Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ К ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ МЕРАМ И ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

1. Введение

Пусть $\nu(dx)$ – пуассоновсая случайная мера на $\mathbb{R}$ с интенсивностью вида $\gamma(dx) = \mathbb{E}(\nu(dx)) = \frac{a\,dx}{|x|^{1+\alpha}}$, $a > 0$. Для $\varepsilon > 0$ через η_ε мы обозначим случайную величину

$$\eta_\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x\nu(dx), \tag{1}$$

где $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Хорошо известно [8], что если $\alpha \in (0, 2)$, то существует предел (по вероятности)

$$\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} \eta_\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}} x\nu(dx), \tag{2}$$

причем случайная величина η имеет строго устойчивое симметричное распределение с индексом устойчивости α. Характеристическая функция $f(p)$ случайной величины η равна $\exp(-c|p|^\alpha)$, $c > 0$. Представление (2) устойчивой случайной величины в виде стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере называется представлением Леви–Хинчина устойчивого распределения.

Также хорошо известно ([3, 4]), что устойчивые распределения являются предельными распределениями для сумм независимых слу-

---

Ключевые слова : Пуассоновские случайные меры, Представление Леви-Хинчина, строго устойчивые случайные величины, предельные теоремы.

Работа первого автора выполнена при поддержке грантов DFG 436 RUS 113/823 и НШ 638.2008.1. Работа второго автора выполнена при поддержке грантов РФФИ 09-01-00515 и НШ 816.2008.1.

чайных величин. Именно, пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин (для простоты мы в нашей работе ограничимся только симметричным случаем). Предположим, что распределение случайной величины ξ_1 удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \frac{b}{x^{\alpha}}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty. \tag{3}$$

При этих предположениях последовательность распределений нормированных сумм $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ слабо сходится к устойчивому распределению с индексом α.

В нашей работе мы рассмотрим нетипичный для теории вероятностей случай $\alpha > 2$, $\alpha \neq 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Как и выше, мы ограничимся рассмотрением только симметричных распределений. Нетрудно показать, что для таких значений α функция $f(p) = \exp(-c|p|^{\alpha})$ не является характеристической функцией никакой вероятностной меры. Более того, не существует предела в (2) при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее, мы построим аналог представления Леви–Хинчина.

Через p_{ε}^{α} мы обозначим плотность распределения случайной величины η_{ε}. Легко проверить, что $p_{\varepsilon}^{\alpha} \in L_2(\mathbb{R})$. В нашей работе мы построим семейство линейных операторов $\mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ и последовательность $q_{\varepsilon}^{\alpha} = \mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha} p_{\varepsilon}^{\alpha}$ такую, что существует L_2-предел

$$q^{\alpha} = (L_2) \lim_{\varepsilon \to 0} q_{\varepsilon}^{\alpha}.$$

Каждый оператор A_{ε}^{α} действует как свертка с функцией из класса Шварца и, следовательно, является ограниченным оператором в $L_p(\mathbb{R})$ для всех $p \in [1, \infty]$.

Через $\mathcal{Q}^{\alpha}$ мы обозначим знакопеременную меру на $\mathbb{R}$ с плотностью q^{α}. Для каждого $\alpha > 2$, $\alpha \neq 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}^{\alpha}(\mathbb{R}) = 1$. Преобразование Фурье $\widehat{q^{\alpha}}$ функции q^{α} при $\alpha \in (4m, 4m+2)$ есть $\widehat{q^{\alpha}}(p) = \exp(-c|p|^{\alpha})$ (в точности, как и в случае $\alpha \in (0,2)$), но для $\alpha \in (4m-2, 4m)$ функция $\widehat{q^{\alpha}}$ имеет другой вид, именно $\widehat{q^{\alpha}}(p) = \exp(c_0|p|^{\alpha} - c_1 p^{4m})$, c_0, $c_1 > 0$.

Мы также покажем, что распределение $\mathcal{Q}^{\alpha}$ является в определенном смысле предельным распределением для сумм независимых случайных величин. Именно, пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин. Мы предположим, что случайная величина ξ_1 удовлетворяет (3) с $\alpha > 2$, $\alpha \neq 2m$, $m \in \mathbb{N}$.

Через $\mathcal{P}_1$ мы обозначим распределение ξ_1. Из (3) вытекает, что распределение $\mathcal{P}_1$ принадлежит области притяжения нормального закона. Это означает, что распределение случайной величины $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \xi_i$ асимптотически нормально (в частности имеет очень быстро убывающий хвост). Мы будем рассматривать распределение нормированных сумм $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i$ случайных величин ξ_i с более слабой нормировкой $n^{1/\alpha}$ (такой же, как и в случае $\alpha \in (0,2)$). Обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i$, а через p_n соответствующую плотность. Дополнительно мы предположим, что $p_n \in L_2(\mathbb{R})$ для всех достаточно больших n.

Ясно, что последовательность распределений $\mathcal{P}_n$ слабого предела не имеет. В нашей работе мы построим последовательность функций ζ_n, $n \in \mathbb{N}$, такую, что соответствующая последовательность q_n^α, где

$$q_n^\alpha = p_n + p_n * \zeta_n,$$

сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к функции q^α. При всех n функция ζ_n есть обратное преобразование Фурье некоторой гладкой четной финитной функции и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_n(x)dx = 0$.

Если рассматривать q^α как плотность предельной меры, то соответствующая предельная мера является знакопеременной и, соответственно, невероятностной. В этой связи важно отметить, что при всех $\alpha > 2$, $\alpha \neq 2m$, функция q^α может принимать отрицательные значения только внутри некоторого конечного интервала. Вне этого интервала функция q^α положительна и, более того, так же как и в случае классических предельных теорем (где $\alpha \in (0,2)$) о сходимости к устойчивым законам, асимптотическое поведение хвостового распределения $\int\limits_{x}^{\infty} q^\alpha(y)dy$, $x \to \infty$, совпадает с асимптотическим поведением хвостового распределения отдельного слагаемого. Это наводит на мысль о возможной вероятностной интерпретации хвостового распределения предельной меры.

В последней части настоящей работы, используя положительную часть (фактически – положительный “хвост”) предельной меры, мы докажем локальную предельную теорему для больших уклонений (при условии (3)). Этот результат близок к результату С. В. Нагаева [5–7].

Настоящая работа является обобщением работы [10] (тех же авторов), в которой рассматривался только случай $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$.

Мы используем методы теории обобщенных функций ([2]), а также методы работ [1, 9].

