^{\frac{1}{4}} f^\alpha(t - \tau_\alpha(x)) - \frac{1}{2r_\alpha^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{\partial K^\alpha(x,t)} \tilde{N}_\alpha v^\alpha d\eta \\ &- \frac{1}{2r_\alpha^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{K^\alpha(x,t)} \left[ - \left( \tilde{N}_\alpha \right)_\xi v^\alpha + \sum_{\beta=1,2} \tilde{M}_\beta^\alpha v^\beta \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$



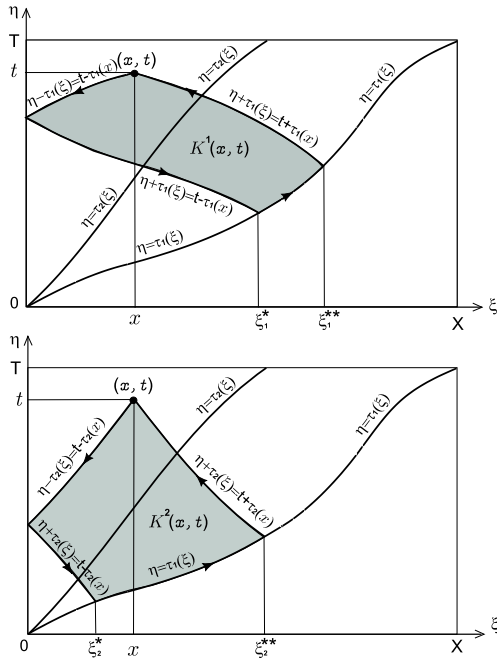


Рис. 4. Области интегрирования.

Подставляя в (12) значения коэффициентов  $\widetilde{M}_\beta^\alpha$ ,  $\widetilde{N}_\alpha$  (см. (11), (10)) и возвращаясь к компонентам вектор-функции  $u$ , получаем для последней интегральное уравнение

$$u(x, t) - (\Psi u)(x, t) = \widetilde{f}(x, t) \quad x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (13)$$

с правой частью

$$\widetilde{f}(x, t) := \begin{pmatrix} \mu_1(x) f^1(t - \tau_1(x)) \\ \mu_2(x) f^2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mu_\alpha := \left( \frac{\rho_\alpha(0) \gamma_\alpha(0)}{\rho_\alpha(x) \gamma_\alpha(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (14)$$

и интегральным оператором  $\Psi$ :

$$\Psi u := \begin{pmatrix} (\Psi u)^1 \\ (\Psi u)^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi := \partial M + M,$$

$$(\partial M u)^\alpha(x, t) := \varphi_\alpha(x) \int_{\partial K^\alpha(x, t)} N_{\bar{\alpha}} u^\alpha d\eta,$$

$$(M u)^\alpha(x, t) := \varphi_\alpha(x) \int_{K^\alpha(x, t)} \left[ \sum_{\beta=1,2} M_\beta^\alpha u^\beta \right] d\xi d\eta,$$

где

$$\varphi_\alpha := \frac{1}{2\gamma_\alpha^{\frac{1}{4}} \rho_\alpha^{\frac{1}{4}}}, \quad N_{\bar{\alpha}} := -\frac{(-1)^\alpha e}{\gamma_\alpha^{\frac{1}{4}} \rho_\alpha^{\frac{1}{4}}},$$

$$M_\alpha^\alpha := \frac{\frac{(\gamma_\alpha')^2}{4\gamma_\alpha} - B_\alpha^\alpha - \frac{\gamma_\alpha''}{2}}{\rho_\alpha^{\frac{1}{4}} \gamma_\alpha^{\frac{1}{4}}} + \left( \left( \frac{\gamma_\alpha}{\rho_\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \right)_{\xi\xi} \gamma_\alpha^{\frac{1}{2}},$$

$$M_{\bar{\alpha}}^\alpha := \frac{\frac{(-1)^\alpha e \gamma_\alpha'}{2\gamma_\alpha} - B_{\bar{\alpha}}^\alpha}{\gamma_\alpha^{\frac{1}{4}} \rho_\alpha^{\frac{1}{4}}} + \left( \frac{(-1)^\alpha e \gamma_\alpha^{-\frac{1}{2}}}{\gamma_\alpha^{\frac{1}{4}} \rho_\alpha^{\frac{1}{4}}} \right)_\xi \gamma_\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Итерируя уравнение (13) имеем:

$$(u - \tilde{f}) - \Psi(u - \tilde{f}) = \Psi \tilde{f}.$$

Для функции  $w := u - \tilde{f}$  получаем уравнение

$$w - \Psi w = \Psi \tilde{f}, \tag{15}$$

которое тоже используется в работе.

#### 2.4. Оператор $\Psi$

Разрешимость уравнений (13) и (15) определяется свойствами оператора  $\Psi$ , устанавливаемыми в этом разделе. Оба они суть уравнения в полуполосе  $\{(x, t) | x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ , но следующее наблюдение<sup>4</sup> позволяет свести их к уравнениям в прямоугольнике

<sup>4</sup>оно вполне аналогично тому, что отмечалось в конце п. 2.2 в скалярном случае

$\{(x, t) \mid 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$  (здесь  $X := x_1(T)$ ): правая часть  $\tilde{f}$  аннулируется ниже быстрой характеристики  $t = \tau_1(x)$ <sup>5</sup>, а оператор не нарушает этого свойства вектор-функций. Иными словами, включение  $\text{supp } y \subset \Pi^T$ , где

$$\Pi^T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq X, \tau_1(x) \leq t \leq T\},$$

влечет  $\text{supp } \Psi y \subset \Pi^T$ , что легко усматривается из определений операторов  $M$  и  $\partial M$ , составляющих  $\Psi$ . При этом интегрирование в (12) фактически сведется к интегрированию по частям областей  $K^\alpha$ , попадающим в  $\Pi^T$  (на рис. 4 затенены). Для этих частей мы сохраняем обозначения  $K^\alpha$ , что не ведет к недоразумениям.

Введем пространство управлений  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  с нормой

$$\|f\|_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)} = \left[ \int_0^T \left[ (f^1(x))^2 + (f^2(x))^2 \right] dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

и пространство вектор-функций  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ , заданных и непрерывных в прямоугольнике  $\{(x, t) \mid 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$  и аннулирующихся при  $t \leq \tau_1(x)$ , с нормой

$$\|y\|_{C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)} = \max_{\alpha=1,2} \|y^\alpha\|_{C(\Pi^T)} = \max_{\alpha=1,2} \max_{(x,t) \in \Pi^T} |y^\alpha(x, t)|.$$

**Теорема 1.** *Отображение  $f \mapsto \Psi \tilde{f}$  непрерывно из  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

**Доказательство.** Доказательство состоит из двух лемм, в которых устанавливается непрерывность операторов  $M$  и  $\partial M$ , составляющих  $\Psi$ .

