Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 369, 2009 г.

В. М. Бабич, А. А. Мацковский

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ

1. Решение задачи методом разделения переменных

Введение

Мы будем рассматривать гармонические колебания упругой среды, полагая, что зависимость вектора смещения от времени описывается множителем $e^{-i\omega t}$. Этот множитель мы будем опускать. Предполагаем как обычно, что вектор смещения

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi(x,y) + \operatorname{rot}(e_z \psi(x,y)) \tag{1.1}$$

(задача плоская, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ соответственно продольный и поперечный потенциалы, e_z – орт оси z).Потенциалы $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяют уравнениям соответственно:

$$\Delta\varphi + k_a^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k_b^2\psi = 0, \tag{1.2}$$

где $k_a = \frac{\omega}{a}, k_b = \frac{\omega}{b}$, ω – частота колебаний, a и b – скорости соответственно продольных и поперечных волн.

Если на прямой, которую мы возьмем в качестве оси x-ов, выполнены условия обращения в нуль касательного напряжения и нормальной составляющей вектора смещений, то они сводятся к равенствам:

$$\psi|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{1.3}$$

Введем классическую полярную систему координат (R,θ). Тогда скалярная плоская волна U_{pl}, имеющая единичную амплитуду и волновой вектор, равный

$$k(-\cos\theta_0, -sin\theta_0), \tag{1.4}$$

Ключевые слова : скользкий клин, Зоммерфельд, Малюжинец, дифракция, плоская волна, разностные уравнения.

Работа была поддержана грантом РФФИ 08-01-00511 .

описывается формулой

$$U_{pl} = e^{(-ikR\cos(\theta-\theta_0))}. \tag{1.5}$$

Упругие продольную и поперечную плоские волны с тем же волновым вектором можно записать в виде:

$$u_a = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{-ik}U_{pl}\right)_{k=k_a}, \tag{1.6}$$

$$u_b = \operatorname{rot}\left(\frac{e_z}{-ik}U_{pl}\right)_{k=k_b}. \tag{1.7}$$

Пусть упругая среда занимает область $-\alpha < \theta < \alpha, R > 0$, “скользкий” клин с гранями $\theta = \pm\alpha$, $R \geqslant 0$ – дополнение этой области.

Естественно ожидать, что, заменив в формуле (1.6) U_{pl} на решение скалярной задачи дифракции плоской волны с волновым вектором (1.4) при $k = k_a$ и $-\alpha < \theta_0 < \alpha$ на клине $\theta = \pm\alpha, R \geqslant 0$, где $k = k_a$ при краевом условии Неймана $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, мы получим решение задачи дифракции плоской продольной упругой волны на “скользком” клине. Заменив в формуле (1.7) U_{pl} на решение скалярной задачи дифракции плоской волны с волновым вектором (1.4) на том же клине при краевом условии Дирихле $\psi = 0$ и при $k = k_b$, естественно получить решение задачи дифракции плоской на этот раз поперечной волны на “скользком” клине.

Такие идеи лежат в основе работы [1] (в этой работе рассматривается нестационарный вариант задачи дифракции). В работе [1] авторы не обращали внимания на выполнение условий Мейкснера, что чревато ошибками (см. в этой связи работу [2] и главу 4 монографии [3], где правильно решаются задачи для клиновидных областей и содержится критика работы [1]). На стр. 195 монографии [3] читаем “...результат в работе В. А. Свекло, В. А. Сюкияйнена не является решением задачи...” и т.д. Цель настоящей работы частично реабилитировать работу [1] и выразить решение через интегралы Зоммерфельда. Такой вид решения удобен для исследования и в частности для выделения из решения волн с круговым фронтом, рассеянных вершиной клина.

Об условиях Мейкснера

Условия Мейкснера возьмем в виде (см. [3] стр. 197):

$$u = \mathrm{const} + O(R^{\varepsilon}), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = O(R^{\varepsilon-1}), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = O(R^{\varepsilon-1}), \quad \varepsilon > 0, \tag{1.8}$$

где u – вектор смещения.