2. Необходимые обозначения

Введем необходимые обозначения. Пусть v – C^∞-гладкая функция на $\mathbb{R}$. Через D мы обозначим оператор

$$(Dv)(x) = v(0) = \mathrm{Const},$$

а для $k = 1, 2, 3, \dots$ через $D^{(k)}$ мы обозначим линейный оператор, действующий как

$$(D^{(k)}v)(x) = \frac{x^k}{k!} v^{(k)}(0) \tag{4}$$

для $k < \alpha$, и

$$(D^{(k)}v)(x) = \frac{x^k}{k!} \mathbf{1}_{[0,1]}(|x|) v^{(k)}(0) \tag{5}$$

для $k > \alpha$. Отметим, что в силу различия между формулами (4) и (5) $D^{(k)}$ зависит также и от α.

Далее, определим линейный оператор Δ, полагая

$$\Delta v(x) = v(x) - v(0) = v(x) - Dv(x), \tag{6}$$

и последовательность операторов (также зависящих от α) $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{N}$, полагая

$$(\Delta(k)v)(x) = v(x) - Dv(x) - D^{(1)}v(x) - \dots - D^{(k)}v(x).$$

Заметим, что $\Delta + D$ есть тождественный оператор и для каждого $k = 1, 2, \dots$ мы имеем

$$\Delta(k) = \Delta(k+1) + D^{(k+1)}. \tag{7}$$

Через γ мы будем обозначать меру на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ вида

$$\gamma(dx) = \frac{a\,dx}{|x|^{1+\alpha}},$$

где dx – мера Лебега, $a > 0$, $\alpha > 2$, $\alpha \neq 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Мы также положим для $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\alpha > 2l$

$$\tau_{2l}(\varepsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x^{2l} d\gamma = \frac{2a}{\alpha - 2l}\ \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-2l}} \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} +\infty. \tag{8}$$

В свою очередь, для $\alpha < 2l$ мы положим

$$\tau_{2l}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} x^{2l} d\gamma = \frac{2a}{2l-\alpha}(1-\varepsilon^{2l-\alpha}) \underset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} \frac{2a}{2l-\alpha}. \qquad (9)$$

3. Предельные теоремы для стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере

Пусть φ – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$ с ограниченными производными всех порядков.

Мы имеем

$$\mathbb{E}\varphi(\eta_\varepsilon) = e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} g_k d\gamma^k, \qquad (10)$$

где $g_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varphi(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$. Через Δ_i, D_i мы будем обозначать действие операторов Δ, D по переменной x_i.

Для каждого конечного подмножества I множества натуральных чисел через $|I|$ мы будем обозначать число элементов множества I. Положим также

$$D_I = \prod_{i \in I} D_i, \quad \Delta_I = \prod_{i \in I} \Delta_i. \qquad (11)$$

Если $I = \{1, \ldots, k\}$, то для соответствующего оператора Δ_I мы используем обозначение Δ^k, то есть

$$\Delta^k = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_k.$$

Аналогичные обозначения мы будем также использовать и для операторов $\Delta(m)$, D^m, $m \in \mathbb{N}$, именно

$$D_I^{(m)} = \prod_{i \in I} D_i^{(m)}, \quad \Delta_I(m) = \prod_{i \in I} \Delta_i(m)$$

и

$$\Delta^k(m) = \Delta_1(m)\Delta_2(m) \ldots \Delta_k(m).$$

Для каждого фиксированного k, через CI мы будем обозначать множество $\{1, \ldots, k\} \setminus I$. Заметим, что для любого k функция $D_{CI} g_k$ зависит только от переменных x_i, $i \in I$.

Используя тождество

$$1 = \prod_{i=1}^{k}(D_i + \Delta_i) = \sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}} \Delta_I D_{CI},$$

мы получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\varphi(\eta_\varepsilon) &= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \prod_{i=1}^{k} (\Delta_i + D_i) g_k d\gamma^k \\
&= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}} \Delta_I D_{CI} g_k d\gamma^k \\
&= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}} \gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)^{|CI|} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^{|I|}} \Delta_I D_{CI} g_k \prod_{i\in I} \gamma(dx_i) \\
&= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)^{k-j} \binom{k}{j} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j} \Delta^j g_j d\gamma^j \qquad (12) \\
&= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j} \Delta^j g_j d\gamma^j \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Delta^k g_k d\gamma^k.
\end{aligned}$$

Из симметричности меры γ вытекает, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Delta^k g_k d\gamma^k = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Delta^k(1) g_k d\gamma^k. \qquad (13)$$

Используя (7) и (13), мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\varphi(\eta_\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Delta^k g_k d\gamma^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Delta^k(1) g_k d\gamma^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \prod_{i=1}^{k} (\Delta_i(2) + D_i^{(2)}) g_k d\gamma^k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Bigg(\sum_{I \subset \{1,\dots,k\}} \Delta_I(2) D_{CI}^{(2)} g_k \Bigg) d\gamma^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^j(2) (D^{(2)})^{k-j} g_k d\gamma^k$$

(в последней формуле мы предполагаем, что оператор $\Delta^j(2)$ действует по переменным $x_1, x_2, \dots, x_j$, а оператор $(D^{(2)})^{k-j}$ действует по оставшимся $k-j$ переменным),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} \Delta^j(2) \varphi^{(2(k-j))}(x_1 + \dots + x_j) \frac{1}{2^{k-j}} x_{j+1}^2 \dots x_k^2 d\gamma^k =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j} \Delta^j(2) \Bigg(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-j)!} \varphi^{(2(k-j))}(x_1 + \dots + x_j) \frac{1}{2^{k-j}} (\tau_2(\varepsilon))^{(k-j)} \Bigg) d\gamma^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j} \Delta^j(2) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(2k)}(x_1 + \dots + x_j) \frac{1}{2^k} (\tau_2(\varepsilon))^k \Big) d\gamma^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j} \Delta^j(2) \Big(\Big(\mathrm{P}_2^{\tau_2(\varepsilon)} \varphi \Big) (x_1 + \dots + x_j) \Big) d\gamma^j, \tag{14}$$

где оператор P_2^t, суженный на C^∞-гладкие функции, действует следующим образом

$$(\mathrm{P}_2^t u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} u^{(2k)}(x) t^k.$$

Легко проверить, что для $t > 0$ оператор P_2^t действует на u как оператор теплопроводности (свертка с функцией $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$). Преобразование Фурье этого оператора есть оператор умножения на $e^{-\frac{p^2 t}{2}}$, то есть

$$\widehat{\mathrm{P}_2^t u}(p) = e^{-\frac{p^2 t}{2}} \widehat{u}(p).$$

Определим обратный оператор

$$(\mathrm{P}_2^{-t}u)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}u^{(2k)}(x)t^k,$$

который является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R})$, с областью определения $\left\{u\in L_2(\mathbb{R}):\widehat{u}e^{\frac{p^2t}{2}}\in L_2(\mathbb{R})\right\}$.

