Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

А. Н. Фролов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ И УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ИТЕРИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

Рассмотрим два независимых случайных процесса $\xi(t)$ и $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, заданных на одном вероятностном пространстве. Предположим, что процесс $\Lambda(t)$ принимает неотрицательные вещественные значения и имеет с вероятностью 1 непрерывные траектории, начинающиеся в нуле. Случайный процесс $\xi(\Lambda(t))$, $t \geqslant 0$, мы будем далее называть итерированным процессом. В настоящей работе мы опишем асимптотическое поведение логарифмов вероятностей больших и умеренных уклонений некоторых итерированных случайных процессов.

В частности, значительный интерес представляют итерированные процессы, построенные по однородным процессам с независимыми приращениями $\xi(t)$. Важным примером таких итерированных процессов являются обобщенные процессы Кокса, исследованию асимптотического поведения вероятностей больших уклонений которых посвящена работа автора [1]. Обобщенными процессами Кокса называются итерированные процессы, построенные по обобщенным пуассоновским процессам $\xi(t)$.

Напомним определение обобщенного пуассоновского процесса через суммы независимых случайных величин.

Пусть $\{X_k\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\nu(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{X_k\}$, λ – положительное число. Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \quad S_0 = 0.$$

Ключевые слова : итерированные случайные процессы, вероятности больших уклонений, вероятности умеренных уклонений, обобщенные процессы Кокса, процессы с независимыми приращениями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 07-01-00688.

Случайный процесс $\eta(t) = S_{\nu(\lambda t)}$ называется обобщенным пуассоновским процессом.

Учитывая это определение, случайный процесс $S(t) = S_{\nu(\Lambda(t))}$ будет обобщенным процессом Кокса. При этом $\xi(t) = S_{\nu(t)}$.

Обобщенные пуассоновские процессы и обобщенные процессы Кокса играют важную роль в качестве моделей процессов выплат в страховой и финансовой математике (подробнее см. работу [1] и библиографию к ней).

Обозначим

$$P_t = \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant \Lambda(t)x_t\Big),$$

где x_t – положительная вещественная функция такая, что $x_t = O(1)$ при $t \to \infty$. Кроме того, предположим, что $g(t)x_t^2 \to \infty$ при $t \to \infty$, где $g(t)$ – функция, определяемая свойствами $\Lambda(t)$.

Пусть граница $\Lambda(t)x_t$ в определении P_t ограничена снизу некоторой неслучайной функцией $f(t)$ такой, что $f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда вероятности P_t представляют собой вероятности больших уклонений случайного процесса $S(t)$. В одном из наиболее важных частных случаев $\Lambda(t) = \Lambda g(t)$, где Λ – случайная величина (возможно вырожденная) с $a = \operatorname{ess\,inf} \Lambda > 0$. При этом $f(t) = ag(t)x_t$.

Рассматриваемая нами граница $\Lambda(t)x_t$ является обычно случайной функцией, что вполне оправдано с точки зрения финансовых и актуарных приложений (подробнее см. [1]).

В работе автора [1] исследовано асимптотическое поведение логарифмов вероятностей больших уклонений P_t обобщенных процессов Кокса в том случае, когда $\xi(1)$ удовлетворяет одностороннему условию Крамера. В настоящей работе мы изучим предельное поведение логарифмов вероятностей больших уклонений некоторых итерированных случайных процессов. Сначала мы получим ряд достаточно общих теорем, связывающих поведение больших уклонений итерированных процессов и процесса $\xi(t)$. Затем из этих теорем мы выведем ряд результатов о поведении логарифмов вероятностей больших уклонений итерированных процессов, порожденных однородными процессами с независимыми приращениями $\xi(t)$. При этом мы будем предполагать, что $\mathbf{E}\xi(1)^2 < \infty$ и $\xi(1)$ удовлетворяет либо одностороннему условию Крамера, либо одностороннему условию Линника, либо $\xi(1)$ имеет односторонние степенные моменты порядка $p > 2$. Все упомянутые результаты справедливы, в частности, для обобщенных процессов Кокса.

