Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

Б. П. Харламов

О МАРКОВСКОМ ДИФФУЗИОННОМ ПРОЦЕССЕ С ЗАМЕДЛЕННЫМ ОТРАЖЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ ИНТЕРВАЛА

1. Мотивация

В работе [5] исследовалось граничное поведение непрерывного полумарковского процесса со значениями из замкнутого интервала, который совпадает с марковским диффузионным процессом внутри интервала, т.е. до момента первого выхода на границу интервала и в любое время схода с границы внутрь интервала. Примером такого процесса является усечённый винеровский процесс

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} b, & w(t) \geqslant b, \\ w(t), & a < w(t) < b \qquad (t \geqslant 0), \\ a, & w(t) \leqslant a, \end{cases}$$

у которого $a < w(0) < b$. Этот процесс не является марковским, но сохраняет полумарковское свойство исходного процесса: марковское свойство процесса выполняется относительно момента первого выхода из любого открытого интервала внутри интервала, а также из любых односторонних окрестностей граничных точек [4].

В предыдущей работе на эту тему мы выяснили основные свойства граничного поведения процесса из данного класса. Под влиянием замечания рецензента о близости нашей темы к исследованиям И. И. Гихмана и А. В. Скорохода, изложенным в книге [2], в конце нашей работы мы высказали утверждение о том, что наши результаты содержат как частный случай результаты этих авторов, относящиеся к отражению процесса от границы интервала. В частности, наши результаты могли бы по новому трактовать явление замедленного отражения процесса на границе, определяемого в стационарном

Ключевые слова : полумарковские процессы, граничное поведение процессов, отражение на границе.

режиме как свойство непрерывного марковского процесса иметь ненулевую среднюю меру времени пребывания на границе. Для этой цели предлагалось использовать необходимое и достаточное условие марковости, изложенное в статье [3] и в книге [4], состоящее в линейности лямбда-характеристического оператора относительно параметра лямбда. Проверка для данного процесса достаточного условия марковости показала, что класс марковских процессов с замедленным отражением на границе существует и отличается вполне определённым видом полумарковской переходной производящей функции в граничных точках интервала. Так как наш метод доказательства существенно отличается от метода книги [2], мы приведём это доказательство полностью, почти не ссылаясь на опубликованные ранее результаты.

2. Некоторые обозначения и результаты

Обозначения. Обозначим (P_x) $(a \leqslant x \leqslant b)$ измеримое согласованное семейство мер непрерывного полумарковского процесса [4]. Каждая мера задана на измеримом пространстве $(\mathcal{C}, F)$ непрерывных функций $\xi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$; сигма-алгебра подмножеств $\mathcal{F}$ порождена одномерными цилиндрическими подмножествами пространства $\mathcal{C}$. Будем рассматривать значение процесса в фиксированной точке как оператор на $\mathcal{C}$: $X_t(\xi) = \xi(t)$. Рассмотрим также оператор сдвига: $\theta_t : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ $(t \geqslant 0)$, определяемый, как обычно, равенством $(\theta_t(\xi))(s) = \xi(t+s)$, откуда следует равенство операторов $X_s \circ \theta_t = X_{t+s}$, а также $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{t+s}$. Пусть $\mathcal{T}$ – множество марковских моментов относительно натуральной фильтрации. Определения операторов естественным образом обобщаются на случайные моменты времени, т.е. на точки $\tau \in \mathcal{T}$. Операторы X_τ, θ_τ определены на множестве $\{\tau < \infty\}$. Обозначим $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$, если $\tau_1 < \infty$; в противном случае $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \infty$ $(\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T})$. При этом $X_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = X_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}$ и $\theta_{\tau_1 \dot{+} \tau_2} = \theta_{\tau_2} \circ \theta_{\tau_1}$ на множестве $\{\tau_1 \dot{+} \tau_2 < \infty\}$. Обозначим σ_Δ оператор момента первого выхода процесса из множества $\Delta \subset \mathbb{R}$: $\sigma_\Delta(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \xi(t) \notin \Delta\}$. Известно, что $\sigma_\Delta \in \mathcal{T}$, если Δ – открытое множество. Если $t \leqslant \sigma_\Delta$, то $t \dot{+} \sigma_\Delta = \sigma_\Delta$. Отсюда $\sigma_{\Delta_1} \dot{+} \sigma_{\Delta_2} = \sigma_{\Delta_2}$, если $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Будем называть функцию

$$f_\tau(\lambda; S|\, x) \equiv E_x(e^{-\lambda\tau};\, X_\tau \in S,\, \tau < \infty) \quad (x \in \mathbb{R},\, S \subset \mathbb{R},\, \tau \in \mathcal{T})$$

полумарковской переходной производящей функцией. Сохраним это же обозначение для интеграла (изменив только аргумент)

$$f_\tau(\lambda;\phi|\,x) \equiv E_x(e^{-\lambda\tau}\phi(X_\tau);\ \tau<\infty),$$

где ϕ – интегрируемая функция. При $\phi\equiv 1$ из двух возможных обозначений $f_\tau(\lambda;\mathbb{R}|\,x) = f_\tau(\lambda;1|\,x)$ мы выбираем второе. Для рассматриваемых нами процессов и множеств моменты первого выхода из этих множеств конечны с вероятностью 1. Поэтому в дальнейшем событие вида $\{\tau<\infty\}$ под знаком вероятности или математического ожидания мы опускаем.

Для одномерного непрерывного процесса со значениями из замкнутого интервала $[a,b]$ введём специальные обозначения для выхода на левую и правую границы интервала $(c,d)\subset[a,b]$:

$$g_{(c,d)}(\lambda,x) = f_\tau(\lambda;\{c\}|\,x),\quad h_{(c,d)}(\lambda,x) = f_\tau(\lambda;\{d\}|\,x),$$

где $c\leqslant x\leqslant d$, $\lambda\geqslant 0$, $\tau=\sigma_{(c,d)}$. Для интервалов вида $[a,y)$ $(y\leqslant b)$, $(y,b]$ $(y\geqslant a)$ (когда выход возможен только через открытую границу интервала) обозначим:

$$k_a(\lambda,y|\,x) = f_\tau(\lambda;\{y\}|\,x)\quad (\tau=\sigma_{[a,y)}),$$

$$k_b(\lambda,y|\,x) = f_\tau(\lambda;\{y\}|\,x)\quad (\tau=\sigma_{(y,b]}).$$

Известно [4], что g и h как функции от x удовлетворяют на интервале (c,d) дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}f'' + A(x)f' - B(\lambda,x)f = 0 \tag{1}$$

при краевых условиях

$$g_{(c,d)}(\lambda,c) = h_{(c,d)}(\lambda,d) = 1,\quad g_{(c,d)}(\lambda,d) = h_{(c,d)}(\lambda,c) = 0.$$

B – некоторая положительная функция с вполне монотонной частной производной по λ и $B(0,x)=0$ для всех x. Для марковского случая справедливо $B(\lambda,x)=\lambda\gamma(x)$. В дальнейшем внутри интервала (a,b) будем предполагать именно марковский случай, а также, что функции A и γ (параметры задачи) непрерывны и $\gamma\geqslant\delta$ для некоторого $\delta>0$.