Из (14) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{P}_2^{-\tau_2(\varepsilon)}\varphi)(\eta_\varepsilon)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Delta^k(2)\big(\varphi(x_1+\cdots+x_k)\big)d\gamma^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Delta^k(2)g_k d\gamma^k.\end{aligned}$$

Теперь, используя соображения, аналогичные приведенным выше, получаем

$$\mathbb{E}(\mathrm{P}_2^{-\tau_2(\varepsilon)}\varphi)(\eta_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Delta^k(3)g_k d\gamma^k$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int\limits_{\mathbb{R}^j_\varepsilon}\Delta^j(4)\left(\left(\mathrm{P}_4^{\tau_4(\varepsilon)}\varphi\right)(x_1+\cdots+x_j)\right)d\gamma^j, \tag{15}$$

где оператор P_4^t определяется формулой

$$(\mathrm{P}_4^t u)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4!^k k!}u^{(4k)}(x)t^k,$$

а обратный оператор P_4^{-t}, соответственно формулой, –

$$(\mathrm{P}_4^{-t}u)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4!^k k!}u^{(4k)}(x)t^k. \tag{16}$$

Теперь, используя (15) и (16), мы получаем

$$\mathbb{E}(\mathrm{P}_4^{-\tau_4(\varepsilon)}\mathrm{P}_2^{-\tau_2(\varepsilon)}\varphi)(\eta_\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Delta^k(4)g_k d\gamma^k.$$

Далее, для каждого четного числа $2l$ мы определим семейство операторов P_{2l}^{t}, $t \in \mathbb{R}$, как

$$(\mathrm{P}_{2l}^{t}u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((2l)!)^k k!} u^{(2lk)}(x)t^k.$$

Для $\alpha \in (4m-2, 4m) \cup (4m, 4m+2)$ мы положим

$$\mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha} = \mathrm{P}_{4m}^{-\tau_{4m}(\varepsilon)} \dots \mathrm{P}_{4}^{-\tau_4(\varepsilon)} \mathrm{P}_{2}^{-\tau_2(\varepsilon)}. \tag{17}$$

По аналогии с вышеизложенным мы получаем

$$\mathbb{E}(\mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha}\varphi)(\eta_{\varepsilon}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_{\varepsilon}^{k}} \Delta^k(4m) g_k d\gamma^k.$$

Легко проверить, что для всех $\varepsilon > 0$ преобразование Фурье оператора $\mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha}$ есть оператор умножения на

$$\widehat{a_{\varepsilon}^{\alpha}}(p) = \exp\left(-\frac{p^{4m}\tau_{4m}(\varepsilon)}{(4m)!} + \dots - \frac{p^4\tau_4(\varepsilon)}{4!} + \frac{p^2\tau_2(\varepsilon)}{2!} \right),$$

то есть

$$\widehat{\mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha}u}(p) = \widehat{a_{\varepsilon}^{\alpha}}(p)\widehat{u}(p),$$

что означает, что сам оператор $\mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha}$ действует как оператор свертки с функцией $a_{\varepsilon}^{\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(px)\widehat{a_{\varepsilon}^{\alpha}}(p)dp$.

Далее, обозначим через p_{ε}^{α} плотность распределения случайной величины η_{ε}, и положим

$$q_{\varepsilon}^{\alpha} = \mathcal{A}_{\varepsilon}^{\alpha} p_{\varepsilon}^{\alpha}. \tag{18}$$

Таким образом, мы получаем

$$\int \varphi(x) q_{\varepsilon}^{\alpha}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_{\varepsilon}^{k}} \Delta^k(4m) g_k d\gamma^k. \tag{19}$$

Теорема 1. 1. *Существует L_2-предел*

$$q^\alpha = (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0} q^\alpha_\varepsilon = (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{A}^\alpha_\varepsilon p^\alpha_\varepsilon. \tag{20}$$

2. *При $\alpha \in (4m-2, 4m)$ мы имеем $\widehat{q^\alpha}(p) = \exp\big(c_0|p|^\alpha - c_1 p^{4m}\big)$, а при $\alpha \in (4m, 4m+2)$ мы имеем $\widehat{q^\alpha}(p) = \exp\big(-c_2|p|^\alpha\big)$, где $\widehat{q^\alpha}$ есть преобразование Фурье функции q^α, а c_0, c_1, c_2 – положительные константы.*

Доказательство. Используя (19), мы можем сосчитать преобразование Фурье $\widehat{q^\alpha_\varepsilon}$ функции q^α_ε. Мы имеем

$$\widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipx} q^\alpha_\varepsilon(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon} \Delta^k(4m) e^{ip(x_1+\dots+x_k)} d\gamma^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} \Delta(4m) e^{ipx} d\gamma(x) \biggr)^k = \exp\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} \Delta(4m) e^{ipx} d\gamma(x) \biggr).$$

Из последней формулы следует, что для $\alpha \in (4m-2, 4m)$ величина равна

$$\exp\left(2a \int\limits_\varepsilon^\infty \left(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \dots - \frac{p^{4m}x^{4m}}{(4m)!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right), \tag{21}$$

а для $\alpha \in (4m, 4m+2)$ она равна

$$\exp\left(2a \int\limits_\varepsilon^\infty \left(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2} - \dots - \frac{p^{4m}x^{4m}}{(4m)!}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right), \tag{22}$$

Переходя к пределу в (21) при $\varepsilon \to 0$ для $\alpha \in (4m-2, 4m)$, получаем

$$\widehat{q^\alpha}(p) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p)$$

$$= \exp\left(2a \int\limits_0^\infty \left(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \dots - \frac{p^{4m}x^{4m}}{(4m)!}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right)$$

$$= \exp\left(2a|p|^\alpha \int\limits_0^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots + \frac{y^{4m-2}}{(4m-2)!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right.$$

$$\left. - \frac{2a}{(4m)!} p^{4m} \int\limits_0^1 \frac{x^{4m}dx}{x^{1+\alpha}}\right) = \exp\Big(c_0|p|^\alpha - c_1 p^{4m}\Big), \tag{23}$$

где

$$c_0 = 2a \int_0^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots + \frac{y^{4m-2}}{(4m-2)!} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} > 0,$$

$$c_1 = \frac{2a}{(4m)!(4m-\alpha)} > 0.$$

Аналогично, переходя к пределу в (22) для $\alpha \in (4m, 4m+2)$, получим

$$\widehat{q^\alpha}(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p) = \exp\Biggl(2a \int_0^\infty \biggl(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \dots - \frac{p^{4m}x^{4m}}{(4m)!} \biggr) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \Biggr) = \exp\bigl(-c_2|p|^\alpha\bigr), \quad (24)$$

где

$$c_2 = -2a \int_0^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots - \frac{y^{4m}}{(4m)!} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} > 0. \quad (25)$$

Нетрудно проверить, что

$$c_0 = \frac{-\pi a}{\Gamma(1+\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}, \quad c_2 = \frac{\pi a}{\Gamma(1+\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}}. \quad (26)$$

Покажем теперь, что сходимость в (23), (24) имеет место не только для каждого фиксированного p, но также и в смысле $L_2(\mathbb{R})$.