2. Результаты

Пусть $\xi(t)$ и $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, – независимые случайные процессы, заданные на одном вероятностном пространстве. Пусть п.н. (почти наверное) $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(t) < \infty$ для всех $t > 0$, $\Lambda(\infty) = \infty$ и $\Lambda(t)$ имеет непрерывные неубывающие траектории. Рассмотрим итерированный случайный процесс

$$S(t) = \xi(\Lambda(t)), \quad t \geqslant 0.$$

Сформулируем сначала результат о связи асимптотического поведения логарифмов вероятностей больших уклонений $S(t)$ и поведения логарифмов соответствующих вероятностей больших уклонений случайного процесса $\xi(t)$. Такой достаточно общий результат позволит нам в дальнейшем получать разнообразные следствия при различных предположениях о структуре $\xi(t)$ и различных односторонних моментных ограничениях.

Теорема 1. *Пусть существуют такие положительные, неубывающие, непрерывные функции* $b(t)$, $z(t)$ *и* $\zeta(t)$, $b(\infty) = z(\infty) = \zeta(\infty) = \infty$, $\zeta(0) > 0$, *что равномерно по* $y \in [0,1]$ *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)b(t)\Big) = -\zeta\Big(yz(t)\Big)(1 + o(1)) \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{1}$$

Обозначим $\lambda_t = \operatorname{ess\,inf} \Lambda(t)$. *Пусть* $\lambda_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$.

Тогда равномерно по $y \in [0,1]$ *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))b(\Lambda(t))\Big) = \log \mathbf{E} e^{-\zeta\left(yz(\Lambda(t))\right)}(1 + o(1)) \tag{2}$$

при $t \to \infty$.

Заметим, что иногда (1) может быть выполнено с $o(1) = 0$ для всех $t > 0$ за счет структуры процесса $\xi(t)$. Это справедливо, например, для H-самоподобных процессов (случайных процессов, у которых конечномерные распределения $\xi(ct)$ и $c^H \xi(t)$ совпадают для всех $c > 0$). В этом случае

$$\mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)t^H\Big) = \mathbf{P}\Big(\xi(1) \geqslant yz(t)\Big),$$

$b(t) = t^H$, $\zeta(t) = -\log \mathbf{P}\big(\xi(1) \geqslant t\big)$. В частности, H-самоподобным процессом является дробное броуновское движение с показателем Хёрста H ($H = 1/2$ соответствует винеровскому процессу). Негауссовскими самоподобными процессами, для которых выполнено (1), будут строго устойчивые процессы с характеристическим показателем α и $H = 1/\alpha$. Разумеется, условие самоподобия процесса можно ослабить. Нам достаточно, чтобы совпадали распределения $\xi(t)/b(t)$ и $\xi(1)$ для всех $t > 0$. Последнее условие выполнено, если, например, $\xi(t)$ – центрированный гауссовский процесс с $\mathbf{E}\xi^2(t) = b^2(t)$ и $b(1) = 1$. Из доказательства теоремы 1 видно, что в этих случаях (2) также выполнено с $o(1) = 0$ для всех $t > 0$ и, кроме того, условие $\lambda_t \to \infty$ при $t \to \infty$ можно отбросить.

Далее мы будем рассматривать (1) как одну из форм записей результатов о больших уклонениях. Поэтому условия, достаточные для (1), могут быть либо сразу выписаны из известных результатов, либо получены с помощью соответствующей техники для различных классов процессов. Если, например, $\xi(t) = S_{[t]}$, где S_n – сумма n независимых одинаково распределенных случайных величин с математическими ожиданиями 0 и дисперсиями 1, то $b(t) = \sqrt{t}$ и $\zeta(t) = -\log(1 - \Phi(t))$, где $\Phi(t)$ – функция стандартного нормального распределения. В этом случае возможный выбор функции $z(t)$, определяющей ширину зоны нормальной сходимости, будет зависеть от моментных ограничений на правый хвост слагаемых. Если предположить, что выполнено условие Крамера или условие Линника, то $z(t)$ может иметь степенной порядок роста (степени меньше или равной $1/2$). При степенных моментных ограничениях $z(t)$ будет степенью логарифма. В дальнейшем эти два случая мы будем, следуя традиции, условно разделять на большие и умеренные уклонения.

Перейдем к результатам, в которых $\log \mathbf{E} e^{-\zeta(yz(\Lambda(t)))}$ можно заменить более простой функцией от y и t.