Переходная производящая функция на границе. Используя полумарковское свойство процесса, имеем

$$k_a(\lambda, y|\, x) = h_{(a,y)}(\lambda, x) + g_{(a,y)}(\lambda, x) k_a(\lambda, y|\, a), \quad a < x < y, \tag{2}$$

$$k_b(\lambda, y|\, x) = g_{(y,b)}(\lambda, x) + h_{(y,b)}(\lambda, x) k_b(\lambda, y|\, b) \quad y < x < b, \tag{3}$$

и, следовательно, k_a, k_b как функции от x удовлетворяют уравнению (1) с краевыми условиями, которые определяются переходными производящими функциями на границе

$$K_a(\lambda, y) \equiv k_a(\lambda, y|\, a), \quad K_b(\lambda, y) \equiv k_b(\lambda, y|\, b) \quad (a \leqslant y \leqslant b).$$

Отсюда

$$K_a(\lambda, y) = K_a(\lambda, y-z)(h_{(a,y)}(\lambda, y-z) \\ + g_{(a,y)}(\lambda, y-z) K_a(\lambda, y)) \quad (z > 0). \tag{4}$$

При сделанных предположениях справедливо

$$h_{(a,y)}(\lambda, y-z) = 1 - h'_{(a,y)}(\lambda, y) z + o(z),$$

$$g_{(a,y)}(\lambda, y-z) = -g'_{(a,y)}(\lambda, y) z + o(z).$$

При $z \to 0$ получаем дифференциальное уравнение относительно K_a

$$K'_a(\lambda, y) + \psi_2(a, y)\, K_a(\lambda, y) - \phi_2(a, y)\, K_a^2(\lambda, y) = 0 \quad (y > a) \tag{5}$$

(уравнение Бернулли), где

$$\phi_2(c, d) = -g'_{(c,d)}(\lambda, d), \quad \psi_2(c, d) = h'_{(c,d)}(\lambda, d).$$

Аналогично для K_b

$$K'_b(\lambda, y) - \phi_1(y, b)\, K_b(\lambda, y) + \psi_1(y, b)\, K_b^2(\lambda, y) = 0 \quad (y < b), \tag{6}$$

где $\phi_1(c, d) = -g'_{(c,d)}(\lambda, c)$, $\psi_1(c, d) = h'_{(c,d)}(\lambda, c)$. Заметим, что $\psi_2(a, y)$ и $\phi_2(a, y)$ как функции от y имеют особенность в точке a, а также

$\phi_1(y,b)$ и $\psi_1(y,b)$ как функции от y имеют особенность в точке b. Решения этих уравнений:

$$K_a(\lambda,y) = \frac{\exp\Big(\int\limits_y^b \psi_2(a,s)\,ds\Big)}{C_a + \int\limits_y^b \phi_2(a,t)\exp\Big(\int\limits_t^b \psi_2(a,s)\,ds\Big)\,dt}, \tag{7}$$

$$K_b(\lambda,y) = \frac{\exp\Big(\int\limits_a^y \phi_1(s,b)\,ds\Big)}{C_b + \int\limits_a^y \psi_1(t,b)\exp\Big(\int\limits_a^t \phi_1(s,b)\,ds\Big)\,dt}. \tag{8}$$

Таким образом, все разнообразие рассматриваемых краевых задач определяется выбором произвольных постоянных C_a, C_b (зависящих от λ) в решениях этих уравнений.

Для выяснения вопроса о существовании процесса необходимо убедиться в том, что K_a и K_b – вполне монотонные функции от λ. Для разрешения этого вопроса оказывается более удобной другая форма их представления. Возможность ее использования связана с нарушением условия единственности решений уравнений (5), (6), вызванного особенностью коэффициентов в начальных точках интервалов интегрирования.

Теорема 1. *Если коэффициент A имеет ограниченную производную в некоторой окрестности точки a, то $K_a(\lambda,a) = 1$ и существует частная производная функции $K_a(\lambda,y)$ справа по второму аргументу в точке a, обозначаемая $L_a(\lambda)$. При этом*

$$K_a(\lambda,y) = \frac{\psi_1(a,y)}{-L_a(\lambda) + \phi_1(a,y)}. \tag{9}$$

Если коэффициент A имеет ограниченную производную в некоторой окрестности точки b, то $K_b(\lambda,b) = 1$ и существует частная производная функции $K_b(\lambda,y)$ слева по второму аргументу в точке b, обозначаемая $L_b(\lambda)$. При этом

$$K_b(\lambda,y) = \frac{\phi_2(y,b)}{L_b(\lambda) + \psi_2(y,b)}. \tag{10}$$

Доказательство см. [5].

Из общей теории непрерывных полумарковских процессов [4] следует, что конструируемый процесс с параметрами K_a, K_b существует, если эти параметры вполне монотонны как функции от λ и $K_a(0,y) \leqslant 1$, $K_b(0,y) \leqslant 1$, т.е. определяют субвероятностные распределения на положительной полупрямой. Во всех остальных отношениях функции L_a и L_b произвольны и определяют все многообразие диффузионных процессов с задержкой на краях интервала. Заметим, что независимое условие $L_a(0) = 0$ ($L_b(0) = 0$) эквивалентно условию $K_a(0,y) = 1$ ($K_b(0,y) = 1$) при всех $y \in [a,b]$, которое означает, что из точки a (b) точка y достигается с вероятностью единица. Мы не исключаем случаи $L_a(\lambda) \equiv 0$ и $L_b(\lambda) \equiv 0$, которые, как будет показано ниже, определяют допустимые вполне монотонные значения производящих функций и соответствуют мгновенному отражению от соответствующей границы.

Пример вероятностного решения. Мы докажем, что при линейной зависимости L_a и L_b от λ функции $K_a(\lambda,y)$ и $K_b(\lambda,y)$ вполне монотонны относительно λ, причём $K_a(0,y) = K_b(0,y) = 1$, $K_a(\infty,y) = K_b(\infty,y) = 0$.

Лемма 1. *Если $Z(\lambda) > 0$, $Z'(\lambda) > 0$ при всех $\lambda > 0$ и Z' – вполне монотонная функция, то и Z^{-1} – вполне монотонная функция.*

Доказательство. Пусть $Z_n \equiv Z^{(n)}$ – n-тая производная от Z по λ. Обозначим $(Z^{-1})^{(n)} = A_n/Z^{n+1}$. Докажем формулу

$$A_n = (-1)^n \sum_{r \in Q_n} (-1)^{v(r)} D_r^n(Z) P_r^{(n)}(Z), \tag{11}$$

где r – некоторое разбиение n на целые слагаемые вида $r = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$;

Q_n – множество всех неупорядоченных разбиений (с учётом несобственного разбиения $r = (n)$), т.е. таких, что два вектора r_1 и r_2, различающихся только перестановкой своих элементов, представляют одно и то же разбиение;

$D_r^n(Z)$ – смешанная производная от Z порядка r, т.е. если $r = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, то $D_r^n(Z) = \prod_{i=1}^k Z_{n_i}$;

$P_r^{(n)}(Z)$ – некоторый полином от Z порядка не выше n ($n \geqslant 1$) с положительными коэффициентами;

$v(r)$ – число чётных элементов в разбиении r.

При $n = 1$ имеем $Q_1 = \{(1)\}$, $v(1) = 0$, $D^1_{(1)} = Z_1$, $P^{(1)}_{(1)}(Z) = 1$ – формула (11) верна. Пусть формула верна для данного n. Тогда

$$(Z^{-1})^{(n+1)} = \left(\frac{A_n}{Z^{n+1}}\right)' = \frac{A'_n Z - (n+1)Z_1 A_n}{Z^{n+2}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
A'_n Z &- (n+1)Z_1 A_n \\
&= \left((-1)^n \sum_{r\in Q_n} (-1)^{v(r)} D^n_r(Z) P^{(n)}_r(Z)\right)' Z \\
&- (n+1)Z_1\left((-1)^n \sum_{r\in Q_n} (-1)^{v(r)} D^n_r(Z) P^{(n)}_r(Z)\right) \\
&= (-1)^n \sum_{r\in Q_n} (-1)^{v(r)} (D^n_r(Z))' P^{(n)}_r(Z) Z \\
&+ (-1)^n \sum_{r\in Q_n} (-1)^{v(r)} D^n_r(Z) \left(P^{(n)}_r(Z)\right)' Z \\
&- (n+1)Z_1\left((-1)^n \sum_{r\in Q_n} (-1)^{v(r)} D^n_r(Z) P^{(n)}_r(Z)\right) \\
&= (-1)^n \sum_{r\in Q_n} (-1)^{v(r)} \sum_{i=1}^{N_r} D^{n+1}_{r+e_i}(Z) P^{(n)}_r(Z) Z \\
&+ (-1)^{n+1} \sum_{r\in Q_n} (-1)^{v(r)} D^n_r(Z) Z_1 \Big[-\overline{P^{(n)}_r}(Z) Z + (n+1) P^{(n)}_r(Z)\Big],
\end{aligned}$$