Обратимся к скалярным задачам дифракции плоской волны на клине в случае краевых условий Дирихле ($\psi|_{\Gamma_j} = 0,\ j = 1,2$) и Неймана ($\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma_j} = 0,\ j = 1,2$), где $\frac{\partial}{\partial n}$ – нормальная производная. Решения задач дифракции плоской волны $e^{-ikR\cos(\theta-\theta_0)}$ $-\Phi < \theta_0 < \Phi$ на клине в случае указанных краевых условий хорошо известны и даются соответственно формулами:

$$\psi(\theta, R) = \frac{2\pi}{\Phi}\sum_{n=1}^{\infty} J_{\nu_n}(kR)e^{-i\nu_n\frac{\pi}{2}}\sin\nu_n(\theta_0+\alpha)\sin\nu_n(\theta+\alpha) \tag{1.9}$$

и

$$\varphi(R,\theta) = \frac{2\pi}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n J_{\nu_n}(kR)e^{-i\nu_n\frac{\pi}{2}}\cos\nu_n(\theta_0+\alpha)\cos\nu_n(\theta+\alpha), \tag{1.10}$$

где $\nu_n = \frac{n\pi}{2\alpha}, \delta_0 = \frac{1}{2}, \delta_n = 1$ при $n > 0$.

Ряды (1.9)–(1.10) – сходящиеся, допускающие дифференцирование по x и y произвольное число раз. Для нас важно, что они кроме всего прочего являются асимптотическими допускающими дифференцирование рядами при $R \to 0$. Отсюда и из классического выражения для функции Бесселя

$$J_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{\Gamma(\nu+s+1)s!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+\nu} \tag{1.11}$$

следует, что для φ и ψ имеют место допускающие дифференцирование асимптотические при $R \to 0$ формулы:

$$\varphi, \psi = \mathrm{const} + O(R^{\frac{\pi}{2\alpha}}). \tag{1.12}$$

Из формул (1.6)–(1.7), (1.8) и (1.12) вытекает любопытное следствие: при $2\alpha < \pi$, т.е. когда угол, заполненный упругой средой, меньше развернутого, решение задачи дифракции плоской продольной волны дается формулой:

$$u = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{-ik}\varphi\right)_{k=k_a}, \tag{1.13}$$

где φ имеет вид (1.9), причем условия Мейкснера выполняются!

Соответственно, если

$$u = \operatorname{rot}\left(\frac{e_z}{-ik}\psi\right)_{k=k_b}, \tag{1.14}$$

где ψ имеет вид (1.10), то u решает задачу дифракции плоской поперечной волны на "скользком" клине, причем условия Мейкснера будут выполнены! *Таким образом подход работы* [1] *при* $2\alpha < \pi$ *совершенно правилен!*

Обратимся к случаю $2\alpha > \pi$. В силу формул (1.6)–(1.7) и того, что при $R \to 0$ $J_\nu(z) \sim \mathrm{const}\, z^\nu$ имеем (см. (1.13)–(1.14)) $u = O(R^{\frac{\pi}{2\alpha}-1})$. Таким образом вектор смещения неограничен при $R \to 0$, условия Мейкснера не выполняются и подход работы [1] требует коррекции. Как ее осуществить указывается в главе 4 монографии [3].

Наметим коротко соответствующие идеи. Пусть на "скользкий" клин падает продольная плоская волна, соответствующая продольному потенциалу (1.5) при $k = k_a$. Обратимся к выражению (1.13). Рассмотрим радиальную компоненту u_r вектора u. При $R \to 0$ $u_r = \mathrm{const}\, R^{\nu_1-1} + O(R^{2\nu_1-1})$, где $\nu_1 = \frac{\pi}{2\alpha}$. Чтобы "убить" обращающееся при $R = 0$ в бесконечность слагаемое $\mathrm{const}\, R^{\nu_1-1}$ добавим к продольному потенциалу слагаемое $d_1 H^{(1)}_{\nu_1}(k_a R)\cos\nu_1(\theta+\theta_0)$, где $H^{(1)}_{\nu_1}$ – функция Ханкеля $d_1 = \mathrm{const}$. Это слагаемое соответствует уходящей на бесконечность волне и удовлетворяет краевым условиям. Потенциал ψ возьмем в виде: $d_2 H^{(1)}_{\nu_1}(k_b R)\sin\nu_1(\theta+\theta_0)$, где $d_2 = \mathrm{const}$. Соответствующая этому потенциалу волна тоже уходящая на бесконечность и тоже удовлетворяющая краевым условиям. Как показывает формула