Теорема 2. *Пусть существуют положительные неубывающие непрерывные правильно меняющиеся на бесконечности функции $b(t)$, $z(t)$ и $\zeta(t)$, $b(\infty) = z(\infty) = \zeta(\infty) = \infty$, $\zeta(0) > 0$, такие, что равномерно по $y \in [0,1]$ выполняется соотношение* (1).

Обозначим $\lambda_t = \operatorname{ess\,inf} \Lambda(t)$ и $V_t(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda(t) < \lambda)$. Предположим, что $\lambda_t \to \infty$ при $t \to \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{t\to\infty} V_t((1+\varepsilon)\lambda_t) > 0. \qquad (3)$$

Пусть $\varrho(t)$ – такая произвольная положительная функция, что $\varrho(t) \to 0$ и $\varrho(t) z(\lambda_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Тогда равномерно по $y \in [\varrho(t), 1]$ выполняется соотношение

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))b(\Lambda(t))\Big) = -\zeta\Big(yz(\lambda_t)\Big)(1 + o(1)) \qquad (4)$$

при $t \to \infty$.

Наиболее простым примером $\Lambda(t)$ является $\Lambda(t) = \Lambda g(t)$, где Λ – случайная величина с $a = \operatorname{ess\,inf} \Lambda > 0$, а $g(t)$ – такая функция, что $g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. В этом случае $\lambda_t = ag(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и выполнено (3). Однако можно построить и более сложные примеры. Следующий результат показывает, что в качестве $\Lambda(t)$ можно взять, например, случайный процесс, удовлетворяющий закону больших чисел и имеющий подходящие траектории.

Теорема 3. *Пусть существуют положительные неубывающие непрерывные правильно меняющиеся на бесконечности функции* $b(t)$, $z(t)$ *и* $\zeta(t)$, $b(\infty) = z(\infty) = \zeta(\infty) = \infty$, $\zeta(0) > 0$, *такие, что равномерно по* $y \in [0,1]$ *выполняется соотношение* (1).

Предположим, что существуют положительная возрастающая непрерывная функция $g(t)$, $g(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *и неотрицательная случайная величина* Λ, *такие, что распределения* $\Lambda(t)/g(t)$ *слабо сходятся к распределению* Λ *при* $t \to \infty$. *Обозначим* $a = \operatorname{ess\,inf} \Lambda$. *Пусть* $\lambda_t/g(t) \to a$ *при* $t \to \infty$ *и* $a > 0$.

Пусть $\varrho(t)$ – *такая произвольная положительная функция, что* $\varrho(t) \to 0$ *и* $\varrho(t) z(g(t)) \to \infty$ *при* $t \to \infty$.

Тогда равномерно по $y \in [\varrho(t), 1]$

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))b(\Lambda(t))\Big) = -a^{pq}\zeta\Big(yz(g(t))\Big)(1 + o(1)) \qquad (5)$$

при $t \to \infty$, *где* p *и* q – *показатели функций* $z(t)$ *и* $\zeta(t)$, *соответственно.*

Теорема 3 дает точную асимптотику логарифмов вероятностей больших уклонений итерированных процессов в случае $a > 0$. Покажем, что при $a = 0$ асимптотика становится иной.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 с* $a = 0$, $pq > 0$ *и* $\lambda_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда равномерно по* $y \in [\varrho(t), 1]$ *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))b(\Lambda(t))\Big) = o\Big(\zeta(yz(g(t)))\Big) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \qquad (6)$$

Условия теорем 2–4 можно несколько ослабить.

Замечание 1. Теоремы 2–4 останутся справедливыми, если в условиях этих теорем соотношение (1) выполнено равномерно по $y \in$

$[\varrho(t), 1]$. При этом $\zeta(t)$ в (1), (4)–(6) можно заменить на эквивалентную ей на бесконечности функцию и отбросить условие $\zeta(0) > 0$. В частности, $\zeta(t) = -\log(1 - \Phi(t))$ можно заменить на $\zeta(t) = t^2/2$.

Перейдем к следствиям теорем 2–4 в случае, когда $\xi(t)$ – однородный процесс с независимыми приращениями, $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) = 1$. Мы рассмотрим различные односторонние моментные ограничения. Сначала мы предположим, что выполнено одностороннее условие Крамера, т.е. $\xi^+(1) = \max\{\xi(1), 0\}$ имеет экспоненциальный момент.