где N_r – число элементов разбиения r, т.е. $N_r = k$, если $r = (n_1, \ldots, n_k)$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ – вектор-строка, состоящая из нулей и единицы, стоящей на i-том месте, так что вектор $r + e_i$ отличается от r одним элементом, который больше исходного на единицу; $\overline{P^{(n)}_r}(Z) = (P^n_r(x))'_x|_{x=Z}$. Замечаем, что каждый элемент Q_{n+1} может быть получен из некоторого элемента Q_n с помощью операции $r \mapsto r + e_i$, описанной выше, или с помощью операции $r \mapsto (r, 1)$. Кроме того, очевидно, что $(-1)^{v(r+e_i)} = (-1)^{v(r)+1}$ (число чётных элементов разбиения изменяется на единицу) и $(-1)^{v(r,1)} = (-1)^{v(r)}$

(число чётных элементов разбиения не меняется). В результате первой операции некоторые разбиения числа $n+1$ могут быть одинаковыми, но так как их коэффициенты чётности совпадают, то после приведения подобных полиномиальные множители сохраняют порядок и положительность своих коэффициентов. Очевидно также, что $D_r^n(Z)Z_1 = D_{(r,1)}^{n+1}(Z)$. Покажем, что выражение, стоящее в квадратных скобках – полином с неотрицательными коэффициентами. Пусть $P_r^n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ $(a_k \geqslant 0)$. Тогда

$$-\overline{P_r^{(n)}}(Z)Z + (n+1)P_r^{(n)}(Z) = \sum_{k=0}^n (n+1-k)a_k Z^k,$$

коэффициенты положительны. Итак, имеем

$$A_{n+1} = (-1)^{n+1} \sum_{r \in Q_{n+1}} (-1)^{v(r)} D_r^{n+1}(Z) P_r^{(n+1)}(Z).$$

Формула (11) доказана. Из условия вполне монотонности функции Z_1 следует, что все чётные производные от Z отрицательны. Отсюда следует, что $(-1)^{v(r)} D_r^n(Z) \geqslant 0$, и вполне монотонность Z^{-1} доказана. □

Пусть $L_a(\lambda) = -m\lambda$ $(m \geqslant 0)$. Пользуясь тем, что $\phi_1(c,d) = -g'_{(c,d)}(\lambda, c)$ и $\psi_1(c,d) = h'_{(c,d)}(\lambda, c)$, получаем

$$\begin{aligned} K_a(\lambda, y) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{h_{(a,y)}(\lambda, a+\epsilon)/\epsilon}{m\lambda + (1 - g_{(a,y)}(\lambda, a+\epsilon))/\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{h_{(a,y)}(\lambda, a+\epsilon)}{m\lambda\epsilon + (1 - g_{(a,y)}(\lambda, a+\epsilon))}. \end{aligned}$$

Числитель допредельного выражения – вполне монотонная функция. Очевидно также, что знаменатель этого выражения удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, всё допредельное выражение – вполне монотонная функция как произведение вполне монотонных функций. Отсюда $K_a(\lambda, y)$ – вполне монотонная функция как предел вполне монотонных функций. Заметим, что $g_{(a,y)}(0, a+\epsilon) + h_{(a,y)}(0, a+\epsilon) = 1$ при всех достаточно малых ϵ. Отсюда следует, что $K_a(0, y) = 1$, и значит $K_a(\lambda, y)$ – получается в результате преобразования Лапласа некоторой невырожденной функции распределения вероятностей на полуоси. То же справедливо относительно $K_b(\lambda, y)$ $(a \leqslant y < b)$ при $L_b(\lambda) = m\lambda$. В дальнейшем мы докажем, что эти распределения являются распределениями моментов первого выхода из отрезков $[a, y)$ и $(y, b]$ (соответственно) некоторого марковского процесса.

Нетрудно показать, что для примера, рассмотренного в начале статьи, краевые переходные производящие функции определяются значениями

$$L_a(\lambda) = -\sqrt{2\lambda}, \quad L_b(\lambda) = \sqrt{2\lambda}.$$

Математическое ожидание на границе. Для нахождения лямбда-характеристического оператора, а также стационарного распределения процесса нам понадобятся математические ожидания времен первого выхода из полузамкнутых интервалов. Предположим, что эти первые моменты существуют. Для их вычисления мы используем полученные формулы для полумарковских переходных производящих функций. Обозначим

$$m^{(g)}_{(c,d)}(x) \equiv E_x(\sigma_{(c,d)}; X_{\sigma_{(c,d)}} = c) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, g_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0},$$

$$m^{(h)}_{(c,d)}(x) \equiv E_x(\sigma_{(c,d)}; X_{\sigma_{(c,d)}} = d) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, h_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0},$$

$$n_a(y|\,x) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, k_a(\lambda, y|\,x)\right|_{\lambda=0}, \quad n_b(y|\,x) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\, k_b(\lambda, y|\,x)\right|_{\lambda=0},$$

$$M_a(y) = n_a(y|\,a) = E_a\sigma_{[a,y)}, \quad M_b(y) = n_b(y|\,b) = E_b\sigma_{(y,b]}.$$

При сделанных предположениях справедливо

$$-\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} g'_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0} = (m^{(g)}_{(c,d)})'(x),$$

$$-\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} h'_{(c,d)}(\lambda, x)\right|_{\lambda=0} = (m^{(h)}_{(c,d)})'(x).$$

Обозначим $G_{(c,d)}(x) = g_{(c,d)}(0, x)$ $(H_{(c,d)}(x) = h_{(c,d)}(0, x))$ – вероятности первого выхода на левую (правую) границы интервала. Учитывая равенство $G_{(a,y)}(x) + H_{(a,y)}(x) = 1$ и его следствие $-G'_{(a,y)}(a) = H'_{(a,y)}(a)$, получаем формулы (см. [5])

$$M_a(y) = \frac{\mu_a + m'_{(a,y)}(a)}{H'_{(a,y)}(a)}, \tag{12}$$

$$M_b(y) = \frac{-\mu_b - m'_{(y,b)}(b)}{H'_{(y,b)}(b)}, \tag{13}$$

где

$$\mu_a = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} L_a(\lambda)\right|_{\lambda=0} \geqslant 0, \quad \mu_b = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} L_b(\lambda)\right|_{\lambda=0} \leqslant 0,$$

$m_{(c,d)}(x) = m^{(g)}_{(c,d)}(x) + m^{(h)}_{(c,d)}(x)$ – среднее время первого выхода из интервала (c, d).

Стационарное распределение. В работе [5] получена формула для стационарного распределения процесса $Q(y) \equiv \lim_{t\to\infty} Q_t(y|\, x)$, где $Q_t(y|\, x) = P_x(X_t \leqslant y)$:

$$Q(y) = \frac{\nu_a(y)}{\nu_a(y) + \nu_b(y)}, \tag{14}$$

$\nu_a(y) > 0$, $\nu_b(y) > 0$, при этом

$$\nu_a(y) = -m'_{(a,y)}(y) + \frac{H'_{(a,y)}(y)}{H'_{(a,y)}(a)} \,(\mu_a + m'_{(a,y)}(a)),$$

$$\nu_b(y) = m'_{(y,b)}(y) + \frac{H'_{(y,b)}(y)}{H'_{(y,b)}(b)} \,(-\mu_b - m'_{(y,b)}(b)).$$

Нетрудно показать [5], что

$$\frac{H'_{(c,d)}(c)}{H'_{(c,d)}(d)} \to 1 \quad (d - c \to 0).$$

Также легко показать, что $m'_{(c,d)}(c) \to 0$, $m'_{(c,d)}(d) \to 0$ при $d - c \to 0$. Отсюда $\nu_a(y) \to \mu_a$ $(y \to a)$ и $\nu_b(y) \to -\mu_b$ $(y \to b)$. Следовательно,

$$Q(b-) = \frac{\nu_a(b)}{\nu_a(b) - \mu_b}, \tag{15}$$

и эта величина меньше 1, если $-\mu_b > 0$. Кроме того,

$$Q(a+) = \frac{\mu_a}{\mu_a + \nu_b(a)}, \tag{16}$$

и эта величина больше 0, если $\mu_a > 0$. Положительность $1 - Q(b-)$ $(Q(a+))$ означает или наличие интервалов постоянства на правой (левой) границе интервала $[a, b]$ (что противоречит марковости непрерывного процесса: пример – процесс, рассмотренный в начале статьи), или тот случай замедленного отражения, который рассмотрен в книге [2], когда множество канторовского типа имеет положительную меру.