При $\alpha \in (4m-2, 4m)$ мы имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac12} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac12} \exp\Biggl(2a|p|^\alpha \int_{|p|\varepsilon}^\infty \biggl(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots + \frac{y^{4m-2}}{(4m-2)!} \biggr) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} - \frac{2ap^{4m}}{(4m)!} \int_\varepsilon^1 \frac{x^{4m}dx}{x^{1+\alpha}} \Biggr) \leqslant \exp\biggl(c_0|p|^\alpha - \frac{2ap^{4m}}{(4m)!(4m-\alpha)}\Bigl(1 - \frac{1}{2^{4m-\alpha}}\Bigr)\biggr).$$

Теперь, используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, мы получаем $\widehat{q^\alpha} = (L_2) \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}$, а L_2-сходимость $\widehat{q^\alpha_\varepsilon}$ немедленно влечет L_2-сходимость q^α_ε.

Теперь мы рассмотрим случай $\alpha \in (4m, 4m+2)$. Сначала выберем $K > 0$ так, чтобы для $|y| > K$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{y^{4m}}{(4m)!} > \cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots + \frac{y^{4m-2}}{(4m-2)!}$$

При $|p|\varepsilon \geqslant K$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p)\\
&\quad= \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \exp\left(2a|p|^\alpha \int\limits_{|p|\varepsilon}^{\infty}\left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots - \frac{y^{4m}}{(4m)!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right)\\
&\quad\leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \exp\left(-a|p|^\alpha \int\limits_{|p|\varepsilon}^{\infty} \frac{y^{4m}}{(4m)!}\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right)\\
&\quad= \exp\left(\frac{-a|p|^{4m}}{(4m)!(\alpha-4m)}\right),
\end{aligned}$$

а при $|p|\varepsilon < K$ имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p) \leqslant \exp\left(2a|p|^\alpha \int\limits_{K}^{\infty}\left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots - \frac{y^{4m}}{(4m)!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right). \quad (27)$$

Теперь, используя теорему Лебега, мы получаем утверждение теоремы. □

Следствие. *Если для некоторой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Delta^k(4m) g_k d\gamma^k \quad (28)$$

в правой части (19) абсолютно сходится, то мы можем перейти к пределу (19) при $\varepsilon \to 0$ и получить

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) q^\alpha(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Delta^k(4m) g_k d\gamma^k.$$

4. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин. Мы предположим, что распределение случайной величины ξ_1 удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \frac{b}{x^\alpha}(1 + g(x)), \tag{29}$$

где $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Положим $a = \alpha b$.

Как и выше, мы предположим, что $\alpha > 2$ и $\alpha \neq 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Мы обозначим через $\mathcal{P}_1$ распределение случайной величины ξ_1, а через $f = f(p)$ – ее характеристическую функцию. Для $k < \alpha$ через $\mu_k = \mathbb{E}\xi_1^k$ мы обозначим момент порядка k случайной величины ξ_1 а через s_k мы обозначим соответствующий семиинвариант. Заметим, что в силу условия симметрии функция $f(p)$ вещественнозначна, а μ_k и s_k отличны от нуля только для четных k.

Дополнительно мы предположим, что функция $f(p)$ удовлетворяет условию

$$|f(p)| \leqslant \frac{K}{|p|^\delta} \tag{30}$$

для некоторых $K > 0$, $\delta > 0$, так что для $n > \frac{2}{\delta}$ распределение суммы $\sum_{i=1}^n \xi_i$ имеет квадратично интегрируемую плотность.

Из (29) следует, что распределение $\mathcal{P}_1$ принадлежит области притяжения нормального закона. Это значит, что последовательность распределений нормированных сумм $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \xi_i$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Мы рассмотрим распределения нормированных сумм

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i \tag{31}$$

случайных величин ξ_i с более слабой нормировкой $n^{1/\alpha}$. Ясно, что такая последовательность распределений не имеет слабого предела. Тем не менее, мы покажем, что после некоторой коррекции эта последовательность слабо сходится к знакопеременной мере с плотностью q^α.

4.1. Случай $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m)$**.**

Заметим, что для характеристической функции $f(p)$ случайной величины ξ_1 мы имеем следующее представление

$$\begin{aligned} f(p) = \mathbb{E}\cos(p\xi_1) = 1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!} + \dots - \frac{\mu_{4m-2}p^{4m-2}}{(4m-2)!} \\ + \mathbb{E}\biggl(\cos(p\xi_1) - 1 + \frac{p^2\xi_1^2}{2!} - \dots + \frac{p^{4m-2}\xi_1^{4m-2}}{(4m-2)!}\biggr) \\ = 1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!} + \dots - \frac{\mu_{4m-2}p^{4m-2}}{(4m-2)!} + T(p), \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$T(p) = 2\int\limits_0^\infty \biggl(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \dots + \frac{p^{2m-2}x^{2m-2}}{(2m-2)!}\biggr) d\mathcal{P}_1(x) > 0. \tag{33}$$

Лемма 1. $T(p) \sim c_0|p|^\alpha$ *при* $p \to 0$, *где*

$$c_0 = 2a\int\limits_0^\infty \biggl(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \dots + \frac{y^{4m-2}}{(4m-2)!}\biggr)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} = \frac{-\pi a}{\Gamma(1+\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} > 0.$$

Доказательство. Представим $T(p)$ в виде

$$\begin{aligned} T(p) &= 2\int\limits_0^\infty \biggl(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \dots + \frac{p^{2m-2}x^{2m-2}}{(2m-2)!}\biggr) d\mathcal{P}_1(x) \\ &= 2\int\limits_0^1 (\dots)\, d\mathcal{P}_1 + 2\int\limits_1^\infty (\dots)\, d\mathcal{P}_1. \end{aligned}$$

Ясно, что $\int\limits_0^1 (\dots)\, d\mathcal{P}_1 = o(|p|^\alpha)$. Учитывая (29), мы получаем

$$\int\limits_1^\infty (\dots)\, d\mathcal{P}_1 = a|p|^\alpha \int\limits_0^\infty \biggl(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \dots + \frac{y^{4m-2}}{(4m-2)!}\biggr)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + o(|p|^\alpha).$$

□

Далее, из (32) и леммы 1 следует, что

$$\log f(p) = v(p) + T(p) + o(|p|^\alpha), \tag{34}$$

где

$$v(p) = -\frac{s_2 p^2}{2!} + \frac{s_4 p^4}{4!} - \dots - \frac{s_{4m-2} p^{4m-2}}{(4m-2)!}$$

(напомним, что $s_2, \dots, s_{4m-2}$ – семиинварианты случайной величины ξ_1.)