Теорема 5. *Пусть $\xi(t)$ – однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями. Пусть $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) = 1$ и $\mathbf{E}e^{h\xi^+(1)} < \infty$ для некоторого $h > 0$.*

Пусть $z(t)$ – такая положительная неубывающая непрерывная правильно меняющаяся на бесконечности функция, что $z(t) = o(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$.

Если выполнены условия теоремы 2, то равномерно по $y \in [\varrho(t), 1]$ выполняется соотношение

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))\sqrt{\Lambda(t)}\Big) = -\frac{1}{2}y^2 z^2(\lambda_t)(1 + o(1)) \qquad (7)$$

при $t \to \infty$. Здесь $\varrho(t)$– такая произвольная положительная функция, что $\varrho(t) \to 0$ и $\varrho(t)z(\lambda_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Если выполнены условия теоремы 3, то равномерно по $y \in [\varrho(t), 1]$ выполняется соотношение

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))\sqrt{\Lambda(t)}\Big) = -\frac{a^{2p}}{2}y^2 z^2(g(t))(1 + o(1)) \qquad (8)$$

при $t \to \infty$. Здесь $\varrho(t)$ – такая произвольная положительная функция, что $\varrho(t) \to 0$ и $\varrho(t)z(g(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Если выполнены условия теоремы 4, то равномерно по $y \in [\varrho(t), 1]$ выполняется соотношение

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))\sqrt{\Lambda(t)}\Big) = o\Big(y^2 z^2(g(t))\Big) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \qquad (9)$$

Здесь $\varrho(t)$– такая произвольная положительная функция, что $\varrho(t) \to 0$ и $\varrho(t)z(g(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Перейдем к случаю, в котором $\xi(1)$ удовлетворяет одностороннему условию Линника.

Теорема 6. *Пусть $\xi(t)$ – однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями. Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) = 1$ *и* $\mathbf{E}e^{(\xi^+(1))^\beta} < \infty$ *для некоторого* $\beta \in (0,1)$.

Пусть $z(t)$ – такая положительная неубывающая непрерывная правильно меняющаяся на бесконечности функция, что $z(t) = o(t^{\frac{\beta}{2(2-\beta)}})$ *при* $t \to \infty$.

Тогда при соответствующих предположениях теоремы 5 *равномерно по* $y \in [\varrho(t), 1]$ *справедливы соотношения* (7)–(9).

В теоремах 5 и 6 мы рассмотрели поведение логарифмов вероятностей больших уклонений итерированных процессов, построенных по однородным процессам с независимыми приращениями. Перейдем к умеренным уклонениям. Здесь мы будем предполагать, что $\xi^+(1)$ имеет момент порядка $p > 2$.

Теорема 7. *Пусть $\xi(t)$ – однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями. Пусть* $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) = 1$ *и* $\mathbf{E}(\xi^+(1))^p < \infty$ *для некоторого* $p > 2$.

Пусть $z(t) = \sqrt{(p-2)\log t}$ *при* $t > e$.

Тогда при соответствующих предположениях теоремы 5 *равномерно по* $y \in [\varrho(t), 1]$ *справедливы соотношения* (7)–(9). *При этом* $p = 0$ в (8).

Теоремы 5–7 показывают, что чем менее жесткие моментные условия мы налагаем на распределение $\xi^+(1)$, тем меньше зависимость логарифмической асимптотики вероятностей больших уклонений итерированных процессов от распределения Λ. В случае умеренных уклонений этой зависимости нет вообще. С другой стороны, чем более жесткими являются моментные условия, тем ближе нормировка $z(\Lambda(t))\sqrt{\Lambda(t)}$ к максимально возможной $\Lambda(t)$. Такая нормализация была использована в [1] для обобщенных процессов Кокса. В случае обобщенных процессов Кокса теоремы 5–7 дополняют результаты работы [1].

В теоремах 6 и 7 можно рассматривать моментные условия более общего вида. Примеры таких условий можно найти, например, в работах [2] и [3]. При этом немного изменятся условия на функцию $z(t)$.