Мы рассмотрим случай замедленного отражения, используя полумарковский метод исследования, дадим некоторое достаточное условие локальной марковости полумарковского процесса, сформулированное в терминах параметров L_a, L_b, и докажем, что процесс с такими параметрами существует, причем предельные вероятности пребывания процесса на левой и правой границе интервала положительны.

3. Достаточное условие марковости

Оператор R. Напомним, что процесс называется марковским (однородным во времени) в области Δ, если для любой измеримой ограниченной функции f на $\mathcal{C}$, любых $x \in \Delta$, $A \in \mathcal{F}_t$ и $t \geqslant 0$

$$E_x(f \circ \theta_t;\, A \cap \{t < \sigma_\Delta\}) = E_x(E_{X_t}(f);\, A \cap \{t < \sigma_\Delta\}). \tag{17}$$

Обозначим

$$R_\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n; u_1, \dots, u_n | \, x) = E_x \int\limits_{s_n < \sigma_\Delta} \prod_{k=1}^{n} (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{s_k})\, dt_k),$$

где $\Delta \subset [a, b]$ (интервал), $n \geqslant 2$, $\lambda_k > 0$, u_k – неотрицательная непрерывная ограниченная функция, $s_k = t_1 + \dots + t_k$, $t_k \geqslant 0$ $(k = 1, \dots, n)$. Мы исходим из того, что необходимым и достаточным условием марковости процесса является условие: при любых x, $1 \leqslant k < n$ и определённых выше параметрах справедливо

$$R_\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n;\, u_1, \dots, u_n \,|\, x) = R_\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_k;$$

$$u_1, \dots, u_{k-1}, (u_k R_\Delta(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n; u_{k+1}, \dots, u_n)) \,|\, x). \tag{18}$$

Необходимость этого условия легко вытекает из марковского свойства процесса с учётом представления $X_{s_k} = X_{s_k - t_1} \circ \theta_{t_1}$ и свойства

$t_1 < \sigma_\Delta \Rightarrow \sigma_\Delta = t_1 \dot{+} \sigma_\Delta$. Достаточность следует из взаимно однозначного соответствия множества многомерных преобразований Лапласа и множества их прообразов. Согласно этому соответствию, из (19) следует равенство (почти для всех t_k по мере Лебега)

$$E_x\left(\prod_{k=1}^{n} u_k(X_{s_k});\ s_n < \sigma_\Delta\right)$$
$$= E_x\left(\prod_{i=1}^{k} u_i(X_{s_i})\, E_{X_{s_k}}\left(\prod_{i=k+1}^{n} u_i(X_{s_i - s_k});\ s_n - s_k < \sigma_\Delta\right);\ s_k < \sigma_\Delta\right),$$

из которого по известной теореме о продолжении меры следует (17). Заметим, что для выполнения соотношения (18) достаточно выполнения для всех x и $n \geqslant 2$ хотя бы одного из двух следующих условий

$$R_\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; u_1, \ldots, u_n \,|\, x) \qquad (19)$$
$$= R_\Delta(\lambda_1;\ (u_1 R_\Delta(\lambda_2, \ldots, \lambda_n; u_2, \ldots, u_n)) \,|\, x),$$

$$R_\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; u_1, \ldots, u_n \,|\, x) \qquad (20)$$
$$= R_\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1};\ u_1, \ldots, u_{n-2}, (u_{n-1}(R_\Delta(\lambda_n;\ u_n)) \,|\, x).$$

Непрерывность функций R в граничных точках. Пусть $\Delta = [a, c)$, где $a < c \leqslant b$. Нетрудно доказать, что функция

$$R_\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ u_1, \ldots, u_n) \quad (\lambda_k > 0, \quad k = 1, \ldots, n)$$

непрерывна в любой точке $x \in (a, c)$. Докажем, что она непрерывна также в точке a.

Обозначим $\Delta_0 = (a, c)$. Таким образом, $\sigma_\Delta = \sigma_{\Delta_0} \dot{+} \sigma_\Delta$ и, следовательно,

$$R_\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ u_1, \ldots, u_n | \, x)$$
$$= R_{\Delta_0}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ u_1, \ldots, u_n | \, x) + E_x \int\limits_{\sigma_{\Delta_0} \leqslant s_n < \sigma_\Delta} \prod_{k=1}^{n} \left(e^{-\lambda_k t_k}\, u_k(X_{s_k})\, dt_k\right).$$

Разделим область интегрирования в последнем интеграле на n частей:

$$S_0 = \{\sigma_{\Delta_0} \leqslant s_1,\ s_n < \sigma_\Delta\},$$
$$S_k = \{s_k < \sigma_{\Delta_0} \leqslant s_{k+1},\ s_n < \sigma_\Delta\} \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
&E_x \int\limits_{S_0} \prod_{i=1}^{n} (e^{-\lambda_i t_i} u_i(X_{s_i})\,dt_i)\\
&= E_x e^{-\lambda_1 \sigma_{\Delta_0}} \int\limits_{\sigma_{\Delta_0}+s'_n<\sigma_\Delta} \prod_{i=1}^{n} (e^{-\lambda_i t'_i} u_i(X_{\sigma_{\Delta_0}+s'_i})\,dt'_i),
\end{aligned}
$$

где $t'_1 = t_1 - \sigma_{\Delta_0}$, $t'_i = t_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$, $s'_i = t'_1 + \dots + t'_i$. Учитывая, что $\sigma_\Delta - \sigma_{\Delta_0} = \sigma_\Delta \circ \theta_{\sigma_{\Delta_0}}$ и $X_{\sigma_{\Delta_0}+t} = X_t \circ \theta_{\sigma_{\Delta_0}}$, получаем, что последнее выражение равно

$$
E_x e^{-\lambda_1 \sigma_{\Delta_0}} \biggl(\int\limits_{s'_n<\sigma_\Delta} \prod_{i=1}^{n} (e^{-\lambda_i t'_i} u_i(X_{s'_i})\,dt'_i) \circ \theta_{\sigma_{\Delta_0}} \biggr).
$$

Используя полумарковское свойство процесса, а также то, что $P_c(\sigma_\Delta = 0) = 1$, получаем

$$
E_x e^{-\lambda_1 \sigma_{\Delta_0}} R_\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n;\, u_1, \dots, u_n \,|\, a).
$$

Далее, имеем

$$
\begin{aligned}
&E_x \int\limits_{S_k} \prod_{i=1}^{n} (e^{-\lambda_i t_i} u_i(X_{s_i})\,dt_i)\\
&= E_x \int\limits_{s_k<\sigma_{\Delta_0}} \prod_{i=1}^{k} (e^{-\lambda_i t_i} u_i(X_{s_i})\, e^{-\lambda_{k+1}(\sigma_{\Delta_0}-s_k)}\,dt_i)\\
&\qquad \times \biggl(\int\limits_{s'_{k,n}<\sigma_\Delta} \prod_{i=k+1}^{n} (e^{-\lambda_i t'_i} u_i(X_{s'_{k,i}})\,dt'_i) \circ \theta_{\sigma_{\Delta_0}} \biggr)\\
&= E_x e^{-\lambda_{k+1} \sigma_{\Delta_0}} \int\limits_{s_k<\sigma_{\Delta_0}} \prod_{i=1}^{k} (e^{-(\lambda_i-\lambda_{k+1}) t_i} u_i(X_{s_i})\,dt_i)\, R_\Delta\\
&\qquad \times (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n;\, u_{k+1}, \dots, u_n \,|\, a),
\end{aligned}
$$