$$H^{(1)}_\nu = \frac{J_{-\nu} - e^{-\nu\pi i} J_\nu}{i\sin\pi\nu}, \tag{1.15}$$

и выкладки, базирующиеся на формулах (1.1), (1.11) и (1.13), эти два добавленных слагаемых, привносят в выражение для u_r еще слагаемые порядка R^{ν_1-1} и $R^{-\nu_1-1}$, обращающиеся в бесконечность при $R = 0$. Приравняем нулю в выражении для u_r коэффициенты при R^{ν_1-1} и $R^{-\nu_1-1}$. Мы придем к системе двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными d_1 и d_2 с отличным от нуля определителем. Найдем из этой системы d_1 и d_2. Полученное выражение для u_r при $R \to 0$ будет асимптотически представлятся выражением $\mathrm{const} + O(R^\varepsilon)$, где $\varepsilon = 2\nu_1 - 1 > 0$. Как показывают подсчеты, при таком выборе d_1 и d_2 компонента u_θ вектора смещений тоже будет ограниченной. Точнее при $R \to 0$ $u_\theta = \mathrm{const} + O(R^\varepsilon)$ $\varepsilon = 2\nu_1 - 1 > 0$. Последнее является неожиданной удачей. Этим завершается вывод выражения для решения задачи дифракции на “скользком” клине. Вывод формул, решающих задачу дифракции поперечной плоской волны на “скользком” клине вполне аналогичен рассмотрениям в случае падения продольной волны на такой клин.

Соответствующие вычисления здесь не приводятся потому, что они имеют много общего с расчетами, содержащимися в главе 4 монографии [3]. Далее в настоящей статье будет изложено другое решение задач дифракции плоских волн на “скользком” клине.

2. Решение задачи дифракции в виде интегралов Зоммерфельда

Рассмотрим решение задачи о падении плоской волны на упругий клин иным методом. Как и прежде, клин расположим симметрично относительно оси x (см. рис. 1).

Будем искать решение данной дифракционной задачи, представив потенциалы $\Phi(k_a r, \theta)$, $\Psi(k_b r, \theta)$, входящие в разложение вектора смещений $\vec{u} = \nabla\Phi + \mathrm{rot}[\Psi\vec{e_z}]$, в виде интегралов Зоммерфельда:

$$\Phi(k_a r, \theta) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath k_a r \cos z} \left(\hat{\Phi}(z+\theta) - \hat{\Phi}(\theta - z)\right) dz, \tag{2.1}$$

$$\Psi(k_b r, \theta) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath k_b r \cos z} \left(\hat{\Psi}(z+\theta) - \hat{\Psi}(\theta - z)\right) dz. \tag{2.2}$$

Такое представление решения, дает возможность легко произвести асимптотический анализ его поведения при $kr \to \infty$ с помощью метода перевала и выделить цилиндрическую волну, рассеянную вершиной клина. Поиск решений в виде интеграла Зоммерфельда сводится к отысканию двух функций комплексного переменного z, удовлетворяющих некоторой разностной системе уравнений и обладающих определенными аналитическими свойствами.

Что касается аналитических свойств $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Psi}$, то эти функции мы будем искать в классе мероморфных функций комплексного переменного z, каждая из которых в полосе $-\alpha < \mathrm{Re}\, z < \alpha$ имеет ровно один простой полюс в точке $z = \theta_0$, что соответствует падающей на клин плоской волне, причем вычеты в этой точке находятся в соответствии с амплитудами поперечной и продольной составляющих начальной падающей плоской волны. Кроме того необходимо потребовать, чтобы потенциалы удовлетворяли системе граничных условий соответствующих нашей задаче. Эта система как уже упоминалось ранее имеет вид:

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad \theta = \pm\alpha. \tag{2.3}$$

В статье [6] авторы следуют предположению, касающемуся поведения искомых потенциалов в окрестности $kr = 0$:

$$\Psi = O(k_b r)^{p_0}, \quad \Phi = O(k_a r)^{p_0}, \quad \operatorname{Re} p_0 > -1, \quad kr \to 0. \tag{2.4}$$