**Лемма 1.** *Отображение  $f \mapsto \partial M \tilde{f}$  непрерывно из  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

**Доказательство.** Непрерывность компонент образа

$$\left( \partial M \tilde{f} \right)^\alpha(x, t) = \varphi_\alpha(x) \int_{\partial K^\alpha(x, t)} N_{\bar{\alpha}} \tilde{f}^{\bar{\alpha}} d\eta$$

<sup>5</sup>Напомним Соглашение, принятое в 2.1.

в  $\Pi^T$  видна из того, что все участки контура интегрирования  $\partial K^\alpha$  (которые суть характеристики  $t \pm \tau_\alpha(x) = \text{const}$ ) трансверсальны линиям уровня подынтегральной функции  $\tilde{f}^\alpha$  (характеристикам  $t - \tau_\alpha(x) = \text{const}$ )<sup>6</sup>. К примеру, рассмотрим интеграл по верхнему левому участку контура  $\partial K^1(x, t)$  (характеристике  $\eta - \tau_1(\xi) = t - \tau_1(x)$  на рис. 4), входящий в выражение для  $(\partial M \tilde{f})^1(x, t)$ . Параметризуя этот участок переменной  $s = \eta - \tau_2(x_1(\eta - t + \tau_1(x)))$ <sup>7</sup> и проводя подходящие замены, можно преобразовать интеграл к форме

$$\int_{t-\tau_2(x)}^{t-\tau_1(x)} \zeta(s, t, x) f^2(s) ds \quad (16)$$

с непрерывной функцией  $\zeta$ , определяемой коэффициентами уравнения балки и их производными. Из такого представления, с учетом суммируемости  $f^2$ , непрерывность интеграла по  $x, t$  следует с очевидностью. Вполне аналогично рассматриваются интегралы по остальным участкам  $\partial K^1(x, t)$ , затем так же устанавливается непрерывность компоненты  $(\partial M \tilde{f})^2$ , выражающейся через интеграл по  $\partial K^2(x, t)$  (см. рис. 4).

Как нетрудно видеть, та же трансверсальность приводит к непрерывности компонент  $(\partial M \tilde{f})^\alpha(x, t)$  при переходе точки  $(x, t)$  через быструю характеристику  $t = \tau_1(x)$ . В результате компоненты оказываются непрерывными во всем прямоугольнике

$$\{(x, t) \mid 0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к интегралам вида (16), нетрудно прийти к оценке

$$\left\| \partial M \tilde{f} \right\|_{C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)} \leq C(T) \|f\|_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)},$$

в которой  $C(T)$  – постоянная, определяемая временем  $T$ , элементами матриц  $\rho, \Gamma, A, B$  и их производными.  $\square$

<sup>6</sup>Замена (9), удаляющая производные  $u_x^\alpha$  из (8), производилась с целью обеспечить такую трансверсальность.

<sup>7</sup>Это соотношение между  $s$  и  $\eta$  возникает, если исключить  $\xi$  из уравнений характеристик  $\eta - \tau_1(\xi) = t - \tau_1(x)$  и  $\eta - \tau_2(\xi) = s$ .

**Лемма 2.** *Отображение  $f \mapsto M\tilde{f}$  непрерывно из  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

**Доказательство.** Напомним, что

$$(M\tilde{f})^\alpha(x, t) = \varphi_\alpha(x) \int_{K^\alpha(x, t)} \sum_{\beta=1,2} M_\beta^\alpha(\xi) \mu_\beta(\xi) f^\beta(\eta - \tau_\beta(\xi)) d\xi d\eta,$$

где  $\varphi_\alpha, \mu_\beta \in C_{\text{loc}}^4([0, \infty))$ ,  $M_\beta^\alpha \in C_{\text{loc}}^2([0, \infty))$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Интеграл приводится к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_\alpha^{**}(x, t)} d\xi \left( M_1^\alpha(\xi) \mu_1(\xi) \int_{a_\alpha(\xi, x, t)}^{b_\alpha(\xi, x, t)} f^1(\eta - \tau_1(\xi)) d\eta \right) \\ & + \int_0^{\xi_\alpha^{**}(x, t)} d\xi \left( M_2^\alpha(\xi) \mu_2(\xi) \int_{a_\alpha(\xi, x, t)}^{b_\alpha(\xi, x, t)} f^2(\eta - \tau_2(\xi)) d\eta \right) \\ = & \int_0^{\xi_\alpha^{**}(x, t)} d\xi \left( M_1^\alpha(\xi) \mu_1(\xi) \int_{a_\alpha(\xi, x, t) - \tau_1(\xi)}^{b_\alpha(\xi, x, t) - \tau_1(\xi)} f^1(s) ds \right) \\ & + \int_0^{\xi_\alpha^{**}(x, t)} d\xi \left( M_2^\alpha(\xi) \mu_2(\xi) \int_{a_\alpha(\xi, x, t) - \tau_2(\xi)}^{b_\alpha(\xi, x, t) - \tau_2(\xi)} f^2(s) ds \right), \end{aligned}$$

где  $\xi_\alpha^{**}(x, t)$  есть  $\xi$ -координата точки пересечения быстрой характеристики  $t = \tau_1(x)$  и характеристики  $\eta + \tau_\alpha(\xi) = t + \tau_\alpha(x)$ ,  $a_\alpha(\xi, x, t), b_\alpha(\xi, x, t)$  суть  $\eta$ -координаты нижнего и верхнего концов вертикального сечения области  $K^\alpha(x, t)$  в точке  $\xi$ . Поскольку функции  $a_\alpha, b_\alpha, \tau_\alpha$  непрерывны по всем своим переменным, интегралы  $\int_{a_\alpha(\xi, x, t) - \tau_\beta(\xi)}^{b_\alpha(\xi, x, t) - \tau_\beta(\xi)} f^\alpha(s) ds$  непрерывно зависят от  $x, t, \xi$ . Отсюда легко сле-

дуют включение  $(M\tilde{f})^\alpha \in C(\Pi^T)$  и оценка

$$\|M\tilde{f}\|_{C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)} \leq \tilde{C}(T) \|f\|_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)},$$

с постоянной  $\tilde{C}(T)$ , определяемой временем  $T$ , элементами матриц  $\rho, \Gamma, A, B$  и их производными.  $\square$

Объединяя результаты лемм, приходим к утверждению теоремы 1.  $\square$

Как следствие теоремы, для правой части уравнения (15) имеем включение  $\Psi \tilde{f} \in C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .

### 2.5. Разрешимость в $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$

Здесь мы установим, что итерированное уравнение (15) корректно разрешимо в пространстве  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .

Введем семейство подобластей

$$\Pi^\eta := \{(x, t) \mid 0 \leq \tau_1(x) \leq t, \quad 0 \leq t \leq \eta\}, \quad 0 \leq \eta \leq T$$

и снабдим пространство  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  семейством полунорм:

$$\|y\|_\eta = \max_{\alpha=1,2} \sup_{(x,t) \in \Pi^\eta} |y^\alpha(x, t)|, \quad 0 < \eta \leq T.$$

Заметим, что  $\|\cdot\|_T$  совпадает с нормой в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .

**Лемма 3.** *Оператор  $\Pi - \partial M$  ограниченно обратим в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

**Доказательство.** То, что оператор  $\partial M$  определен на всем  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  и непрерывен, легко усматривается из его определения.

Покажем, что справедлива оценка

$$\|\partial M y\|_t \leq C \int_0^t \|y\|_\eta \, d\eta$$

с постоянной  $C$ , не зависящей от  $t$ . Из очевидного неравенства

$$|y^\alpha(\xi, \eta)| \leq \max_{\alpha=1,2} \sup_{(x,t) \in \Pi^\eta} |y^\alpha(x, t)| = \|y\|_\eta, \quad \alpha = 1, 2$$

имеем:

$$|(\partial M y)^\alpha(x, s)| \leq \lambda \int_{\partial K^\alpha(x, s)} |y^\alpha(\xi, \eta)| \, d\eta \leq C \int_0^s \|y\|_\eta \, d\eta,$$

где

$$\lambda := \max_{\alpha=1,2} \max_{x \in [0,X]} |\varphi_\alpha(x) N_{\bar{\alpha}}(x) \mu_{\bar{\alpha}}(x)|,$$

откуда легко следует (17).

Далее, итерируя оценку (17), имеем:

$$\|(\partial M)^n y\|_T \leq C^n \int_0^T d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \|y\|_T \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|y\|_T$$

откуда

$$\|(\partial M)^n\| \leq \frac{C^n T^n}{n!}.$$

Отсюда следуют существование оператора  $(\mathbb{I} - \partial M)^{-1}$  и его представление  $(\mathbb{I} - \partial M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\partial M)^n$  в виде ряда Неймана, сходящегося по операторной норме<sup>8</sup>.  $\square$

Вполне аналогично устанавливается следующий результат, доказательство которого мы опускаем.

**Лемма 4.** *Оператор  $M$  действует непрерывно в пространстве  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  и справедлива оценка:*

$$\|My\|_t \leq C \int_0^t \|y\|_\eta d\eta.$$

Комбинируя результаты лемм, нетрудно придти к оценке

$$\|(\mathbb{I} - \partial M)^{-1} My\|_t \leq C \int_0^t \|y\|_\eta d\eta,$$

из которой следует ограниченная обратимость оператора

$$\mathbb{I} - (\mathbb{I} - \partial M)^{-1} M.$$

Из последней вытекает

---

<sup>8</sup>Прием получения вольтеровских оценок с использованием монотонного семейства полуноrm заимствован из книги Л. П. Нижника [9].

**Теорема 2.** Уравнение  $w - \Psi w = h$  однозначно разрешимо в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  при любой правой части.

**Доказательство.** Утверждение становится очевидным, если записать уравнение в эквивалентной форме  $[\mathbb{I} - (\mathbb{I} - \partial M)^{-1} M] w = (\mathbb{I} - \partial M)^{-1} h$ .  $\square$

### 2.6. Обобщенное решение

Возвращаясь к исходному интегральному уравнению (13) и итерированному уравнению (15), примем

**Определение 1.** Обобщенным решением задачи (1)–(3) с граничным управлением  $f \in L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  мы называем функцию  $u^f := \tilde{f} + w$ , где  $w$  есть решение уравнения (15).

В компонентах это решение имеет вид

$$(u^f(x, t))^\alpha = \left( \frac{\rho_\alpha(0) \gamma_\alpha(0)}{\rho_\alpha \gamma_\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} f^\alpha(t - \tau_\alpha(x)) + w^\alpha(x, t), \quad \alpha = 1, 2.$$

Существование и единственность обобщенного решения установлены предыдущими рассмотрениями. При разрывном управлении  $f$ , в силу  $w \in C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ , решение  $u^f$  и функция  $f$  имеют одни и те же разрывы, локализованные на соответствующих характеристиках.

Ниже в работе, мы называем  $u^f$  решением задачи (1)–(3), опуская термин “обобщенное”.

## 3. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

### 3.1. Лучевой метод (анзац)

Рассмотрим матричную начально-краевую задачу

$$\rho U_{tt} - (\Gamma U_x)_x + AU_x + BU = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T \quad (18)$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0 \quad (19)$$

$$U|_{x=0} = \delta(t)E, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (20)$$

в которой  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $E$  – единичная  $2 \times 2$ -матрица. Решение  $U$  называется (матричным) *фундаментальным решением* исходной системы (1)–(3); наша цель в п. 3 – дать его корректное



определение. Это будет сделано после формальных рассуждений, которые мы проведем по стандартной схеме лучевого метода (см. например, [1]).

Обозначим

$$\theta(t) := \int_{-\infty}^t \delta(s) ds = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sign} t], \quad \varepsilon(t) := \int_{-\infty}^t \theta(s) ds = t\theta(t)$$

и будем искать решение в виде разложения по гладкости “анзац + невязка”:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \mathcal{A}(x, t) + \tilde{U}(x, t) \\ &= a(x) \delta(t - \tau_1(x)) + b(x) \theta(t - \tau_1(x)) + c(x) \varepsilon(t - \tau_1(x)) \\ &\quad + \alpha(x) \delta(t - \tau_2(x)) + \beta(x) \theta(t - \tau_2(x)) + \varkappa(x) \varepsilon(t - \tau_2(x)) \\ &\quad + \tilde{U}(x, t), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $a, b, c, \alpha, \beta, \varkappa$  суть матрицы-функции, подлежащие определению. Обозначим

$$\delta(t - \tau_\alpha(x)) =: \delta_\alpha, \quad \theta(t - \tau_\alpha(x)) =: \theta_\alpha, \quad \varepsilon(t - \tau_\alpha(x)) =: \varepsilon_\alpha \quad \alpha = 1, 2.$$

Подставляя разложение (21) в уравнение (18), получаем<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 a \delta_1'' + [I_1 b + D_1 a] \delta_1' + [I_1 c + D_1 b + L a] \delta_1 + [D_1 c + L b] \theta_1 + [L c] \varepsilon_1 \\ &\quad + I_2 \alpha \delta_2'' + [I_2 \beta + D_2 \alpha] \delta_2' + [I_2 \varkappa + D_2 \beta + L \alpha] \delta_2 + [D_2 \varkappa + L \beta] \theta_2 + [L \varkappa] \varepsilon_2 \\ &\quad + \rho \tilde{U}_{tt} + L \tilde{U}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} I_\alpha &:= \left[ \rho - (\tau_\alpha')^2 \Gamma \right], \quad D_\alpha := 2\tau_\alpha' \Gamma \frac{d}{dx} + \tau_\alpha'' \Gamma + \tau_\alpha' \Gamma' - \tau_\alpha' A, \\ L &:= -\frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d}{dx} \right) + A \frac{d}{dx} + B. \end{aligned}$$

Из начально-краевых условий следуют равенства

$$a(0) + \alpha(0) = E, \quad b(0) + \beta(0) = 0, \quad c(0) + \gamma(0) = 0. \quad (23)$$

<sup>9</sup>Ниже штрихом обозначены производные функций одной переменной по этой переменной.