где $t'_{k+1} = t_{k+1} - (\sigma_{\Delta_0} - s_k)$, $t'_i = t_i$ $(k+2 \leqslant i \leqslant n)$, $s'_{k,i} = t'_{k+1} + \dots + t'_i$. В результате мы получили формулу

$$
q_1(x) = R_{\Delta_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_n;\, u_1, \dots, u_n \,|\, x) + q_1(a) E_x e^{-\lambda_1 \sigma_{\Delta_0}}
$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} q_{k+1}(a) E_x e^{-\lambda_{\lambda_{k+1}}\sigma_{\Delta_0}} \int\limits_{s_k<\sigma_{\Delta_0}} \prod_{i=1}^{k} (e^{-(\lambda_i-\lambda_{k+1})t_i} u_i(X_{s_i})\,dt_i),$$

где $q_i(y) = R_\Delta(\lambda_i,\ldots,\lambda_n;\, u_i,\ldots,u_n \,|\, y)$ $(y = x, a)$. В этой формуле, как нетрудно доказать (см. ниже), первый член правой части стремится к нулю при $x \to a$. То же относится к членам суммы $n-1$ слагаемого, где присутствуют интегралы по множествам $\{s_k < \sigma_{\Delta_0}\}$. Множитель $E_x \exp(-\lambda_1 \sigma_{\Delta_0}) = g_{(a,c)}(\lambda_1, x) + h_{(a,c)}(\lambda_1, x)$ стремится к единице при $x \to a$. Отсюда вытекает непрерывность функции $q_1(x)$ в точке a. Аналогично доказывается непрерывность функции $R_{\Delta_1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n;\, u_1,\ldots,u_n \,|\, x)$ в точке b, где $\Delta_1 = (c, b]$ $(a \leqslant c < b)$.

Характеристический оператор. Рассмотрим локальный оператор A_λ (названный в работе [4] лямбда-характеристическим первого рода) на множестве непрерывных функций ϕ, для которых существует предел в любой точке $x \in [a, b]$:

$$A_\lambda \phi(x) \equiv A_\lambda(\phi \,|\, x) = \lim_{r\to 0} \frac{f_{\tau_r}(\lambda, \phi \,|\, x) - \phi(x)}{m_r(x)},$$

где $\tau_r = \sigma_{\Delta_r}$ и $\Delta_r = (x-r, x+r) \cap [a, b]$ – момент первого выхода из r-окрестности начальной точки; $m_r(x) = E_x(\tau_r)$. Нетрудно доказать [4], что если функция ϕ непрерывна в точке x, то для непрерывного процесса справедлива формула

$$A_\lambda \phi(x) = A_0 \phi(x) + \phi(x)\, A_\lambda 1(x), \tag{22}$$

где $A_\lambda 1(x) = \lim\limits_{r\to 0} (f_{\tau_r}(\lambda;\, 1|\, x) - 1)/m_{\tau_r}(x)$.

Заметим, что

$$m_{\tau_r}(x) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(1 - f_{\tau_r}(\lambda,\, 1 \,|\, x)),$$

если этот предел существует. Учитывая близость этих нормирующих множителей, в некоторых случаях удобнее использовать лямбда-характеристический оператор второго рода

$$\widetilde{A}_\lambda \phi(x) \equiv \widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, x) = \lim_{r\to 0} \frac{f_{\tau_r}(\lambda, \phi \,|\, x) - \phi(x)}{\lambda^{-1}(1 - f_{\tau_r}(\lambda,\, 1 \,|\, x))} \quad (\lambda > 0),$$

особенно в том случае, когда математическое ожидание не существует. Если же лямбда-характеристический оператор первого рода определён, и ϕ и 1 принадлежат области его определения, то

$$\widetilde{A}_\lambda \phi(x) = \frac{A_\lambda \phi(x)}{-\lambda^{-1} A_\lambda 1(x)}.$$

Известно [4], что для диффузионного марковского процесса оператор $A_\lambda \phi(x)$ линеен по параметру λ: $A_\lambda 1(x) = -\lambda$ $(a < x < b)$. Мы докажем, что это свойство линейности оператора является достаточным для того, чтобы полумарковский процесс был марковским.

Характеристический оператор от функции R. Пусть

$$(x-r, x+r) \cap [a,b] \subset \Delta, \quad x \in [a,b].$$

Обозначим $q_k(x) = R_\Delta(\lambda_k, \dots, \lambda_n; u_k, \dots, u_n | x)$. Имеем

$$\begin{aligned} f_{\tau_r}(\lambda_1, q_1 | x) &= E_x \biggl(e^{-\lambda_1 \tau_r} E_{X_{\tau_r}} \int\limits_{s_n < \sigma_\Delta} \prod_{k=1}^n (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{s_k})\, dt_k) \biggr) \\ &= E_x \biggl(e^{-\lambda_1 \tau_r} \biggl(\int\limits_{s_n < \sigma_\Delta} \prod_{k=1}^n (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{s_k})\, dt_k) \circ \theta_{\tau_r} \biggr) \biggr) \\ &= E_x \int\limits_0^{\sigma_\Delta \circ \theta_{\tau_r}} e^{-\lambda_1(\tau_r + t_1)} u_1(X_{t_1} \circ \theta_{\tau_r}) \\ &\qquad \times \int\limits_{s'_n < \sigma_\Delta \circ \theta_{\tau_r} - t_1} \prod_{k=2}^n (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{s_k} \circ \theta_{\tau_r})\, dt_k)\, dt_1. \end{aligned}$$

Делая замену $v = \tau_r + t_1$ и используя равенства $\sigma_\Delta \circ \theta_{\tau_r} = \sigma_\Delta - \tau_r$ и $X_{s_k} \circ \theta_{\tau_r} = X_{\tau_r + s_k}$, получаем

$$E_x \int\limits_{\tau_r}^{\sigma_\Delta} e^{-\lambda_1 v} u_1(X_v) \int\limits_{s'_n < \sigma_\Delta - v} \prod_{k=2}^n (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{v + s'_k})\, dt_k)\, dv,$$

где $s'_k = t_2 + \dots + t_k$, откуда получаем

$$f_{\tau_r}(\lambda_1, q_1 | x) - q_1(x) = -E_x \int\limits_{t_1 < \tau_r,\, s_n < \sigma_\Delta} \prod_{k=1}^n (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{s_k})\, dt_k).$$

Разложим множество

$$\{t_1 < \tau_r,\, s_n < \sigma_\Delta\} = \{s_n < \tau_r\} \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} \{s_k < \tau_r \leqslant s_{k+1} < s_n < \sigma_\Delta\}$$

и рассмотрим интеграл по множеству с индексом $k < n$.

$$\begin{aligned}
&E_x \int\limits_{s_k<\tau_r\leqslant s_{k+1}<s_n<\sigma_\Delta} \prod_{k=1}^{n} (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{s_k})\, dt_k) \\
&= E_x \int\limits_{s_k<\tau_r} \prod_{i=1}^{k} \biggl(e^{-\lambda_i t_i} u_i(X_{s_i}) \biggl(\int\limits_{\tau_r - s_k}^{\sigma_\Delta - s_k} e^{-\lambda_{k+1} t_{k+1}} u_i(X_{s_{k+1}}) \\
&\qquad \times \biggl(\int\limits_{s_n - s_{k+1}<\sigma_\Delta - s_{k+1}} \prod_{j=k+2}^{n} (e^{-\lambda_j t_j} u_j(X_{s_j})\, dt_j) \biggr) dt_{k+1} \biggr) dt_i \biggr) \\
&= E_x \int\limits_{s_k<\tau_r} \prod_{i=1}^{k} \biggl(e^{-\lambda_i t_i} u_i(X_{s_i}) e^{-\lambda_{k+1}(\tau_r - s_k)} \\
&\qquad \times \biggl(\int\limits_{s_n - s_k<\sigma_\Delta} \prod_{j=k+1}^{n} (e^{-\lambda_j t_j} u_j(X_{s_j - s_k})\, dt_j) \circ \theta_{\theta_r} \biggr) dt_i \biggr) \\
&= E_x \biggl(q_{k+1}(X_{\tau_r}) e^{-\lambda_{k+1}\tau_r} \int\limits_{s_k<\tau_r} \prod_{i=1}^{k} (e^{-(\lambda_i - \lambda_{k+1}) t_i} u_i(X_{s_i})\, dt_i) \biggr).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
f_{\tau_r}(\lambda_1,\, q_1 | \, x) - q_1(x) = -E_x \int\limits_{s_n<\tau_r} \prod_{k=1}^{n} (e^{-\lambda_k t_k} u_k(X_{s_k})\, dt_k) \\
- \sum_{k=1}^{n-1} E_x \biggl(q_{k+1}(X_{\tau_r}) e^{-\lambda_{k+1}\tau_r} \int\limits_{s_k<\tau_r} \prod_{i=1}^{k} (e^{-(\lambda_i - \lambda_{k+1}) t_i} u_i(X_{s_i})\, dt_i) \biggr). \qquad (23)
\end{aligned}$$