Лемма 2. *Существуют такие $\varepsilon_0, d_0 > 0$, что для $|p| \leqslant \varepsilon_0$ справедливо неравенство*

$$0 \leqslant f(p) e^{-v(p)} \leqslant e^{d_0 |p|^\alpha}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из (34). □

Нам понадобятся некоторые новые обозначения. Выберем убывающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, такую, что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Далее, для каждого $\alpha \in (4m-2, 4m)$ мы выберем и зафиксируем число $\gamma = \gamma(\alpha)$, так что $\gamma = 4m$, если $m > 1$ или $\alpha \in [3, 4)$ и $\gamma \in (\alpha, \min(4, \frac{2\alpha}{4-\alpha}))$, если $\alpha \in (2, 3)$.

Определим последовательность функций ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, полагая

$$\psi_n(p) = \exp\left(-n\left(v\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) + \frac{c_1 p^{4m}}{n}\right)\chi\left(\frac{|p|}{n^{1/\alpha - 1/\gamma}}\right)\right), \tag{35}$$

где константа $c_1 > 0$ определяется из (23).

Лемма 3. *Существует такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$*

$$\inf_p \psi_n(p) = 1.$$

Доказательство. Функция $\psi_n(p)$ отлична от 1 только если

$$|p| \leqslant 2\frac{n^{1/\alpha}}{n^{1/\gamma}}. \tag{36}$$

Покажем, что для таких значений p и достаточно больших n справедливо неравенство

$$\frac{c_1 p^{4m}}{n} \leqslant -v\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right). \tag{37}$$

Рассмотрим сначала случай $m = 1$, $\alpha \in (2,3)$. В этом случае $-v(p) = \frac{\mu_2 p^2}{2}$ и неравенство (37) эквивалентно

$$|p| \leqslant \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{2c_1}}\ \frac{n^{1/2}}{n^{1/\alpha}}. \tag{38}$$

Чтобы убедиться в справедливости (38), достаточно проверить, что

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} < \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha},$$

последнее неравенство в свою очередь эквивалентно $\gamma < \frac{2\alpha}{4-\alpha}$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \notin (2,3)$, в этом случае $\gamma = 4m$. Так как при $p \to 0$ $-v(p) \sim \frac{\mu_2 p^2}{2}$, то для достаточно малых p выполнено $-v(p) > \frac{\mu_2 p^2}{4}$ и, значит, для значений p, удовлетворяющих неравенству

$$|p| \leqslant M n^{(1-\frac{2}{\alpha})\frac{1}{4m-2}}, \tag{39}$$

где $M = (\frac{\mu_2}{4c_1})^{\frac{1}{4m-2}}$, справедливо неравенство (37).

Теперь нам достаточно убедиться, что для значений p, удовлетворяющих (36), справедливо (39), а для этого в свою очередь достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$0 < \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma} < \frac{\alpha - 2}{\alpha(4m-2)}. \tag{40}$$

Неравенство (40) в свою очередь эквивалентно

$$\gamma < \frac{\alpha(4m-2)}{4m-\alpha}. \tag{41}$$

Ясно, что (41) справедливо при $m = 1$, $\alpha \in [3,4)$, $\gamma = 4$. Пусть теперь $m > 1$. Покажем, что (41) справедливо при $\gamma = 4m$, $\alpha \in (4m-2, 4m)$.

Неравенство $4m < \frac{\alpha(4m-2)}{4m-\alpha}$ эквивалентно неравенству $\alpha > \frac{8m^2}{4m-1}$, и для завершения доказательства достаточно убедиться, что при $m \geqslant 2$ справедливо $4m - 2 > \frac{8m^2}{4m-1}$. Последнее легко проверяется непосредственным вычислением. $\square$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, а через f_n – соответствующую характеристическую функцию.

Имеем

$$f_n(p) = \Bigl(f\Bigl(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\Bigr)^n$$
$$= \Bigl(1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!n^{2/\alpha}} + \cdots - \frac{\mu_{4m-2}p^{4m-2}}{(4m-2)!n^{(4m-2)/\alpha}} + T\Bigl(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\Bigr)^n.$$

Ясно, что такая последовательность функций не имеет предела. Для того, чтобы сделать ее сходящейся, мы умножим f_n на функцию ψ_n, заданную формулой (35).

Теорема 2. *Последовательность* $f_n\psi_n$ *сходится в* $L_2(\mathbb{R})$ *при* $n \to \infty$ *к функции* $\widehat{q^\alpha}$, *определенной формулой* (23).

Доказательство. Сначала мы покажем, что для каждого $p \in \mathbb{R}$ $f_n(p)\psi_n(p) \to \widehat{q^\alpha}(p)$.

Заметим, что для каждого фиксированного p и достаточно больших n справедливо неравенство $|p|n^{1/\gamma-1/\alpha} < 1$, так что

$$f_n(p)\psi_n(p) = \biggl[\Bigl(1 - \frac{\mu_2 p^2}{2n^{2/\alpha}} + \cdots - \frac{\mu_{4m-2}p^{4m-2}}{(4m-2)!n^{(4m-2)/\alpha}} + T\Bigl(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\Bigr)e^{-v\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)}\biggr]^n e^{-c_1p^{4m}}. \tag{42}$$

Используя (34) и лемму 1, получаем

$$f_n(p)\psi_n(p) = \exp\Bigl(n\Bigl(\log f\Bigl(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Bigr) - v\Bigl(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\Bigr)\Bigr)\exp(-c_1p^{4m}) =$$

$$\exp\Bigl(n\Bigl(v\Bigl(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Bigr) + c_0\frac{|p|^\alpha}{n} + o\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr) - v\Bigl(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\Bigr)\Bigr)\exp(-c_1p^{4m}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{c_0|p|^\alpha - c_1p^{4m}}.$$

Покажем теперь, что $f_n\psi_n$ сходится к $\widehat{q^\alpha}$ не только поточечно, но также и в смысле $L_2(\mathbb{R})$.