Приравнивая нулю коэффициенты при  $\delta_1''$ ,  $\delta_1'$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2''$ ,  $\delta_2'$ ,  $\delta_2$ , получим обыкновенные дифференциальные уравнения<sup>10</sup> для элементов матриц  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varkappa$ . Решая их с учетом начальных условий (23), после весьма громоздких вычислений найдем:

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{pmatrix} \left[ \frac{\rho_1(0)\gamma_1(0)}{\rho_1(x)\gamma_1(x)} \right]^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left[ \frac{\rho_2(0)\gamma_2(0)}{\rho_2(x)\gamma_2(x)} \right]^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \\
 b &= \begin{pmatrix} \int_0^x \left[ \frac{\rho_1(s)\gamma_1(s)}{\rho_1(x)\gamma_1(x)} \right]^{\frac{1}{4}} y(s) ds & \frac{\rho_1^{\frac{1}{4}}\gamma_1^{\frac{1}{4}}\rho_2^{\frac{1}{2}}\gamma_2^{\frac{1}{2}}(-e)}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2} (0) \rho_1^{-\frac{1}{4}}\gamma_1^{-\frac{1}{4}} \\ \left[ \rho_1(0)\gamma_1(0) \right]^{\frac{1}{4}} \frac{\rho_1^{\frac{1}{4}}\gamma_1^{\frac{1}{4}}e}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2} & 0 \end{pmatrix}, \\
 \beta &= \begin{pmatrix} 0 & -\left[ \rho_2(0)\gamma_2(0) \right]^{\frac{1}{4}} \frac{\rho_2^{\frac{1}{4}}\gamma_2^{\frac{1}{4}}(-e)}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2} \\ -\frac{\rho_2^{\frac{1}{4}}\gamma_2^{\frac{1}{4}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\gamma_1^{\frac{1}{2}}e}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2} (0) \rho_2^{-\frac{1}{4}}\gamma_2^{-\frac{1}{4}} & \int_0^x \left[ \frac{\rho_2(s)\gamma_2(s)}{\rho_2(x)\gamma_2(x)} \right]^{\frac{1}{4}} g(s) ds \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 g &:= \frac{\tau_2'e\beta_{12} + \gamma_2'\alpha_{22} + \gamma_2\alpha_{22}'' - B_{22}\alpha_{22}}{2\tau_2'\gamma_2}, \\
 y &:= \frac{\tau_1'(-e)b_{21} + \gamma_1\alpha_{11}'' + \gamma_1'\alpha_{11}' - B_{11}\alpha_{11}}{2\tau_1'\gamma_1}.
 \end{aligned}$$

Также определяются элементы нижней строки матрицы  $c$ :

$$\begin{aligned}
 c_{21} &= -\frac{2\tau_1'\gamma_2b_{21}' - \tau_1'eb_{11} + (\tau_1'\gamma_2' + \tau_1''\gamma_2)b_{21} + ea_{11}' + B_{21}\alpha_{11}}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2}\gamma_1, \\
 c_{22} &= \frac{\rho_1^{\frac{1}{4}}\gamma_1^{\frac{1}{4}}e}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2} \left( \frac{\rho_1^{\frac{1}{4}}\gamma_1^{\frac{1}{4}}\rho_2^{\frac{1}{2}}\gamma_2^{\frac{1}{2}}(-e)}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2} (0) \right)
 \end{aligned}$$

и элементы верхней строки матрицы  $\varkappa$ :

$$\begin{aligned}
 \varkappa_{11} &= \left( \frac{\rho_2^{\frac{1}{4}}\gamma_2^{\frac{1}{4}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\gamma_1^{\frac{1}{2}}e}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2} (0) \right) \frac{\rho_2^{\frac{1}{4}}\gamma_2^{\frac{1}{4}}(-e)}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2}, \\
 \varkappa_{12} &= \frac{2\tau_2'\gamma_1\beta_{12}' + (\tau_2'\gamma_1' + \tau_2''\gamma_1)\beta_{12} - \tau_2'(-e)\beta_{22} + (-e)\alpha_{22}' + B_{12}\alpha_{22}}{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2}\gamma_2.
 \end{aligned}$$

<sup>10</sup> так называемые уравнения переноса

Для определения остальных элементов этих матриц используется следующий прием. Добавляя в анзац разложения (21) очередные члены с  $\int_{-\infty}^t \varepsilon_\alpha(s) ds$  и решая дополнительные уравнения переноса, найдем:

$$c_{11} = \mu_1(x) \left( \int_0^x \frac{d_1(s)}{\mu_1(s)} ds - \varkappa_{11}(0) \right),$$

$$c_{12} = \mu_1(x) \left( \int_0^x \frac{d_2(s)}{\mu_1(s)} ds - \varkappa_{12}(0) \right),$$

где

$$d_1 := \frac{\tau_1'(-e)c_{21} + \gamma_1 b_{11}'' + \gamma_1' b_{11}' - (-e)b_{21}' - B_{11}b_{11} - B_{12}b_{21}}{2\tau_1'\gamma_1},$$

$$d_2 = \frac{\tau_1'(-e)c_{22} + \gamma_1 b_{12}'' + \gamma_1' b_{12}' - B_{11}b_{12}}{2\tau_1'\gamma_1}.$$

и

$$\varkappa_{21} = \mu_2(x) \left( \int_0^x \frac{\tilde{d}_1(s)}{\mu_2(s)} ds - c_{21}(0) \right),$$

$$\varkappa_{22} = \mu_2(x) \left( \int_0^x \frac{\tilde{d}_2(s)}{\mu_2(s)} ds - c_{22}(0) \right),$$

где

$$\tilde{d}_1 = \frac{\tau_2' e \varkappa_{11} + \gamma_2 \beta_{21}'' + \gamma_2' \beta_{21}' - e \beta_{12}' - B_{22} \beta_{21}}{2\tau_2' \gamma_2}$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{\tau_2' e \varkappa_{12} + \gamma_2 \beta_{22}'' + \gamma_2' \beta_{22}' - e \beta_{12}' - B_{21} \beta_{12} - B_{22} \beta_{12}}{2\tau_2' \gamma_2}$$