3. Доказательства

Обозначим

$$P_{t,y} = \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant yz(\Lambda(t))b(\Lambda(t))\Big), \quad E_{t,y} = \mathbf{E}e^{-\zeta(yz(\Lambda(t)))}.$$

Доказательство теоремы 1. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу (1) существует $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in [0,1]$ и всех $t \geqslant T_0$ выполняются неравенства
$$e^{-(1+\varepsilon)\zeta(yz(t))} \leqslant \mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)b(t)\Big) \leqslant e^{-(1-\varepsilon)\zeta(yz(t))}. \tag{10}$$

Так как $\lambda_t \to \infty$ при $t \to \infty$, то существует $T_1 > 0$ такое, что $\lambda_t \geqslant T_0$ для всех $t \geqslant T_1$.

Учитывая независимость случайных процессов $\xi(t)$ и $\Lambda(t)$ и (10), мы имеем
$$\begin{aligned} P_{t,y} &= \mathbf{P}\Big(\xi(\Lambda(t)) \geqslant yz(\Lambda(t))b(\Lambda(t))\Big) \\ &= \int_{\lambda_t}^{\infty} \mathbf{P}\Big(\xi(\lambda) \geqslant yz(\lambda)b(\lambda)\Big)dV_t(\lambda) \\ &\leqslant \int_{\lambda_t}^{\infty} e^{-(1-\varepsilon)\zeta(yz(\lambda))}dV_t(\lambda) = \mathbf{E}e^{-(1-\varepsilon)\zeta(yz(\Lambda(t)))} \\ &\leqslant \Big(\mathbf{E}e^{-\zeta(yz(\Lambda(t)))}\Big)^{1-\varepsilon} = E_{t,y}^{1-\varepsilon} \end{aligned}$$
для всех $y \in [0,1]$ и всех $t \geqslant \max\{T_0, T_1\}$. В последнем неравенстве мы использовали неравенство Ляпунова. Отсюда следует, что
$$\liminf_{t\to\infty} \inf_{y\in[0,1]} \frac{\log P_{t,y}}{\log E_{t,y}} \geqslant 1 - \varepsilon.$$
Переходя в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы приходим к неравенству
$$\liminf_{t\to\infty} \inf_{y\in[0,1]} \frac{\log P_{t,y}}{\log E_{t,y}} \geqslant 1. \tag{11}$$

Оценим теперь вероятность $P_{t,y}$ снизу. Используя снова неравенства (10), мы имеем
$$\begin{aligned} P_{t,y} &= \int_{\lambda_t}^{\infty} \mathbf{P}\Big(\xi(\lambda) \geqslant yz(\lambda)b(\lambda)\Big)dV_t(\lambda) \\ &\geqslant \int_{\lambda_t}^{\infty} e^{-(1+\varepsilon)\zeta(yz(\lambda))}dV_t(\lambda) = \mathbf{E}e^{-(1+\varepsilon)\zeta(yz(\Lambda(t)))} \\ &\geqslant \Big(\mathbf{E}e^{-\zeta(yz(\Lambda(t)))}\Big)^{1+\varepsilon} = E_{t,y}^{1+\varepsilon} \end{aligned}$$

для всех $y \in [0,1]$ и всех $t \geqslant \max\{T_0, T_1\}$. В последнем неравенстве мы снова использовали неравенство Ляпунова. Следовательно,

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in[0,1]} \frac{\log P_{t,y}}{\log E_{t,y}} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы получим

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in[0,1]} \frac{\log P_{t,y}}{\log E_{t,y}} \leqslant 1. \tag{12}$$

Отсюда и из (11) следует заключение теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2. По определению λ_t мы имеем

$$E_{t,y} \leqslant e^{-\zeta(yz(\lambda_t))}$$

для всех $y \in [0,1]$ и всех t. Из неравенства (11) следует

$$\liminf_{t\to\infty} \inf_{y\in[0,1]} \frac{-\log P_{t,y}}{\zeta(yz(\lambda_t))} \geqslant 1. \tag{13}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Мы имеем

$$E_{t,y} \geqslant \int\limits_{\lambda_t}^{(1+\varepsilon)\lambda_t} e^{-\zeta(yz(\lambda))} dV_t(\lambda) \geqslant e^{-\zeta(yz((1+\varepsilon)\lambda_t))} V_t((1+\varepsilon)\lambda_t)$$

для всех $y \in [0,1]$ и всех t.