Имеем

$$f_n(p)\psi_n(p) = A_n(p) + B_n(p), \tag{43}$$

где

$$A_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{[0,2n^{1/\alpha}n^{-1/\gamma}]}(p)$$

и

$$B_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{(2n^{1/\alpha}n^{-1/\gamma},\infty)}(p).$$

Заметим, что для каждого $p \in \mathbb{R}$ $A_n(p) \to \widehat{q^\alpha}(p)$ при $n \to \infty$, а в силу леммы 2 функции A_n^2 мажорируются L_1-функцией $e^{2d_0|p|^\alpha - 2c_1 p^{4m}}$. Используя теорему Лебега, мы получаем, что $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q^\alpha}$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\|B_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим сначала, что на интервале $[2n^{1/\alpha - 1/\gamma}, \infty)$ справедливо неравенство $M = \sup|f(p)| < 1$ и, следовательно,

$$|f(p)| \leqslant \min\left(M, \frac{K}{p^\delta}\right) = M \min\left(1, \frac{K}{Mp^\delta}\right). \tag{44}$$

Используя (44), мы получаем

$$\begin{aligned}
\|B_n\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{2n^{1/\alpha} n^{-1/(4k+2)}}^{\infty} \big(f_n(p)\psi_n(p)\big)^2 dp \\
&= \int\limits_{2n^{1/\alpha} n^{-1/\gamma}}^{\infty} \left(f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^{2n} dp = n^{1/\alpha} \int\limits_{2n^{-1/\gamma}}^{\infty} (f(u))^{2n} du \\
&\leqslant n^{1/\alpha} M^{2n} \left(\int\limits_{2n^{-1/\gamma}}^{(K/M)^{1/\delta}} du + \int\limits_{(K/M)^{1/\delta}}^{\infty} \left(\frac{K}{Mu^\delta}\right)^{2n} du \right) \\
&\leqslant n^{1/\alpha} M^{2n} \left(\left(\frac{K}{M}\right)^{1/\delta} + \frac{1}{2n\delta - 1} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/\delta} \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$. □

4.2. Случай $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m, 4m+2)$.

Пусть $\alpha \in (4m, 4m+2)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Как и выше, мы предположим, что характеристическая функция $f(p)$ случайной величины ξ_1 удовлетворяет (30). Имеем

$$\begin{aligned}
f(p) = \mathbb{E}\cos p\xi_1 &= 1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!} + \frac{\mu_4 p^4}{4!} - \dots + \frac{\mu_{4m} p^{4m}}{(4m)!} \\
&+ \mathbb{E}\left(\cos p\xi_1 - 1 + \frac{p^2\xi_1^2}{2!} - \frac{p^4\xi_1^4}{4!} + \dots - \frac{p^{4m}\xi_1^{4m}}{(4m)!} \right) \\
&= 1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!} + \frac{\mu_4 p^4}{4!} - \dots + \frac{\mu_{4m} p^{4m}}{(4m)!} - T(p),
\end{aligned} \tag{45}$$

где

$$T(p) = -2\int_0^\infty \Bigg(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2!} - \frac{p^4x^4}{4!} + \dots - \frac{p^{4m}x^{4m}}{(4m)!}\Bigg)\, d\mathcal{P}_1(x) > 0. \quad (46)$$

Лемма 4. $T(p) \sim c_2|p|^\alpha$, *при* $p \to 0$, *где*

$$c_2 = -2a\int_0^\infty \Bigg(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^4}{4!} + \dots - \frac{y^{4m}}{(4m)!}\Bigg)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} = \frac{\pi a}{\Gamma(1+\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}} > 0.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. □

Далее, из (45) и леммы 4 следует, что для логарифма характеристической функции мы имеем представление

$$\log f(p) = v(p) - T(p) + o(|p|^\alpha), \quad (47)$$

где

$$v(p) = -\frac{s_2p^2}{2!} + \frac{s_4p^4}{4!} - \dots + \frac{s_{4m}p^{4m}}{(4m)!},$$

а $s_2, \dots, s_{4m}$ – семиинварианты случайной величины ξ_1.

Лемма 5. *Существуют такие* $\varepsilon_0, d_0 > 0$, *что при* $|p| \leqslant \varepsilon_0$ *справедливы следующие неравенства*

$$0 \leqslant f(p)e^{-v(p)} \leqslant e^{-d_0|p|^\alpha}$$

и

$$e^{-v(p)} \geqslant 1.$$

Доказательство. Справедливость второго неравенства в малой окрестности нуля совершенно очевидна, а первое неравенство следует из (47) и леммы 4. □

Как и выше, пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – убывающая функция, такая, что $\chi(x) = 1$ при $x \leqslant 1$ и $\chi(x) = 0$ при $x \geqslant 2$. Мы определим последовательность гладких функций $\varphi_n = \varphi_n(p)$, полагая

$$\varphi_n(p) = \exp\big(-v(p)\chi(n^{1/(4m+2)}|p|)\big)$$

Далее, через $\mathcal{P}_n$ мы обозначим распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum\limits_{i=1}^n \xi_i$, а через f_n – характеристическую функцию $\mathcal{P}_n$. Имеем

$$\begin{aligned} f_n(p) &= \Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n \\ &= \Big(1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!n^{2/\alpha}} + \frac{\mu_4 p^4}{4!n^{4/\alpha}} - \dots + \frac{\mu_{4m} p^{4m}}{(4m)!n^{4m/\alpha}} - T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n. \end{aligned}$$

Ясно, что такая последовательность функций не имеет предела и для того, чтобы сделать последовательность f_n сходящейся, мы умножим f_n на функцию

$$\psi_n(p) = \Big(\varphi_n\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n. \tag{48}$$

Теорема 3. *Последовательность $f_n\psi_n$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$ к функции $\widehat{q^\alpha}$, где $\widehat{q^\alpha}(p) = \exp(-c_2|p|^\alpha)$.*

Доказательство. Сначала мы покажем, что $f_n\psi_n$ сходится к $\widehat{q^\alpha}$ поточечно. Заметим, что для каждого фиксированного p и всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$|p|n^{1/(4m+2)-1/\alpha} < 1,$$

и, значит,

$$\begin{aligned} &\Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\varphi_n\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n \\ &\quad= \exp\Big[n\Big(\log f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) - v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)\Big] \\ &\quad= \exp\Big[n\Big(v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) - T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big) - v\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)\Big] \\ &\quad= \exp\Big[n\Big(-T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big] \\ &\quad= \exp\big[-c_2|p|^\alpha + o(1)\big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-c_2|p|^\alpha). \end{aligned}$$

Теперь мы покажем, что сходимость $f_n\psi_n \to \widehat{q^\alpha}$ имеет место не только поточечно, но также и в смысле $L_2(\mathbb{R})$.