Тем самым, анзац  $\mathcal{A}$  полностью определен. Из принятых нами предположений о гладкости (6) легко видеть, что

$$a, \alpha \in C_{\text{loc}}^4([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad b, \beta \in C_{\text{loc}}^3([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad c, \varkappa \in C_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathbb{M}^2).$$

### 3.2. Лучевой метод (невязка)

Определив анзац, вернемся к соотношению (22) и впишем в него коэффициенты

$$P = -(D_1 c + Lb), \quad Q = -(D_2 \varkappa + L\beta)$$

при  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно, причем, как показывают вычисления, их структура оказывается следующей:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Теперь в равенстве (22) аннулируются все члены меньшей гладкости, нежели слагаемые, содержащие  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно невязки

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{11}(x, t) & \tilde{U}_{12}(x, t) \\ \tilde{U}_{21}(x, t) & \tilde{U}_{22}(x, t) \end{pmatrix},$$

для которой, с учетом условий (19), (20) пролучаем задачу

$$\rho \tilde{U}_{tt} - \left( \Gamma \tilde{U}_x \right)_x + A \tilde{U}_x + B \tilde{U} = H, \quad x > 0, \quad 0 < t < T \quad (25)$$

$$\tilde{U}|_{t=0} = \tilde{U}_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0 \quad (26)$$

$$\tilde{U}|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (27)$$

где

$$H := P\theta_1 + Q\theta_2 - [Lc]\varepsilon_1 - [L\varkappa]\varepsilon_2$$

есть матрица-функция от  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ , непрерывная вне характеристик  $t = \tau_\alpha(x)$  и аннулирующаяся при  $t < \tau_1(x)$ . При этом на самих характеристиках непрерывность, вообще говоря, нарушается и элементы  $H$  могут иметь скачки.

Теми же приемами, с помощью которых система (1)–(3) сводилась к уравнению (13), задача (25)–(27) сводится к матричному интегральному уравнению для невязки. Опуская подробности, приведем его окончательный вид:

$$\tilde{U} - \Psi \tilde{U} = S, \quad (28)$$

где  $S$  – матрица-функция с элементами

$$S_{\alpha\beta}(x, t) = \varphi_\alpha(x) \int_{K^\alpha(x, t)} G_{\alpha\beta}(\xi) \theta(\eta - \tau_\alpha(\xi)) d\xi d\eta$$

и

$$G = \begin{pmatrix} \varphi_1(Q_{11} - (L\mathcal{K})_{11}) & \varphi_1(Q_{12} - (L\mathcal{K})_{12}) \\ \varphi_2(P_{21} - (Lc)_{21}) & \varphi_2(P_{22} - (Lc)_{22}) \end{pmatrix} \in C_{\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}^2).$$

Разрешимость уравнения (28) устанавливается теми же средствами, которые использовались при исследовании уравнения (13). Изменения сводятся к тому, что теперь уравнение рассматривается в пространстве  $C^1(\Pi^T; \mathbb{M}^2)$ , в котором вводится соответствующее семейство полунорм. Опуская весьма громоздкое доказательство, отметим существенный факт, на который оно опирается. Правая часть  $S$  в (28) оказывается непрерывно дифференцируемой при  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ , причем такая гладкость обеспечивается специальной структурой матриц  $P$  и  $Q$ , а именно, наличием в них нулевых строк (см. (24)).

На том же пути исследуется гладкость решения  $\tilde{U}$  вне характеристик. С этой целью оно разбивается в сумму

$$\tilde{U} = \tilde{U}^{(1)} + \tilde{U}^{(2)} := \theta(t - \tau_2(x))\tilde{U} + [\theta(t - \tau_1(x)) - \theta(t - \tau_2(x))]\tilde{U},$$

затем рассматривается пространство пар вида  $\{\tilde{U}^{(1)}, \tilde{U}^{(2)}\}$  с адекватной  $C^2$ -нормой и семейством полунорм. Легко проверяется, что пара  $\{S^{(1)}, S^{(2)}\}$ , соответствующая правой части уравнения (28), является элементом этого пространства; в нем же устанавливается разрешимость. Приведем итоговый результат: справедлива

**Лемма 5.** Уравнение (28) имеет единственное решение  $\tilde{U}$ , непрерывно дифференцируемое при  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$  и аннулирующееся при  $t \leq \tau_1(x)$ ; при этом выполнено  $\tilde{U}|_{x=0} = 0$  и решение  $\tilde{U}$  дважды непрерывно дифференцируемо вне характеристик.

Условимся под решением задачи (25)–(27) для невязки понимать решение  $\tilde{U}$  интегрального уравнения (28).

### 3.3. Решение $U$

Проведенные выше рассмотрения мотивируют и делают корректным

**Определение 2.** Фундаментальным решением задачи (1)–(3) называется обобщенная матрица-функция  $U(x, t)$ , определяемая правой частью (21), в которой коэффициенты анзаца  $\mathcal{A}$  определены лучевым методом, а  $\tilde{U}$  есть решение задачи (25)–(27) (уравнения (28)).

В силу  $C^1$ -гладкости невязки, решение  $U$  и анзац  $\mathcal{A}$  имеют одинаковые сингулярности, разрывы и разрывы первых производных. На

рис. 5 показаны типичные профили элементов фундаментального решения; отметим некоторые особенности их формы.

- Столбец  $\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}$  описывает волну, отвечающую управлению  $\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$ . Оно возбуждает быструю моду, распространяющуюся со скоростью  $c_1$  в первом канале. При этом, из-за взаимодействия мод, во втором канале появляется индуцированное возмущение (т.н. “предвестник”: см. затененную часть профиля  $U_{21}$ ), которое распространяется с быстрой скоростью  $c_1$ .
- Столбец  $\begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix}$  отвечает управлению  $\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$ , возбуждающему медленную моду во втором канале. Одновременно, вследствие взаимодействия, возбуждается первый канал. Возникшее в нем возмущение обгоняет медленную моду и, в свою очередь, приводит к появлению предвестника во втором канале (см. затененную часть профиля  $U_{22}$ ).

Таким образом, в общей ситуации вся волна оказывается смесью быстрой и медленной мод, распространяющейся с быстрой скоростью  $c_1$ .