В силу (3), существуют постоянная $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $T_2 = T_2(\delta) > 0$ такие, что $V_t((1+\varepsilon)\lambda_t) > \delta$ для всех $t \geqslant T_2$. Следовательно,

$$E_{t,y} \geqslant \delta e^{-\zeta(yz((1+\varepsilon)\lambda_t))}$$

для всех $y \in [0,1]$ и всех $t \geqslant T_2$. Если $y \in [\varrho(t), 1]$ и $\varrho(t)z(\lambda_t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то $\zeta(yz((1+\varepsilon)\lambda_t)) \to \infty$ при $t \to \infty$ равномерно по y. Поэтому

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in[\varrho(t),1]} \frac{-\log E_{t,y}}{\zeta(yz((1+\varepsilon)\lambda_t))} \leqslant 1.$$

Учитывая (12), мы получим

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in[\varrho(t),1]} \frac{-\log P_{t,y}}{\zeta(yz(\lambda_t))} = \limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in[\varrho(t),1]} \frac{-(1+\varepsilon)^{pq}\log P_{t,y}}{\zeta(yz((1+\varepsilon)\lambda_t))} \leqslant (1+\varepsilon)^{pq}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы получим

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in[\varrho(t),1]} \frac{-\log P_{t,y}}{\zeta(yz(\lambda_t))} \leqslant 1.$$

Из последнего неравенства и (13) вытекает заключение теоремы 2. $\square$

Доказательство теоремы 3. Покажем, что выполнено условие (3) теоремы 2.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как $\frac{\lambda_t}{g(t)} \to a$ при $t \to \infty$, то мы имеем

$$V_t((1+\varepsilon)^2\lambda_t) = \mathbf{P}\Big(\frac{\Lambda(t)}{g(t)} < (1+\varepsilon)^2\frac{\lambda_t}{g(t)}\Big) \geqslant \mathbf{P}\Big(\frac{\Lambda(t)}{g(t)} < (1+\varepsilon)a\Big)$$

для всех достаточно больших t. Если ε выбрано так, что $(1+\varepsilon)a$ – точка непрерывности $V(t) = \mathbf{P}(\Lambda < t)$, то

$$\liminf_{t\to\infty} V_t((1+\varepsilon)^2\lambda_t) \geqslant V((1+\varepsilon)a) > 0.$$

По теореме 2 мы получаем (4). Так как функции $\zeta(t)$ и $z(t)$ правильно меняются, то из (4) следует (5). Теорема 3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4. Так как $-\log P_{t,y} \geqslant 0$, то нам нужно оценить $-\log P_{t,y}$ только сверху. Для этого оценим $E_{t,y}$ снизу.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Учитывая, что $\lambda_t = o(g(t))$ при $t \to \infty$, мы имеем

$$E_{t,y} \geqslant \int_{\lambda_t}^{\varepsilon g(t)} e^{-\zeta(yz(\lambda))}dV_t(\lambda) \geqslant e^{-\zeta(yz(\varepsilon g(t)))}V_t(\varepsilon g(t))$$

для всех $y \in [\varrho(t), 1]$ и всех достаточно больших t.

Если ε выбрано так, что ε – точка непрерывности $V(t) = \mathbf{P}(\Lambda < t)$, то

$$\lim_{t\to\infty} V_t(\varepsilon g(t)) = V(\varepsilon) > 0.$$

Так как $yz(\varepsilon g(t)) \geqslant \varrho(t)z(\varepsilon g(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$, то

$$\limsup_{t\to\infty} \sup_{y\in[\varrho(t),1]} \frac{-\log E_{t,y}}{\zeta(yz(g(t)))} \leqslant \varepsilon^{pq}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon \searrow 0$ и учитывая (12), мы получим (6). Теорема 4 доказана. □

Доказательство замечания 1. В доказательствах теорем 2–4 одна часть оценок проводилась при $y \in [\varrho(t), 1]$, а другая – при $y \in [0, 1]$. Если потребовать, чтобы соотношение (1) было выполнено равномерно по $y \in [\varrho(t), 1]$, то нужно в соответствующих оценках формально заменить область $y \in [0,1]$ на $y \in [\varrho(t), 1]$. Отсюда следует замечание 1. □

Ключевую роль в доказательстве теорем 5–7 играет следующий результат об асимптотическом поведении логарифмов вероятностей больших и умеренных уклонений однородных процессов с независимыми приращениями.