Из непрерывности случайного процесса (X_t) и всех функций u_k и q_{k+1} следует, что при $r \to 0$ предыдущая разность эквивалентна

$$-\prod_{k=1}^{n} u_k(x) E_x \int\limits_{s_n<\tau_r} \prod_{k=1}^{n} (e^{-\lambda_k t_k}\, dt_k)$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} q_{k+1}(x) \prod_{i=1}^{k} u_i(x) E_x\biggl(e^{-\lambda_{k+1}\tau_r} \int\limits_{s_k<\tau_r} \prod_{i=1}^{k}(e^{-(\lambda_i-\lambda_{k+1})t_i}\,dt_i)\biggr).$$

Далее мы воспользуемся формулой

$$e^{-\lambda_{k+1}T} \int\limits_{s_k<T} \prod_{i=1}^{k}(e^{-(\lambda_i-\lambda_{k+1})t_i}\,dt_i) = \sum_{i=1}^{k+1} e^{-\lambda_i T} Q_i(1,k+1) \quad (T>0), \tag{24}$$

где

$$Q_i(k,n) \equiv \prod_{k\leqslant j\leqslant n,\, j\neq i} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1} \quad (k\leqslant n-1,\ \lambda_a\neq\lambda_b\ (a\neq b)).$$

Формула (24) доказывается по индукции с использованием тождества

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k(1,n) = 0 \quad (n\geqslant 2) \tag{25}$$

(которое также доказывается по индукции). Первый интеграл также можно представить этой формулой: при $\lambda_{n+1}=0$

$$\int\limits_{s_n<T} \prod_{i=1}^{n}(e^{-\lambda_i t_i}\,dt_i) = \sum_{i=1}^{n+1} e^{-\lambda_i T} Q_i(1,n+1) \quad (T>0). \tag{26}$$

С использованием формулы (25) можно записать

$$\sum_{i=1}^{k+1} e^{-\lambda_i T} Q_i(1,k+1) = \sum_{i=1}^{k+1}(e^{-\lambda_i T}-1)\, Q_i(1,k+1) \quad (1\leqslant k\leqslant n),$$

что для $k=n$ приводит к тождеству

$$\sum_{i=1}^{n+1} e^{-\lambda_i T} Q_i(1,n+1) = -\sum_{i=1}^{n}(e^{-\lambda_i T}-1)\, Q_i(1,n)\lambda_i^{-1}.$$

Обозначим

$$\beta_r(\lambda_i,\,\lambda_j\,|\,x)=\frac{\lambda_i^{-1}(1-f_{\tau_r}(\lambda_i,\,1\,|\,x))}{\lambda_j^{-1}(1-f_{\tau_r}(\lambda_j,\,1\,|\,x))}\quad(\lambda_i,\,\lambda_j>0),$$

$$\beta(\lambda_i,\,\lambda_j\,|\,x)=\lim_{r\to 0}\beta_r(\lambda_i,\,\lambda_j\,|\,x).$$

Если последний предел существует, то

$$\widetilde{A}_{\lambda_1}q_1(x)\equiv\lim_{r\to 0}\frac{f_{\tau_r}(\lambda_1,\,q_1|\,x)-q_1(x)}{\lambda_1^{-1}(1-f_{\tau_r}(\lambda_1,\,1\,|\,x))}=-\Psi(x),$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(x)=&\prod_{k=1}^{n}u_k(x)\sum_{k=1}^{n}\beta(\lambda_k,\,\lambda_1\,|\,x)Q_k(1,n)\\&-\sum_{k=1}^{n-1}q_{k+1}(x)\prod_{i=1}^{k}u_i(x)\sum_{i=1}^{k+1}\beta(\lambda_i,\lambda_1|\,x)\,\lambda_i\,Q_i(1,k+1).\end{aligned}\tag{27}$$

Функция R от характеристического оператора. Рассмотрим теперь, чему равна суперпозиция операторов $R(\lambda,\,\widetilde{A}_\lambda\phi\,|\,x)$. Для полумарковского блуждания (ступенчатого полумарковского процесса) соотношение операторов R и $\widetilde{A}$ (дискретный вариант) устанавливается путём непосредственного разложения интеграла в сумму вычисляемых слагаемых. Покажем это.

Обозначим $\alpha_1(\xi)=\inf\{t\geqslant 0:\,\xi(t)\neq\xi(0)\}$ и α_n – n-тая итерация таких марковских моментов, т.е. $\alpha_{n+1}=\alpha_n\dot{+}\alpha_1$. Для блуждания справедливо $P_x(\alpha_1>0)=1$. Кроме того, с вероятностью 1 на каждом ограниченном интервале $[0,t)$ полумарковское блуждание имеет конечное число скачков, т.е. моментов $0<\alpha_n\leqslant t$. В этом случае

$$\widetilde{A}_\lambda\phi(x)=\frac{f_{\alpha_1}(\lambda,\phi\,|\,x)-\phi(x)}{\lambda^{-1}(1-f_{\alpha_1}(\lambda,\,1\,|\,x))}.$$

Обозначив N_Δ число скачков до момента первого выхода из множества Δ, имеем

$$
\begin{aligned}
&R_\Delta(\lambda,\, \widetilde{A}_\lambda\phi \,|\, x) \equiv E_x \int\limits_0^{\sigma_\Delta} e^{-\lambda t}\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_t)\, dt \\
&= E_x\biggl(\int\limits_0^{\sigma_\Delta} e^{-\lambda t}\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_t)\, dt;\, N_\Delta < \infty\biggr) + E_x\biggl(\int\limits_0^{\sigma_\Delta} e^{-\lambda t}\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_t)\, dt;\, N_\Delta = \infty\biggr) \\
&= E_x\biggl(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-\lambda t}\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_t)\, dt;\, N_\Delta = n\biggr) \\
&+ E_x\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-\lambda t}\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_t)\, dt;\, N_\Delta = \infty\biggr) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\biggl(\int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} e^{-\lambda t}\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_t)\, dt;\, k \leqslant N_\Delta\biggr) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\Bigl(\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_{\alpha_{k-1}})\lambda^{-1}(e^{-\lambda\alpha_{k-1}} - e^{-\lambda\alpha_k});\, k-1 < N_\Delta\Bigr) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\Bigl(\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_{\alpha_{k-1}})\lambda^{-1}e^{-\lambda\alpha_{k-1}}(1 - e^{-\lambda\alpha_1}\circ\theta_{\alpha_{k-1}});\, k-1 < N_\Delta\Bigr) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\Bigl(\widetilde{A}_\lambda(\phi \,|\, X_{\alpha_{k-1}})\lambda^{-1}e^{-\lambda\alpha_{k-1}}(1 - f_{\alpha_1}(\lambda,\, 1 \,|\, X_{\alpha_{k-1}}));\, k-1 < N_\Delta\Bigr) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\Bigl(e^{-\lambda\alpha_{k-1}}(f_{\alpha_1}(\lambda,\, \phi \,|\, X_{\alpha_{k-1}}) - \phi(X_{\alpha_{k-1}}));\, k-1 < N_\Delta\Bigr) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E_x\Bigl(e^{-\lambda\alpha_k}\phi(X_{\alpha_k}) - e^{-\lambda\alpha_{k-1}}\phi(X_{\alpha_{k-1}});\, k-1 < N_\Delta\Bigr) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E_x\biggl(\sum_{k=1}^{n}(e^{-\lambda\alpha_k}\phi(X_{\alpha_k}) - e^{-\lambda\alpha_{k-1}}\phi(X_{\alpha_{k-1}}));\, N_\Delta = n\biggr) \\
&+ E_x\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}(e^{-\lambda\alpha_k}\phi(X_{\alpha_k}) - e^{-\lambda\alpha_{k-1}}\phi(X_{\alpha_{k-1}}));\, N_\Delta = \infty\biggr) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E_x\bigl(e^{-\lambda\alpha_n}\phi(X_{\alpha_n}) - \phi(X_0));\, N_\Delta = n\bigr) + E_x\bigl(-\phi(X_0));\, N_\Delta = \infty\bigr) \\
&= E_x\Bigl(e^{-\lambda\sigma_\Delta}\phi(X_{\sigma_\Delta});\, \sigma_\Delta < \infty\Bigr) - \phi(x) \equiv f_{\sigma_\Delta}(\lambda, \phi \,|\, x) - \phi(x).
\end{aligned}
$$