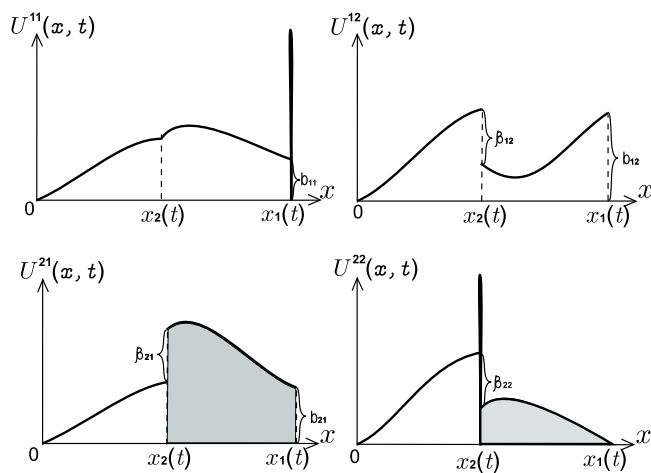


Рис. 5. Структура фундаментального решения.

В дополнение приведем фундаментальное решение в частном случае, когда матрица  $\rho$  постоянна, а  $\Gamma$  есть единичная матрица. При

этом вид эйконалов упрощается:  $\tau_\alpha = \frac{x}{c_\alpha}$  и мы имеем представление

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \begin{pmatrix} \delta\left(t - \frac{x}{c_1}\right) & 0 \\ 0 & \delta\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{\rho_1}} \int_0^x \left( \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} e^2(s) + B_{11}(s) \right) ds & -\frac{\sqrt{\rho_2}}{\rho_2 - \rho_1} e(0) \\ \frac{\sqrt{\rho_1}}{\rho_2 - \rho_1} e(x) & 0 \end{pmatrix} \theta\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\rho_2}}{\rho_2 - \rho_1} e(x) \\ -\frac{\sqrt{\rho_1}}{\rho_2 - \rho_1} e(0) & \frac{1}{2\sqrt{\rho_2}} \int_0^x \left( \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} e^2(s) - B_{22}(s) \right) ds \end{pmatrix} \theta\left(t - \frac{x}{c_2}\right) + \dots,
\end{aligned}$$

в котором опущены более гладкие члены.

Связь между фундаментальным решением и решением системы (1)–(3) дается известной формулой Дюамеля

$$u^f(x, t) = [U(x, \cdot) * f](t), \quad x \geq 0, t \geq 0 \quad (29)$$

являющейся следствием линейности системы и независимости коэффициентов уравнения (1) от времени. Существование свертки и равенство в (29) устанавливаются стандартными методами. Удерживая в анзаце фундаментального решения только сингулярные члены, из (29), с учетом структуры матриц  $a$  и  $\alpha$ , получаем представление

$$\begin{aligned}
u^f(x, t) &= [(a\delta_1 + \alpha\delta_2 + W) * f](t) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(x)f^1(t - \tau_1(x)) \\ \alpha_{22}(x)f^2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_0^t W(x, t-s) f(s) ds = \langle \text{see (14)} \rangle \\
&= \begin{pmatrix} \mu_1(x)f^1(t - \tau_1(x)) \\ \mu_2(x)f^2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_{\tau_1(x)}^t \begin{pmatrix} W_{11}(x, s) & W_{12}(x, s) \\ W_{21}(x, s) & W_{22}(x, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1(t-s) \\ f^2(t-s) \end{pmatrix} ds
\end{aligned}$$

с кусочно-непрерывной матрицей-функцией  $W(x, t)$ , которая аннулируется при  $t < \tau_1(x)$ , может иметь разрывы только на характеристиках  $t = \tau_\alpha(x)$  и дважды непрерывно дифференцируема вне характеристик. Используя эти свойства, можно показать: если управление  $f \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  удовлетворяет условиям согласования  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ , то функция  $u^f$ , определяемая равенством (29), называется *классическим решением* задачи (1)–(3).

### 3.4. Оператор реакции

Системе (1)–(3) сопоставляется *оператор реакции*  $R^T$ , определенный на управлениях из Соболевского класса  $H^1([0, T]; \mathbb{R}^2)$ , удовлетворяющих условию  $f(0) = 0$  и действующий в пространстве управлений  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  по правилу:

$$(R^T f)(t) := u_x^f(0, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

В динамических обратных задачах он играет роль данных, по которым восстанавливаются параметры системы (см. [3–5]).

Выведем полезное представление оператора реакции. Из его определения и формулы Дюамеля (29) имеем:

$$R^T f = U_x(0, \cdot) * f. \quad (31)$$

Производная  $U_x(0, \cdot)$  находится дифференцированием разложения (21): как можно проверить, справедливо представление

$$U_x(0, t) = -\nu \delta'(t) + \omega \delta(t) + r(t), \quad t \geq 0,$$

в котором

$$\nu := \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\rho_1(0)}{\gamma_1(0)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho_2(0)}{\gamma_2(0)}} \end{pmatrix},$$

$$\omega := \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \left( \frac{\rho_1'}{\rho_1} + \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} \right) (0) & -\frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{e}{\gamma_1} (0) \\ \frac{c_2}{c_1+c_2} \frac{e}{\gamma_2} (0) & -\frac{1}{4} \left( \frac{\rho_2'}{\rho_2} + \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} \right) (0) \end{pmatrix},$$

а  $r(t)$  – матрица-функция, непрерывно дифференцируемая при  $t \geq 0$ . Подставляя его в (31), для оператора реакции получаем:

$$(R^T f)(t) = -\nu f'(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Отметим, что в работе ([14]), в которой рассматривался случай  $\rho = \text{const}$ ,  $\Gamma = E$ , в аналогичном представлении по ошибке упущен



член  $\omega f(t)$ . Приведем правильное выражение:

$$\begin{aligned} & (R^T f)(t) \\ &= - \begin{pmatrix} \sqrt{\rho_1(0)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho_2(0)} \end{pmatrix} f'(t) + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_1}{c_1+c_2} e(0) \\ \frac{c_2}{c_1+c_2} e(0) & 0 \end{pmatrix} f(t) \\ &+ \int_0^t r(t-s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

#### 4. МЕДЛЕННЫЕ ВОЛНЫ

Как отмечалось выше, любая волна в двухскоростной системе является смесью быстрой и медленной мод. В общей ситуации взаимодействие мод порождает предвестники в медленном канале, в результате чего волна<sup>11</sup> распространяется со скоростью быстрой моды  $c_1$ . Здесь мы описываем красивый физический эффект, свойственный двухскоростным системам: оказывается, при определенной связи между компонентами управления предвестник исчезает и волна (смесь мод!) распространяется со скоростью медленной моды  $c_2$ . Возможно, впервые этот эффект был обнаружен в [3]; там же и в более поздних работах [4–6] он был использован для решения обратных задач. Эти работы относились к системам с постоянными скоростями; здесь рассматривается более общий случай переменных разделенных  $c_1$  и  $c_2$ .