Сделаем и мы данное предположение. Тогда, подставив Ψ и Φ в виде интегралов Зоммерфельда в эти краевые условия и воспользовавшись теоремой Малюжинца (см. [4]), мы получим следующую разностную систему уравнений, следующую из граничных условий нашей задачи:

$$\begin{cases} \hat{\Psi}(\pm\alpha + z) - \hat{\Psi}(\pm\alpha - z) = 0, \\ \hat{\Phi}(\pm\alpha + z) + \hat{\Phi}(\pm\alpha - z) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Как уже говорилось ранее, для выполнения условия конечности энергии волнового поля в ограниченной окрестности вершины клина, то есть условий Мейкснера, достаточно потребовать от вектора смещения выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} u_r = c_r + O(r^{\varepsilon_r}), \quad \varepsilon_r > 0,\ c_r,\ \varepsilon_r = \mathrm{const}, \\ u_\theta = c_\theta + O(r^{\varepsilon_\theta}), \quad \varepsilon_\theta > 0,\ c_\theta,\ \varepsilon_\theta = \mathrm{const}, \quad kr \to 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

которые в свою очередь эквивалентны системе

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = c_r + O(r^{\varepsilon_r}), \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = c_\theta + O(r^{\varepsilon_\theta}), \quad kr \to 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

В дальнейшем, для удобства, символ "крышечка" будем опускать, так как в основном мы будем иметь дело не с функциями $\Phi(k_a r, \theta)$, $\Psi(k_b r, \theta)$ а именно с их "образами", функциями комплексного переменного z, поэтому путаницы между Φ, Ψ и $\hat{\Phi}$, $\hat{\Psi}$ не будет. Подставим в систему (2.7) интегральное представление Зоммерфельда для потенциалов, и выполним интегрирования по частям, для того, чтобы избавиться от производных функций Ψ и Φ. Опуская выкладки получаем систему, состоящую из двух интегральных уравнений вида

$$\begin{cases} \int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath k_a r\cos z} F_{\Phi}^{(1)}(\Phi, \sin z, \cos z) dz + \int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath k_b r\cos z} F_{\Psi}^{(1)}(\Psi, \sin z, \cos z) dz \\ \qquad = c_r + O(r^{\varepsilon_r}), \\ \int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath k_a r\cos z} F_{\Phi}^{(2)}(\Phi, \sin z, \cos z) dz + \int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath k_b r\cos z} F_{\Psi}^{(2)}(\Psi, \sin z, \cos z) dz \\ \qquad = c_\theta + O(r^{\varepsilon_r}), \\ kr \to 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Здесь, $F_{\Phi}^{(1,2)}$, $F_{\Psi}^{(1,2)}$ – линейные функции по переменным $\Phi(\pm z \pm \alpha)$, $\Psi(\pm z \pm \alpha)$ с коэффициентами вида $c_1 \sin^n z$, $c_2 \cos^m z$, где $c_{1,2}$- некоторые комплексные числа, n,m - целые неотрицательные числа.

Известно следующее свойство интегралов Зоммерфельда:

$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\Xi(z) dz = O(kr)^{\varepsilon},$$

$$kr \to 0 \ \Leftrightarrow \Xi(z) = O(e^{i\varepsilon z}), \quad \operatorname{Im} z \to +\infty \tag{2.9}$$

Хотелось бы воспользоваться этим фактом для того, чтобы перейти от интегральной системы уравнений (2.8) к разностной системе уравнений на функции $\Phi(z), \Psi(z)$. Для того, чтобы сделать это, необходимо преобразовать систему (8) к такому виду, в котором все интеграл ы содержат множитель вида $e^{-ikr\cos z}$ с одним и тем же волновым числом k. Для решения этой проблемы, применим метод, использующийся в работах Будаева и Боги (см. [5]):

В интегралах, содержащих экспоненту с волновым числом k_b сделаем замену переменной $z \to z'$:

$$(\cos z')k_a = (\cos z)k_b, \quad dz = \pm\frac{\sin z' dz'}{\sqrt{\gamma^2 - \cos^2 z'}}, \quad \gamma = \frac{k_b}{k_a}. \tag{2.10}$$

Тогда $\Psi(z) \to \Psi(g(z))$,

$$g(z) = \arccos(\gamma^{-1}\cos z). \tag{2.11}$$

Ветвь арккосинуса выбирается так, что $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$; $g(-z) = -g(z)$; $g(z + \pi n) = g(z) + \pi n$; $g(z) \approx z + i\log\gamma + O(e^{-2|\operatorname{Im} z|})$, $\operatorname{Im} z \to \infty$.

Поведение интегралов из системы (2.8) при $kr \to 0$ определяется интегрированием по участку контура γ_+, где $\operatorname{Im} z \to \infty$, т.е. ничего не изменится, если мы заменим в (2.8) функции $\Psi(z), \Phi(z)$ их асимптотиками при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ $\Psi_{as}(z), \Phi_{as}(z)$.