Лемма 1. *Пусть $\xi(t)$ – однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями,* $\mathbf{E}\xi(1) = 0$, $\mathbf{E}\xi^2(1) = 1$.

Пусть $z(t)$ – положительная неубывающая непрерывная правильно меняющаяся на бесконечности функция.

Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) $\mathbf{E}e^{h\xi^+(1)} < \infty$ *для некоторого $h > 0$ и $z(t) = o(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$.*
2) $\mathbf{E}e^{(\xi^+(1))^\beta} < \infty$ *для некоторого $\beta \in (0,1)$ и $z(t) = o(t^{\frac{\beta}{2(2-\beta)}})$ при $t \to \infty$.*
3) $\mathbf{E}(\xi^+(1))^p < \infty$ *для некоторого $p > 2$ и $z(t) = \sqrt{(p-2)\log t}$ при $t > e$.*

Тогда равномерно по $y \in [\varrho(t), 1]$ выполняется соотношение

$$\log \mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)\sqrt{t}\Big) = -\frac{1}{2}y^2z^2(t)(1+o(1)) \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \tag{14}$$

Доказательство леммы 1. Обозначим $n = n_t = \max\{n : n \leqslant t\}$.

Пусть $\theta(t)$ – такая положительная невозрастающая непрерывная функция, что $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Не умаляя общности, будем считать, что $\theta(t)\varrho(t)z(t)\sqrt{t} \to \infty$ при $t \to \infty$ и $z(t)\sqrt{t}(z(n)\sqrt{n})^{-1} \leqslant 1 + 0.5\theta(n)$ при всех $t > 0$.

Если выполнено условие 1), то из результатов Феллера [4] (см. также [5, с. 310]) следует, что равномерно по $y \in [\varrho(n), 1+\theta(n)]$ выполняется соотношение

$$\log \mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant yz(n)\sqrt{n}\Big) = -\frac{1}{2}y^2z^2(n)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Если выполнено условие 2), то в силу леммы 2 и соотношений (3.20), (3.30) (см. [5, стр. 286 и 294], соответственно) соотношение (15) также выполнено равномерно по $y \in [\varrho(n), 1+\theta(n)]$. Если же выполнено условие 3), то мы получаем тот же результат по теореме 2.4 из работы [6].

Возьмем $\varepsilon > 0$. Используя независимость приращений и однородность процесса $\xi(t)$ и (15), мы получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)\sqrt{t}\Big) \geqslant \mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant (1+0.5\theta(n))yz(n)\sqrt{n}\Big)\\
\geqslant&\mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant (1+\theta(n))yz(n)\sqrt{n}\Big)\mathbf{P}\Big(\xi(t)-\xi(n) \geqslant -0.5\theta(n)yz(n)\sqrt{n}\Big)\\
=&\mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant (1+\theta(n))yz(n)\sqrt{n}\Big)\mathbf{P}\Big(\xi(t-n) \geqslant -0.5\theta(n)yz(n)\sqrt{n}\Big)\\
\geqslant&\mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant (1+\theta(n))yz(n)\sqrt{n}\Big)\mathbf{P}\Big(\inf_{0\leqslant t\leqslant 1}\xi(t) \geqslant -0.5\theta(n)yz(n)\sqrt{n}\Big)\\
\geqslant&0.5\mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant (1+\theta(n))yz(n)\sqrt{n}\Big) \geqslant 0.5e^{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)(1+\theta(n))^2y^2z^2(n)}\\
\geqslant&0.5e^{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)^2y^2z^2(t)}
\end{aligned}\tag{16}$$

для всех $y \in [\varrho(t), 1]$ и всех достаточно больших t.

Возьмем $\varepsilon \in (0,1)$. Снова используя однородность процесса $\xi(t)$, мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)\sqrt{t}\Big) &\leqslant \mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant (1-\varepsilon)yz(t)\sqrt{t}\Big)\\
&+ \mathbf{P}\Big(\xi(t-n) \geqslant \varepsilon yz(t)\sqrt{t}\Big)\\
&\leqslant \mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant (1-\varepsilon)^2yz(n)\sqrt{n}\Big)\\
&+ \mathbf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\xi(t) \geqslant \varepsilon yz(t)\sqrt{t}\Big)
\end{aligned}$$

для всех $y \in [\varrho(t), 1]$ и всех достаточно больших t.