Мы получили формулу

$$
R_\Delta(\lambda,\, \widetilde{A}_\lambda\phi \,|\, x) = f_{\sigma_\Delta}(\lambda, \phi \,|\, x) - \phi(x). \tag{28}
$$

В частности, если $P_x(\sigma_\Delta < \infty) = 0$, то $R_\Delta(\lambda,\, \widetilde{A}_\lambda\phi \,|\, x) = -\phi(x)$. Так будет, если $\Delta = \mathbb{X}$ (пространство всех значений траектории процесса). В этом случае индекс Δ опускается:

$$R(\lambda,\, \widetilde{A}_\lambda\phi \,|\, x) = -\phi(x).$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы доказать подобную формулу для непрерывного полумарковского процесса.

Обозначим L_r отображение $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ вида $(L_r\xi)(t) = \xi(\tau_r^n)$, если $\tau_r^n(\xi) \leqslant t < \tau_r^{n+1}(\xi)$ и τ_r^n – n-тая итерация τ_r $(\tau_r^{n+1} = \tau_r^n + \tau_r \circ \theta_{\tau_r^n})$. Очевидно, что $\tau_r^n(\xi) \to \infty$ $(n \to \infty)$, и функция $L_r\xi(t)$ определена для всех $t \geqslant 0$. Таким образом $L_r\xi$ – это некоторая квантованная версия траектории – такая ступенчатая траектория, расстояние до которой от исходной траектории в равномерной метрике не больше r. Пусть $P_x^r = P_x \circ L_r^{-1}$ – индуцированная мера на множестве таких траекторий. Если (P_x) – полумарковское семейство мер, то и (P_x^r) – также полумарковское семейство мер, определяющее полумарковское блуждание. Для этого полумарковского блуждания справедлива формула

$$R_\Delta^r(\lambda,\, \widetilde{A}_\lambda^r\phi \,|\, x) = f_{\sigma_\Delta}^r(\lambda, \phi \,|\, x) - \phi(x) \quad (x \in [a,b]), \tag{29}$$

где по определению

$$\widetilde{A}_\lambda^r\phi(x) = \frac{f_{\tau_r}(\lambda, \phi \,|\, x) - \phi(x)}{\lambda^{-1}(1 - f_{\tau_r}(\lambda,\, 1 \,|\, x))}.$$

В книге [4, с. 110] доказан следующий результат.

Теорема 2. *Если P_x – семейство мер непрерывного полумарковского процесса, функция ϕ непрерывна и ограничена на открытом множестве Δ и выполняются следующие условия:*

(a) *существует $M > 0$ такое, что при всех $r > 0$*

$$\sup_{x \in \Delta} |\widetilde{A}_\lambda^r\phi(x)\,| \leqslant M;$$

(b) *для любого $x \in \Delta$ $\quad \widetilde{A}_\lambda^r\phi(x) \to \widetilde{A}_\lambda\phi(x)$ $(r \to 0)$;*

(c) *функция $\widetilde{A}_\lambda\phi$ непрерывна на Δ,* *то выполняется равенство* $R_\Delta(\lambda, \widetilde{A}_\lambda \phi \,|\, x) = f_{\sigma_\Delta}(\lambda, \phi \,|\, x) - \phi(x)$.

Доказательство основано на применении теоремы Егорова (о равномерной сходимости на подмножестве с мерой сколь угодно близкой к мере всего множества) к мере $\mu_0(S) \equiv R_\Delta(\lambda,\, I_S \,|\, x)$. □

Для применения теоремы 2 при $\lambda = \lambda_1$ к функции $\phi(x) = q_1(x) \equiv R(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\, \phi_1, \ldots, \phi_n \,|\, x)$ $(x \in [a, b])$, для которой выполнены условия b и c, достаточно проверить выполнение условия ограниченности a. Из формулы (23) следует, что

$$|f_{\tau_r}(\lambda_1,\, q_1 \,|\, x) - q_1(x)| \leqslant U_n E_x \int\limits_{s_n < \tau_r} \prod_{k=1}^{n} (e^{-\lambda_k t_k}\, dt_k)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} U_k \overline{q_{k+1}} E_x \left(e^{-\lambda_{k+1}\tau_r} \int\limits_{s_k < \tau_r} \prod_{i=1}^{k} (e^{-(\lambda_i - \lambda_{k+1}) t_i}\, dt_i) \right),$$

где

$$U_k = \prod_{i=1}^{k} \sup\{u_i(x) : x \in \Delta\},$$

$$\overline{q_k} = \sup\{q_k(x) : x \in \Delta\} \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Очевидно, что $\overline{q_{k+1}} \leqslant (U_n/U_k) \prod_{i=k+1}^{n} \lambda_i^{-1}$. Отсюда на основании формул (24), (26) и (25) получаем неравенство

$$|f_{\tau_r}(\lambda_1,\, q_1 \,|\, x) - q_1(x)| \leqslant U_n \sum_{k=1}^{n} |Q_k(1, n)| \lambda_k^{-1} (1 - f_{\tau_r}(\lambda_k,\, 1 \,|\, x))$$

$$+ U_n \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{i=k+1}^{n} \lambda_i^{-1} \sum_{i=1}^{k+1} |Q_i(1, k+1)| (1 - f_{\tau_r}(\lambda_i,\, 1 \,|\, x)),$$

где $\lambda_i > 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$. Пользуясь неравенствами

$$1 > \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-y}} > x/y \quad (x < y),$$

получаем $(1 - f_{\tau_r}(\lambda_i,\, 1 \,|\, x))/(1 - f_{\tau_r}(\lambda_1,\, 1 \,|\, x)) \leqslant \lambda_i/\lambda_0$, где $\lambda_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$. Отсюда следует равномерная по x и r ограниченность отношения

$$\widetilde{A}^r_{\lambda_1} q_1(x) \equiv \frac{f_{\tau_r}(\lambda_1,\, q_1 \,|\, x) - q_1(x)}{\lambda_1^{-1}(1 - f_{\tau_r}(\lambda_1,\, 1 \,|\, x))}.$$

Теперь из теоремы 2 следует, что

$$R(\lambda_1,\, \widetilde{A}_{\lambda_1} q_1 \,|\, x) = -q_1(x). \tag{30}$$

Из формулы (27) следует, что

$$R(\lambda_1,\, \Psi \,|\, x) = q_1(x) \equiv R(\lambda_1, \dots, \lambda_n;\, u_1, \dots, u_n \,|\, x).$$

Теорема 3 (Достаточное условие марковости)**.** *Непрерывный полумарковский процесс с линейным по λ лямбда-характеристическим оператором от единицы вида $A_\lambda 1(x) = b(x)\lambda$, где $b(x)$ – некоторая отличная от нуля функция, является марковским процессом.*

Доказательство. В условиях теоремы при любых $\lambda_1,\, \lambda_2 > 0$ получаем $\beta(\lambda_1,\, \lambda_2 \,|\, x) = 1$. Тогда первое слагаемое функции Ψ в выражении (27) равно нулю. Во втором слагаемом при любом $n \geqslant 2$ внутренняя сумма становится равной нулю при любом $k \geqslant 2$ (доказывается по индукции). При $k = 1$ внутренняя сумма равна -1. Отсюда получаем

$$\Psi(x) = u_1(x) q_2(x)$$

– как раз то, что на основании формулы (30) требовалось для доказательства формулы (19). □