Рассмотрим задачу

$$\rho u_{tt} - (\Gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (32)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0 \quad (33)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad t \geq 0 \quad (34)$$

с управлениями  $f \in L_2^{\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{R}^2)$ . Ее решения, удовлетворяющие условию

$$u^f(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau_2(x) \quad (35)$$

называются *медленными волнами* (см. рис. 6).

<sup>11</sup> точнее говоря, ее передний фронт, т.е. точка на балке, отделяющая возмущенную зону от зоны покоя

**Теорема 3.** Существует единственная функция  $l \in C_{\text{loc}}^2[0, \infty)$  такая, что условие (35) выполнено в том и только в том случае, если компоненты управления  $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}$  связаны соотношением

$$f^1(t) = \int_0^t l(t-s) f^2(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (36)$$

**Доказательство. 1.** Согласно (30), соотношение (35) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mu_1(x) f^1(t - \tau_1(x)) \\ \mu_2(x) f^2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_{\tau_1(x)}^t W(x, s) \begin{pmatrix} f^1(t-s) \\ f^2(t-s) \end{pmatrix} ds = 0, \\ x_2(t) \leq x \leq x_1(t).$$

Фиксируем  $t = T > 0$ ; приравнявая нулю компоненту  $(u^f(x, T))^1$ , имеем:

$$\begin{aligned} \mu_1(x) f^1(T - \tau_1(x)) + \int_{\tau_1(x)}^T W_{11}(x, s) f^1(T-s) ds \\ \int_{\tau_1(x)}^T W_{12}(x, s) f^2(T-s) ds = 0, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T). \end{aligned} \quad (37)$$

Заменим переменные: пусть  $t = T - \tau_1(x)$  и  $\eta = T - s$ , тогда

$$x = x_1(T - t), \quad s = T - \eta, \quad ds = -d\eta, \quad \tau_1(x) = T - t;$$

при  $x_2(T) \leq x \leq x_1(T)$  для  $t$  имеем:  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$ . В новых переменных уравнение (37) принимает вид:

$$\begin{aligned} \mu_1(x_1(T-t)) f^1(t) + \int_0^t W_{11}(x_1(T-t), T-\eta) f^1(\eta) d\eta \\ = - \int_0^t W_{12}(x_1(T-t), T-\eta) f^2(\eta) d\eta, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)). \end{aligned} \quad (38)$$

Поделив на  $\mu_1 = \left( \frac{\gamma_1(0)\rho_1(0)}{\gamma_1\rho_1} \right)^{\frac{1}{4}} \neq 0$ , получаем:

$$f^1(t) + \int_0^t V_1^T(t, \eta) f^1(\eta) d\eta = \int_0^t V_2^T(t, \eta) f^2(\eta) d\eta, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)), \quad (39)$$

где

$$V_\alpha^T(t, \eta) := \frac{W_{1\alpha}(x_1(T-t), T-\eta)}{\mu_1(x_1(T-t))}.$$

Выясним, в какой области меняются аргументы ядер  $V_1^T, V_2^T$ . Из ограничений  $0 < t < T - \tau_1(x_2(T))$ ,  $0 < \eta < t$  легко следует, что при таких  $t$  и  $\eta$  точка  $(x_1(T-t), T-\eta)$  лежит в области между характеристиками. Поэтому гладкость ядер определяется гладкостью компонент  $W_{11}, W_{12}$  между характеристиками. Последние, как отмечалось выше, суть дважды непрерывно дифференцируемые функции. Следовательно  $V_1^T, V_2^T$  дважды непрерывно дифференцируемы в области изменения своих переменных.

**2.** Уравнение (39) есть уравнение Вольтерра второго рода относительно  $f^1$ . С учетом вида правой части, из общей теории таких уравнений легко следует, что его решение имеет вид:

$$f^1(t) = \int_0^t L^T(t, \eta) f^2(\eta) d\eta, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)), \quad (40)$$

где  $L^T$  – ядро, дважды непрерывно дифференцируемое по своим переменным и зависящее от  $T$  как от параметра. Заметим, что соотношение (40) эквивалентно (векторному) равенству (35). Действительно, (40) равносильно условию

$$(u^f(x, T))^1 = 0, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T),$$

но из известной связи между компонентами волны

$$(u^f(x, T))^2 = \int_x^{x_1(T)} N^T(x, s) (u^f(s, T))^1 ds, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T)$$

(см. например, [2]) следует:

$$(u^f(x, T))^2 = 0, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T),$$

что и ведет к (35).

**3.** Уточним свойства ядра  $L^T$  из (40): покажем, что оно не зависит от  $T$ . Действительно, для  $T_1 < T$ , при произвольном  $f^2$  управления

$$\begin{pmatrix} \int_0^t L^{T_1}(t, \eta) f^2(\eta) d\eta \\ f^2(t) \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \int_0^t L^T(t, \eta) f^2(\eta) d\eta \\ f^2(t) \end{pmatrix}$$

порождают медленные волны, удовлетворяющие условию  $u^f(x, t) = 0$  для  $(x, t)$  таких, что  $0 \leq x_2(t) \leq x, t \leq T_1$ . Следовательно, разность

$$\begin{pmatrix} \int_0^t [L^{T_1}(t, \eta) - L^T(t, \eta)] f^2(\eta) d\eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

также есть управление, порождающее медленную волну. В силу связи (40) между компонентами таких управлений, первая компонента в (41) аннулируется для любой  $f^2$ . Отсюда  $L^{T_1}(t, \eta) - L^T(t, \eta) = 0$  для  $t < T_1$ . По произвольности  $T$  и  $T_1$  заключаем:  $L^T(t, \eta) = L(t, \eta)$ .

Покажем, что ядро  $L$  зависит от разности аргументов:

$$L(t, \eta) = L(t - \eta, 0) =: l(t - \eta). \quad (42)$$

Действительно, в силу независимости коэффициентов уравнения (32) от времени, класс управлений, порождающих медленные волны инвариантен относительно сдвигов  $t \mapsto t - \xi$ . Следовательно,

$$f^1(t - \xi) = \int_0^t L(t, \eta) f^2(\eta - \xi) d\eta = \int_0^{t-\xi} L(t, \eta + \xi) f^2(\eta) d\eta. \quad (43)$$

С другой стороны, из (40) вытекает равенство

$$f^1(t - \xi) = \int_0^{t-\xi} L(t - \xi, \eta) f^2(\eta) d\eta. \quad (44)$$

Сопоставляя (43) и (44), получим

$$L(t, \eta + \xi) = L(t - \xi, \eta).$$

Положив  $\eta = 0$ , приходим к (42), откуда и следует связь (36).