Выберем постоянную C так, чтобы $\mathbf{P}(\xi(t) \geqslant -C) \geqslant 0.5$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Используя лемму 1 из [3] и соотношение (15), мы получим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)\sqrt{t}\Big) &\leqslant \mathbf{P}\Big(\xi(n) \geqslant (1-\varepsilon)^2 yz(n)\sqrt{n}\Big)\\ &+ 4\mathbf{P}\Big(\xi(1) \geqslant \varepsilon yz(t)\sqrt{t} - C\Big)\\ &\leqslant e^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^3 y^2 z^2(n)} + 4\mathbf{P}\Big(\xi(1) \geqslant \varepsilon^2 yz(t)\sqrt{t}\Big)\\ &\leqslant e^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^4 y^2 z^2(t)} + 4\mathbf{P}\Big(\xi(1) \geqslant \varepsilon^2 yz(t)\sqrt{t}\Big)\end{aligned}$$

для всех $y \in [\varrho(t), 1]$ и всех достаточно больших t.

Пусть выполнено условие 2) или 1). В последнем случае, не умаляя общности, будем считать, что $h = 1$. По неравенству Чебышева

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\xi(1) \geqslant \varepsilon^2 yz(t)\sqrt{t}\Big) &\leqslant Ce^{-(\varepsilon^2 yz(t)\sqrt{t})^\beta} \leqslant Ce^{-\varepsilon^{2\beta} y^2 (z(t)\sqrt{t})^\beta}\\ &\leqslant e^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^4 y^2 z^2(t)} = e^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^4 y^2 z^\beta(t) o(t^{\beta/2})}\end{aligned}$$

для всех $y \in [\varrho(t), 1]$ и всех достаточно больших t. В последней оценке $\beta = 1$ соответствует условию 1).

Пусть выполнено условие 3). Снова используя неравенство Чебышева, мы имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\xi(1) \geqslant \varepsilon^2 yz(t)\sqrt{t}\Big) &\leqslant \mathbf{P}\Big(\xi(1) \geqslant \sqrt{t}\Big) \leqslant C_1 t^{p/2} \leqslant C_1 e^{-\frac{1}{2}z^2(t)}\\ &\leqslant e^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^4 y^2 z^2(t)}\end{aligned}$$

для всех $y \in [\varrho(t), 1]$ и всех достаточно больших t.

Следовательно,

$$\mathbf{P}\Big(\xi(t) \geqslant yz(t)\sqrt{t}\Big) \leqslant 5e^{-\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^4 y^2 z^2(t)} \tag{17}$$

для всех $y \in [\varrho(t), 1]$ и всех достаточно больших t.

Из соотношений (16) и (17) следует (14). Лемма 1 доказана. □

Доказательство теорем 5–7. Теоремы 5–7 вытекают из леммы 1, теорем 2–4 и замечания 1. □

Литература

1. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении вероятностей больших уклонений обобщенных процессов Кокса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **361** (2008), 167–181.
2. А. Н. Фролов, *Об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений.* — Труды Санкт-Петербургского мат. общества **14** (2008), 197–211.
3. А. Н. Фролов, *Универсальные предельные теоремы для приращений процессов с независимыми приращениями.* — Теория вероятн. и ее примен. **49** (2004), 601–609.
4. W. Feller, *Limit theorems for probabilities of large deviations.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **14** (1969), 1–20.
5. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).
6. А. Н. Фролов, *О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **294** (2002), 200–215.

Frolov A. N. On asymptotic behaviour of probabilities of large and moderate deviations for some iterated stochastic processes.

We derive logarithmic asymptotics for probabilities of large deviations for some iterated processes. We show that under appropriate conditions, these asymptotics are the same as those for sums of independent random variables. When these conditions do not hold, the asymptotics of large deviations for the iterated processes are quite different. When the iterated process is a homogeneous process with independent increments, in which time is replaced by a random one, the behaviour of large and moderate deviations are investigated in the case of finite variance. For this case, the following one-sided moment restriction are considered: the Cramèr condition, the Linnik condition, the existence of moment of order $p > 2$ for a positive part.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

Поступило 18 октября 2009 г.