Теперь воспользуемся свойством (2.9) и перепишем (2.8) в виде:

$$\begin{cases} \Phi_{as}(z+\theta) - \Phi_{as}(\theta - z) - \Psi_{as}(\theta + z + i\log\gamma) - \Psi_{as}(\theta - z - i\log\gamma) \\ \qquad = e^{iz}(c_r + O(e^{i\varepsilon_r z})), \\ \Phi_{as}(z+\theta) + \Phi_{as}(\theta - z) + i\Psi_{as}(\theta + z + i\log\gamma) - i\Psi_{as}(\theta - z - i\log\gamma) \\ \qquad = e^{iz}(c_\phi + O(e^{i\varepsilon_\phi z})) \end{cases} \tag{2.12}$$

Вернемся к разностной системе следующей из краевых условий задачи:

$$\begin{cases} \Psi(\pm\alpha + z) - \Psi(\pm\alpha - z) = 0, \\ \Phi(\pm\alpha + z) + \Phi(\pm\alpha - z) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Решение данной задачи рассеяния можно представить в виде полусуммы решений симметричной и антисимметричной задач. Под симметричной задачей рассеяния подразумевается задача падения двух плоских волн. Они падают симметрично относительно клина и имеют одинаковые амплитуды. Антисимметричный случай отличается от симметричного различием знаков амплитуд, но не их абсолютных значений.

Для определенности рассмотрим симметричную задачу рассеяния и найдем соответствующие решения. Функция $\Psi(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \Psi(\alpha + z) - \Psi(\alpha - z) = 0, \\ \Psi(-z) = -\Psi(z). \end{cases} \tag{2.14}$$

Первое уравнение системы (2.14) – следствие краевых условий. В силу симметрии оно только одно, а второе уравнение – антисимметричность $\Psi(z)$, выполняется в силу того, что четность волнового поля по переменной θ влечет за собой нечетность его образа Лапласа по переменной z. Система уравнений на функцию $\Phi(z)$ получается аналогично:

$$\begin{cases} \Phi(\alpha + z) + \Phi(\alpha - z) = 0, \\ \Phi(-z) = -\Phi(z). \end{cases} \tag{2.15}$$

Посмотрим какие существуют решения полученных систем уравнений в классе мероморфных функций имеющих один полюс в точке

$z = \theta_0$. Одно из возможных решений имеет вид разности котангенсов которые выписаны в качестве решений скалярных задач Дирихле и Неймана в [4]:

$$\begin{cases} \Psi^D(z) = \frac{\mu \cos \mu\theta_0}{\sin \mu z - \sin \mu\theta_0}, \\ \Phi^N(z) = \frac{\mu \cos \mu z}{\sin \mu z - \sin \mu\theta_0}, \quad \mu = \frac{\pi}{2\alpha}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Полученные таким образом функции на самом деле в общем случае произвольного угла раскрыва клина не являются решениями симметричной задачи. В случае $\frac{\pi}{2\alpha} < 1$ мы опять сталкиваемся с проблемой бесконечности энергии волнового поля в окрестности вершины клина, которая обсуждалась в первой части данной статьи. Функции (2.16) удовлетворяют всем свойствам искомых решений кроме условия Мейкснера. Действительно, функция $\Psi(z)$ при $\operatorname{Im} z \to \infty$ ведет себя как $e^{-\mu z}$, а правая часть уравнений (2.12) есть $e^{iz}(c_r + O(e^{i\varepsilon_r z}))$, поэтому условия Мейкснера выполняться не будут. Будем искать функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ в следующем виде

$$\begin{cases} \Psi(z) = \Psi^D(z) + \Psi_0(z), \\ \Phi(z) = \Phi^N(z) + \Phi_0(z). \end{cases} \tag{2.17}$$

Перепишем систему краевых условий на функцию $\Psi_0(z)$ в виде

$$\begin{cases} \Psi_0(z) = \Psi_0(2\alpha - z), \\ \Psi_0(z) = \Psi_0(-2\alpha - z), \end{cases} \tag{2.18}$$

$\Psi_0(z)$ – целая функция. Из выполнения (2.18) следует 4α – периодичность $\Psi_0(z)$. Кроме того, условия, наложенные на поведение волнового поля в окрестности вершины клина, влекут оценку:

$$\Psi_0(z) = O(e^{|\operatorname{Im} z|}), \quad |\operatorname{Im} z| \to \infty. \tag{2.19}$$