Имеем
$$f_n(p)\psi_n(p) = A_n(p) + B_n(p), \tag{49}$$
где
$$A_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{[0,2n^{1/\alpha}n^{-1/(4m+2)}]}(p)$$
и
$$B_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)\mathbf{1}_{(2n^{1/\alpha}n^{-1/(4m+2)},\infty)}(p).$$

Заметим, что для каждого $p \in \mathbb{R}$ $A_n(p) \to \widehat{q^\alpha}(p)$ при $n \to \infty$ и по лемме 5 функции A_n^2 мажорируются функцией $e^{-2d_0|p|^\alpha}$. Используя теорему Лебега, мы получаем, что $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{q^\alpha}$ в $L_2(\mathbb{R})$.

Теперь для доказательства теоремы нам достаточно проверить, что $\|B_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Это делается в точности так же, как при доказательстве теоремы 2. □

5. Приложение к локальным предельным теоремам для больших уклонений

Как и выше, мы обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а через p_n – соответствующую плотность. Далее, обозначим через ζ_n обратное преобразование Фурье функции $\psi_n - 1$. Напомним, что для $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m, 4m+2)$ функция ψ_n определяется формулой (48), а для $\alpha \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (4m-2, 4m)$ – формулой (35).

Ясно, что
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta_n(x)dx = \psi_n(0) - 1 = 0.$$

Из теорем 2 и 3 следует, что последовательность $p_n + p_n * \zeta_n$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к функции q^α. Асимптотическое поведение q^α описывается следующим утверждением.

Лемма 6. *При $x \to +\infty$ мы имеем*
$$q^\alpha(x) = \frac{a}{x^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{x^{1+2\alpha}}\right),$$

где $a = \frac{-c_0}{\pi}\Gamma(1+\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ *при* $\alpha \in (4m-2, 4m)$ *и* $a = \frac{c_2}{\pi}\Gamma(1+\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ *при* $\alpha \in (4m, 4m+2)$.

Доказательство. Можно найти в [11]. □

Основная цель настоящего параграфа – показать, что асимптотическое поведение p_n совпадает с асимптотическим поведением q^α.

Нам понадобится сделать ряд дополнительных предположений. Именно, мы предположим, что при $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m)$ характеристическая функция f случайной величины ξ_1 допускает представление

$$f(p) = 1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!} + \cdots - \frac{\mu_{4m-2}p^{4m-2}}{(4m-2)!} + c_0|p|^\alpha - R(p), \tag{50}$$

где функция $R(p)$ имеет вид

$$R(p) = p^{[\alpha]+1}R_0(p), \tag{51}$$

а функция R_0 $[\alpha]+2$ раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности нуля (здесь как обычно через $[\alpha]$ мы обозначаем целую часть α). Аналогично, для $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+2)$ мы предположим, что функция f допускает представление

$$f(p) = 1 - \frac{\mu_2 p^2}{2!} + \cdots + \frac{\mu_{4m}p^{4m}}{(4m)!} - c_2|p|^\alpha + R(p), \tag{52}$$

где функция $R(p)$ удовлетворяет (51). Мы также предположим, что вне некоторой окрестности нуля функция f $[\alpha]+2$ раз непрерывно дифференцируема и все производные $f^{(i)}(p)$, $i = 1, 2\ldots, [\alpha]+2$, ограничены.

Например, для каждого $A > 0$ распределение $\mathcal{P}_1$ с плотностью V вида

$$V(x) = \frac{\alpha A}{2}\,\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}\mathbf{1}_{[A,\infty)}(|x|)$$

удовлетворяет последнему условию, причем при $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m-2, 4m)$ функция $f(p) = \widehat{V}(p)$ удовлетворяет (50), а при $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+2)$ удовлетворяет (52).

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $\widehat{g}$ – преобразование Фурье функции g. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ $\widehat{g}^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|^k} \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{g}^{(k)}(p)|dp. \tag{53}$$

Доказательство. Очевидно. □

Через h_n мы обозначим функцию $h_n(p) = f_n(p)\psi_n(p) - \widehat{q^\alpha}(p)$. Из теорем 2 и 3 следует, что $\|h_n\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Всюду далее через C мы будем обозначать положительные константы. Одна и та же буква C может обозначать разные константы.

Далее мы рассмотрим отдельно случаи $\alpha \in (4m-2, 4m)$ и $\alpha \in (4m, 4m+2)$. Сначала мы рассмотрим случай $\alpha \in (4m-2, 4m)$.

Теорема 4. *Для $\alpha \in (4m-2, 4m)$ мы имеем*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |h_n^{([\alpha]+2)}(p)|dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\alpha}-1}}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in [4m-1, 4m)$ (случай $\alpha \in (4m-2, 4m-1)$ рассматривается аналогично). При $\alpha \in [4m-1, 4m)$ мы имеем $\gamma = 4m$ и $[\alpha]+2 = 4m+1$. Сначала мы оценим $\int\limits_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-1/4m}} |h_n^{(4m+1)}(p)|dp$.

Из (51) следует, что

$$\log f(p) = v(p) + c_0|p|^\alpha - p^{4m}T_0(p), \tag{54}$$

где функция T_0 $4m+1$ раз непрерывно дифференцируема в окрестности нуля.

Для $|p| \leqslant n^{1/\alpha-1/4m}$, используя (54), мы получаем

$$\begin{aligned} h_n(p) &= f_n(p)\psi_n(p) - \exp(c_0|p|^\alpha - c_1p^{4m}) \\ &= \exp\left(n\left(\log f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) - v\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) - \frac{c_1p^{4m}}{n}\right)\right) \\ &- \exp(c_0|p|^\alpha - c_1p^{4m}) = \exp(c_0|p|^\alpha - c_1p^{4m}) \\ &\times \left[\exp\left(-n\frac{p^{4m}}{n^{4m/\alpha}}T_0\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right) - 1\right]. \end{aligned} \tag{55}$$

Важно отметить, что функция (55) $4m+1$ раз дифференцируема в нуле. Из (55) вытекает оценка

$$\int\limits_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-1/4m}} |h_n^{(4m+1)}(p)|dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\alpha}-1}}. \tag{56}$$

Следующим шагом мы оценим $\int\limits_{|p|>n^{1/\alpha-1/4m}} |h_n^{(4m+1)}(p)|dp$. Имеем

$$\int\limits_{|p|>n^{1/\alpha-1/4m}} |h_n^{(4m+1)}(p)|dp \leqslant \int\limits_{|p|>n^{1/\alpha-1/4m}} |(e^{c_0p^\alpha-c_1p^{4m}})^{(4m+1)}|dp$$
$$+ \int\limits_{|p|>n^{1/\alpha-1/4m}} |(f_n(p)\psi_n(p))^{(4m+1)}|dp.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, что для каждого $N \in \mathbb{N}$ существует такое $C>0$, что

$$\int\limits_{|p|>n^{1/\alpha-1/4m}} |h_n^{(4m+1)}(p)|dp \leqslant Cn^{-N}.$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Теперь рассмотрим случай $\alpha \in (4m, 4m+2)$.