Единственность функции  $l$  следует из единственности решения уравнения Вольтерра (39).  $\square$

Можно получить уравнение, непосредственно определяющее функцию  $l$ . Взяв в (36) в качестве второй компоненты управления  $f^2 = \delta(t)$ , имеем:  $f^1 = l * \delta = l$ . В силу этого, полагая в (38)  $f^2 = \delta$ , приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \mu_1(x_1(T-t))l(t) + \int_0^t W_{11}(x_1(T-t), T-\eta)l(\eta)d\eta & \quad (45) \\ = -W_{12}(x_1(T-t), T), \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)). \end{aligned}$$

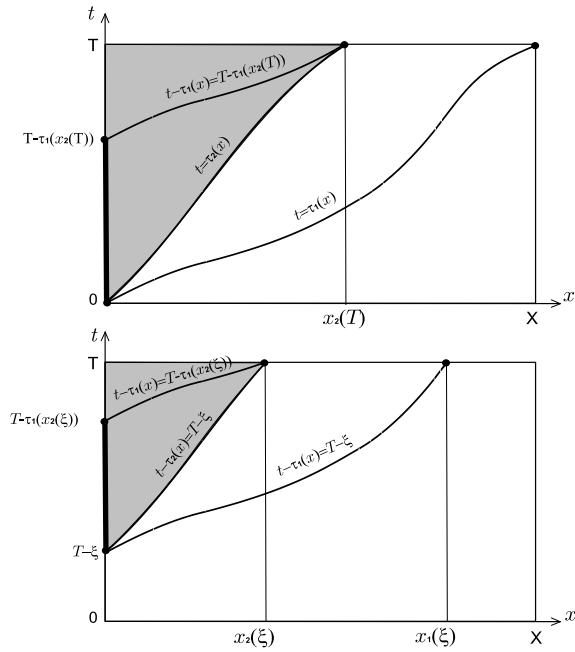


Рис. 6. Медленные волны.

Полезно отметить, что в задаче с конечным финальным моментом  $t = T$  для выполнения условия  $u^f|_{t < \tau_2(x)} = 0$  необходимо и достаточно, чтобы связь (36) имела место при временах  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$  (см. рис. 6). Отсюда видно, что зависимость функции  $l$  от коэффициентов уравнения балки является *локальной*: значения  $l$  при  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$  определяются значениями  $\rho, \gamma, A, B$  при  $0 \leq x \leq x_2(T)$  (не зависят от поведения коэффициентов при  $x > x_2(T)$ ). В более общем случае, если управление действует с момента  $t = T - \xi$ , соотношение (36) должно быть выполнено при  $T - \xi \leq t \leq T - \tau_1(x_2(\xi))$  (см. рис. 6).

В заключение отметим, что значение  $l(0)$  можно выразить через параметры балки. Устремляя  $t \rightarrow +0$  в (45), найдем:

$$l(0) = -\frac{W_{12}(x_1(T-0), T)}{\mu_1(x_1(T))}. \quad (46)$$

Из представления (21) имеем:

$$W_{12}(x, t) = b_{12}(x) \theta(t - \tau_1(x)) + \beta_{12}(x) \theta(t - \tau_2(x)) + c_{12}(x) \varepsilon_1(t - \tau_1(x)) + \varkappa_{12}(x) \varepsilon_2(t - \tau_2(x)) + \tilde{U}_{12}(x, t),$$

откуда, с учетом непрерывности невязки  $\tilde{U}$ , легко находим:

$$W_{12}(x_1(T-0), T) = b_{12}(x_1(T)).$$

Наконец, подставляя в (46) значения  $b_{12}(x_1(T))$  и  $\mu_1(x_1(T))$ , получаем:

$$l(0) = -\frac{b_{12}(x_1(T))}{\mu_1(x_1(T))} = \frac{\sqrt{\rho_2 \gamma_2}}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2} (0) e(0).$$

В частном случае, когда  $\Gamma$  – единичная матрица, имеем:

$$l(0) = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\rho_2 - \rho_1} (0) e(0).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. Наука, М. (1972).
2. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Граничное управление и канонические реализации двухскоростной динамической системы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **222** (1995), 18–44.

3. М. И. Belishev, A. S. Blagovestchenskii, S. A. Ivanov, *Erratum to "The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems."* — [Wave Motion 25 (1997) 83–107]. Wave Motion **26** (1997), 99.
4. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Характеризация данных динамической обратной задачи для двухскоростной системы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **259** (1999), 19–45.
5. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *О единственности "в малом" в динамической обратной задаче для двухскоростной динамической системы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 41–54.
6. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Восстановление параметров системы связанных балок по динамическим граничным данным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **324** (2005), 20–42.
7. Э. И. Григолюк, И. Г. Селезов, *Неклассические модели теории колебаний стержней, пластин и оболочек.* Итоги Науки и Техники, сер. Механика твердых деформируемых тел, т. 5, М. (1973).
8. А. В. Зуров, *Эффекты, связанные с совпадением скоростей в двухскоростной динамической системе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **297** (2003), 44–65.
9. Л. П. Нижник, *Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений.* Изд. Наукова Думка, Киев (1991).
10. A. Morassi, G. Nakamura, and M. Sini, *An inverse dynamical problem for connected beams.* — European J. Appl. Math. **16**, No. 1 (2005), 83–109.
11. Rakesh, P. Sacs, *Stability for an inverse problem for a two speed hyperbolic pde in one space dimension.* — Inverse Problems **25** (2009), to appear.

Belishev M. I., Pestov A. L. Forward dynamical problem for Timoshenko beam.

We deal with an initial boundary value problem of the form

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - (\Gamma u_x)_x + Au_x + Bu &= 0, & x > 0, & 0 < t < T \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0, & x \geq 0 \\ u|_{x=0} &= f, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

where  $\rho = \text{diag}\{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ ,  $A$ , and  $B$  are smooth  $2 \times 2$ -matrix functions of  $x$ , whereas  $\rho_i, \gamma_i$  are smooth positive functions provided  $0 < \frac{\rho_1(x)}{\gamma_1(x)} < \frac{\rho_2(x)}{\gamma_2(x)}$ ,  $x \geq 0$ ;  $f = \text{col}\{f_1(t), f_2(t)\}$  is a boundary control;  $u = u^f(x, t) = \text{col}\{u_1^f(x, t), u_2^f(x, t)\}$  is a solution (wave). Such a problem describes the wave processes in a system, where two different wave modes occur and propagate with different velocities. The modes interact that implies interesting physical effects but, on the other hand, complicates the picture of waves.

For controls  $f \in L_2((0, T); \mathbb{R}^2)$ , we reduce the problem to the relevant integral equation, define the the generalized solutions  $u^f$ , and establish

the well-posedness of the problem. Also, the fundamental matrix-valued solution is introduced and its leading singularities are studied.

The existence of the “slow waves” that are the certain mixture of modes, which propagate with the slow mode velocity, is established.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail*: belishev@pdmi.ras.ru,  
andreypestov82@gmail.com

Поступило 15 сентября 2009 г.