Введем функцию

$$h(z) = \Psi_0\left(\frac{i}{\mu}\ln z\right). \tag{2.20}$$

В силу 4α периодичности $\Psi_0(z)$, функция $h(z)$ однозначная и аналитическая в C^* (во всей комплексной плоскости за исключением нуля), значит она может быть разложена в ряд Лорана во всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 0$:

$$h(z) = \ldots + c_{-N}z^{-N} + \ldots + c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots \tag{2.21}$$

В силу (2.19) $h(z) = O(z^{-\frac{2\alpha}{\pi}})$, $|z| \to 0$; $h(z) = O(z^{\frac{2\alpha}{\pi}})$, $|z| \to \infty$. Так как $\alpha < \pi$, то $\ldots c_{-3} = c_{-2} = c_2 = c_3 = \ldots = 0$, поэтому

$$h(z) = c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z \tag{2.22}$$

$\Psi_0(z) = h(e^{-i\mu z})$, значит:

$$\Psi_0(z) = c_{-1}e^{i\mu z} + c_1 e^{-i\mu z} + c_0. \tag{2.23}$$

От c_0 ничего не зависит, поэтому для удобства положим его равным нулю.

Подставив (2.23) в систему краевых уравнений (2.18) получим $c_{-1} = c_1$. Проделав аналогичную процедуру с $\Phi_0(z)$ в итоге получим

$$\begin{cases} \Psi_0(z) = c_1 \sin \mu z, \\ \Phi_0(z) = c_2 \cos \mu z. \end{cases} \tag{2.24}$$

Остается подставить асимптотические значения функций $\Psi(z)$, $\Phi(z)$ в систему уравнений (2.12) для выполнения условий Мейкснера. Каждое из двух уравнений системы (2.12) порождает систему из двух уравнений на коэффициенты c_1 и c_2. Оказывается, что системы, порожденные каждым из уравнений (2.12), эквивалентны и однозначно разрешимы. Детерминант получающейся системы уравнений для коэффициентов c_1 и c_2 равен $\gamma^{-\mu} + \gamma^{\mu}$, в силу $\gamma \neq 0$ он всегда отличен от нуля, что и доказывает разрешимость системы уравнений.

Опустив выкладки, выпишем получающиеся искомые функции $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$

$$\begin{cases} \Psi_0(z) = \frac{-\frac{\pi}{2}e^{-\mu\frac{\pi}{2}}\cos\mu\theta_0}{1+\gamma^{2\mu}} \sin \mu z, \\ \Phi_0(z) = \frac{\frac{\pi}{2}e^{-\mu\frac{\pi}{2}}\gamma^{\mu}\cos\mu\theta_0}{1+\gamma^{2\mu}} \cos \mu z. \end{cases}. \tag{2.25}$$

Заметим, что после подстановки в интеграл Зоммерфельда функций (2.25) и интегрирования мы получим именно функции Ханкеля, о которых уже говорилось в первой части статьи.

Решение задачи в антисимметричном случае проводится аналогично.

Литература

1. В. А. Свекло, В. А. Сюкияйнен, *Дифракция плоской упругой волны относительно угла.* — ДАН СССР **119**, No. 6 (1958), 1122–1123.
2. Б. В. Костров, *Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду.* — ПММ **30**, No. 1 (1966), 198–203.
3. В. Б. Поручиков, *Методы динамической теории упругости.* Наука, М. (1986).
4. В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда-Малюжинца в задачах дифракции.* С.-Петербург (2003).
5. B. V. Budaev, D. B. Bogy, *Rayleigh wave scattering by a wedge. Wave Motion.* — **22** (1995), 239–257.
6. V. V. Kamotski, L. Ju. Fradkin, B. A. Samokish, V. A. Borovikov, V. M. Babich, *On Budaev and Bogy's Approach to Diffraction by the 2D Traction-Free Elastic Wedge.* — SIAM Journal of Applied Mathematics **67(1)** (2006), 235–259.

Babich V. M., Matskovskiy A. A. The diffraction of a plane wave by a slippery elastic wedge.

The diffraction of a plane elastic wave by a slippery wedge is considered. By slippery wedge we mean the wedge with zero tangent tension and normal component of the displacement vector on it's boundary. It is known, that it is possible to write an explicit solution of this task. We find the Sommerfeld representation of the solution in this paper.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 6 ноября 2009 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: androbasrm@rambler.ru