4. Марковский процесс с замедленным отражением

Рассмотрим лямбда-характеристический оператор A_λ в граничных точках интервала. Имеем

$$A_\lambda f(a) \equiv \lim_{r \to 0} \frac{f(a+r) K_a(\lambda, a+r) - f(a)}{M_a(a+r)}.$$

Из теоремы 1 следует, что $K_a(\lambda, a+r) = 1 + L_a(\lambda) r + o(r)$. Из формулы (12) находим асимптотику функции $M_a(a+r)$ при $r \to 0$. В этой формуле функция $m_{(a,y)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} m'' + A(x) m' + \gamma(x) = 0, \tag{31}$$

где $\gamma(x) = (\partial/\partial\lambda) B(\lambda, x)|_{\lambda=0}$, при этом $m_{(a,y)}(a) = m_{(a,y)}(y) = 0$. Решая это уравнение стандартным способом, находим, что $m'_{(a,a+r)}(a)/r$

$\to \gamma(a)$ $(r \to 0)$, если функция γ непрерывна в точке a. Далее, функция $H_{(a,y)}(x)$ в этой формуле удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}H'' + A(x)H' = 0, \tag{32}$$

при этом $H_{(a,y)}(a) = 0$, $H_{(a,y)}(y) = 1$. Решая это уравнение стандартным способом, находим, что $rH'_{(a,a+r)}(a) \to 1$ $(r \to 0)$. Отсюда получаем $M_a(a+r) = \mu_a\, r + o(r)$. Для функции f дифференцируемой в точке a получаем

$$A_\lambda f(a) = \frac{1}{\mu_a}(f'(a) + L_a(\lambda) f(a)).$$

Аналогично,

$$A_\lambda f(b) = \frac{1}{\mu_b}\,(f'(b) + L_b(\lambda) f(b)).$$

В частности, $A_\lambda 1(a) = L_a(\lambda)/\mu_a$, $A_\lambda 1(b) = L_a(\lambda)/\mu_b$. Отсюда на основании леммы 1 заключаем, что существует марковский процесс в классе изучаемых полумарковских процессов. Это процесс с параметрами

$$L_a(\lambda) = -\mu_a \lambda, \quad L_b(\lambda) = \mu_b \lambda \quad (\lambda \geqslant 0).$$

Значение его лямбда-характеристического оператора всюду равно $-\lambda$, откуда $\beta(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, x) \equiv 1$. Его переходные производящие функции на границах имеют вид

$$K_a(\lambda, y) = \frac{h'_{(a,y)}(\lambda, a)}{\mu_a \lambda - g'_{(a,y)}(\lambda, a)}, \quad K_b(\lambda, y) = \frac{-g'_{(y,b)}(\lambda, b)}{-\mu_b \lambda + h'_{(y,b)}(\lambda, b)},$$

где $\mu_a > 0$, $\mu_b < 0$ – произвольные величины – параметры отражения с замедлением, g, h – полумарковские переходные производящие функции диффузионного процесса внутри интервала. Согласно формулам (15) и (16), этот процесс имеет положительную стационарную меру пребывания на границах интервала $[a, b]$, если параметры μ_a и $-\mu_b$ положительны. Заметим, что стационарный марковский процесс с диффузионным типом внутри интервала (a, b) не может содержать интервалов постоянства на границе. Следовательно, положительная мера времени пребывания на границе нагружает несчётное множество канторовского типа, не имеющее внутренних точек. Именно к этому случаю относится содержание книги [2, п. 24, глава 5].

Процесс с мгновенным отражением. Формулы (15) и (16) применимы также к случаю отсутствия задержки на краях интервала, т.е. к процессу с мгновенно отражающими границами. Для этого случая необходимо и достаточно, чтобы $\mu_b = \mu_a = 0$. Рассмотрим пример однородного во времени и в пространстве диффузионного марковского процесса внутри интервала. Пусть переходные производящие функции g и h удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{2}\, f'' + Af' - \gamma\lambda\, f = 0.$$

В правосторонней окрестности (a,y) точки a решения соответствуют краевым условиям

$$g_{(a,y)}(\lambda,a) = h_{(a,y)}(\lambda,y) = 1, \quad g_{(a,y)}(\lambda,y) = h_{(a,y)}(\lambda,a) = 1.$$

Эти решения равны

$$g_{(a,y)}(\lambda,x) = e^{-(x-a)A}\,\frac{\sinh\,(y-x)r}{\sinh\,(y-a)r},$$

$$h_{(a,y)}(\lambda,x) = e^{(y-x)A}\,\frac{\sinh\,(x-a)r}{\sinh\,(y-a)r},$$

где $r = \sqrt{A^2+2\gamma\lambda}$, $a<x<y$. Отсюда

$$g'_{(a,y)}(\lambda,a) = -A - r\,\frac{\cosh\,(y-a)r}{\sinh\,(y-a)r},$$

$$h_{(a,y)}(\lambda,a) = e^{-(y-a)A}\,\frac{r}{\sinh\,(y-a)r},$$

и, следовательно, полумарковская переходная производящая функция в точке a марковского процесса с мгновенным отражением в точке a равна

$$K_a(\lambda,y) = \frac{r\,e^{-(y-a)A}}{A\sinh\,(y-a)r + r\,\cosh\,(y-a)r}.$$

В частности, для $A=0$ имеем $K_a(\lambda,y) = (\cosh\,(y-a)r_0)^{-1}$, где $r_0 = \sqrt{2\gamma\lambda}$. Это значение можно сопоставить с выражением, найденным исходя из интерпретации $K_a(\lambda,y)$ как функции, соответствующей первому выходу из симметричной окрестности процесса без отражения, продолженного зеркальным образом относительно точки a.

Соответствующая окрестность точки a это (a_1, y), где $a_1 = 2a - y$. Соответствующее решение для зеркально продолженного процесса:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_a \exp(-\lambda\sigma_{(a_1,y)}) &= \widetilde{g}_{(a_1,y)}(\lambda, a) + \widetilde{h}_{(a_1,y)}(\lambda, a)\\ &= \frac{\sinh{(a-a_1)r_0}}{\sinh{(y-a_1)r_0}} + \frac{\sinh{(y-a)r_0}}{\sinh{(y-a_1)r_0}}\\ &= \frac{2\sinh{(y-a)r_0}}{\sinh 2(y-a)r_0} = (\cosh{(y-a)r_0})^{-1}.\end{aligned}$$

Сопоставить наше решение с решением, полученным с помощью зеркального отражения, в случае $A \neq 0$ значительно сложнее, т.к. это требует решения дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом $A(x)$. Можно предложить такое сравнение студентам в качестве упражнения.

Литература

1. R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, *Markov processes and potential theory.* Academic Press, New York (1968).
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Наукова думка, Киев (1968).
3. Б. П. Харламов, *Критерий марковости непрерывных полумарковских процессов.* — Теор. вероятн. и ее примен., **XXV**, No. 3 (1980), 535–548.
4. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* Наука, СПб. (2001).
5. Б. П. Харламов, *Диффузионный процесс с задержкой на краях отрезка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **351** (2007), 284–297.

B. P. Harlamov. On Markov diffusion processes with delayed reflection from interval's boundary.

A continuous semi-Markov process taking values in a closed interval is considered. This process coincides with a Markov diffusion process inside the interval. Thus violation of the Markov property is possible only at extreme points of the interval. A sufficient condition for a semi-Markov process to be Markov is proved. It is proved that besides of Markov processes with instantaneous reflection from boundaries of the interval there exists a class of Markov processes with delayed reflection from them. Such a process has a positive average measure of time for its trajectory to be on the boundaries. Thus the other proof of the similar result of Gihman and Skorokhod (1968) is obtained.

Институт проблем
машиноведения РАН,
В.О., Большой пр. 61,
199178 Санкт-Петербург,
Россия

E-mail: harlamov@random.ipme.ru

Поступило 18 октября 2009 г.