Теорема 5. *При $\alpha \in (4m, 4m+2)$ мы имеем*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |h_n^{([\alpha]+2)}(p)|dp \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m+2}{\alpha}-1}}.$$

Доказательство. Доказывается аналогично теореме 4. □

Теперь из леммы 7 и теорем 4 и 5 следует, что для каждого $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (4m-2, 4m)$ мы имеем

$$|p_n(x) + p_n * \zeta_n(x) - q^\alpha(x)| \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m}{\alpha}-1}|x|^{[\alpha]+2}}, \tag{57}$$

а для $\alpha \in (4m, 4m+2)$ имеем

$$|p_n + p_n * \zeta_n(x) - q^\alpha(x)| \leqslant \frac{C}{n^{\frac{4m+2}{\alpha}-1}|x|^{[\alpha]+2}}. \qquad (58)$$

Учитывая (57), (58) и лемму 6, получаем

$$p_n + p_n * \zeta_n(x) \sim \frac{a}{|x|^{1+\alpha}}$$

при $x \to \infty$.

Наша следующая цель – сравнить асимптотическое поведение $p_n + p_n * \zeta_n$ и p_n. Для этого мы также используем лемму 7.

Положим $d_n(p) = f_n(p)\psi_n(p) - f_n(p) = f_n(p)\big(\psi_n(p) - 1\big)$.

Теорема 6. *Для каждого* $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \Big((4m-2, 4m) \cup (4m, 4m+2)\Big)$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}} |d_n^{([\alpha]+2)}(p)|dp \leqslant C\rho_n^{[\alpha+1]-\alpha},$$

где $\rho_n = n^{1/2-1/\alpha} \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство.

Предположим, что $\alpha \in [4m+1, 4m+2)$. В этом случае мы должны доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp \leqslant C\rho_n^{4m+2-\alpha}. \qquad (59)$$

Как и выше, сначала мы оценим $\int\limits_{|p| \leqslant n^{1/\alpha - \frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp$. Если $|p| \leqslant n^{1/\alpha - \frac{1}{4m+2}}$, то из (48) следует, что

$$\begin{aligned} d_n(p) &= f_n(p)\psi_n(p) - f_n(p) = f_n(p)\psi_n(p)[1 - \psi_n^{-1}(p)] \\ &= \exp(-c_2|p|^\alpha)\exp\left(n\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)^{4m+2} T_0\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\right) \\ &\qquad \times \left[1 - \exp\left(nv\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\right)\right]. \qquad (60) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\int\limits_{|p|\leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp = \int\limits_{|p|\leqslant \rho_n^{-1}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp$$

$$+ \int\limits_{\rho_n^{-1}<|p|\leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp = A_n + B_n. \tag{61}$$

Нетрудно проверить, что для некоторой константы $C > 0$

$$|A_n| \leqslant C\frac{n}{n^{2/\alpha}} \int\limits_0^{\rho_n^{-1}} p^{\alpha-4m-1}dp = C\rho_n^2\rho_n^{4m-\alpha} = C\rho_n^{4m+2-\alpha}$$

и

$$|B_n| \leqslant C \int\limits_{\rho_n^{-1}<|p|\leqslant n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} p^{\alpha-4m-3}e^{-c_2p^\alpha}dp$$

$$\leqslant \int\limits_{\rho_n^{-1}}^{\infty} p^{\alpha-4m-3}e^{-c_2p^\alpha}dp \leqslant C\rho_n^{4m+2-\alpha}.$$

Следующим шагом мы оценим

$$\int\limits_{n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}\leqslant|p|\leqslant 2n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp.$$

Заметим сначала, что для каждого $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$ справедливо $\psi_n^{-1}(p) \leqslant 1$. Рассуждая, как и выше, мы получим, что для каждого $N \in \mathbb{N}$ существует такое $C > 0$, что

$$\int\limits_{n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}\leqslant|p|\leqslant 2n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}} |d_n^{(4m+3)}(p)|dp \leqslant Cn^{-N}.$$

Теперь для завершения доказательства достаточно заметить, что $d_n(p) = 0$ при $|p| > 2n^{1/\alpha-\frac{1}{4m+2}}$.

В случае $\alpha \in (4m-2, 4m) \cup (4m, 4m+1)$ оценка может быть получена аналогичным образом. $\square$

Результаты настоящего параграфа тесно связаны с локальными предельными теоремами для больших уклонений (см. [5, 7]). Снова для определенности предположим, что $\alpha \in [4m+1, 4m+2)$. Из теорем 4, 5, 6 следует, что

$$p_n(x) = \frac{a}{|x|^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{|x|^{4m+3}}\right) + g_n(x), \quad \text{если} \quad x \to \infty,$$

где

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{\left(n^{1/2-1/\alpha}\right)^{4m+2-\alpha}}{|x|^{4m+3}}.$$

Из последней формулы следует, что асимптотическое соотношение $p_n(x) \sim \frac{a}{|x|^{1+\alpha}}$, $x \to \infty$, справедливо, если

$$\frac{\left(n^{1/2-1/\alpha}\right)^{4m+2-\alpha}}{|x|^{4m+3}} = o\left(\frac{1}{|x|^{1+\alpha}}\right),$$

или, что то же самое,

$$\sqrt{n}\frac{1}{xn^{1/\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Литература

1. S. Albeverio, N. Smorodina, *A Distributional approach to multiple stochastic integrals and transformations of the Poisson measure*, — Acta Appl. Math. **94** (2006), 1–19.
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, М. (1958).
3. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения.* Наука, М. (1983).
4. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные случайные величины.* Наука, М. (1965).
5. S. V. Nagaev, *Large deviations of sums of independent random variables.* — Ann. Prob. **7**, No. 5 (1979), 745–789.
6. С. В. Нагаев, *Локальные предельные теоремы для больших уклонений.* — Теор. вероятн. и ее примен. **5**, No. 2 (1960), 259–261.
7. С. В. Нагаев, *Локальные предельные теоремы для больших уклонений.* — Вестник ЛГУ, Серия матем., механ., астрон. **1** (1962), 80–88.
8. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1986).

9. Н. В. Смородина, *Асимптотическое разложение для распределения гладкого однородного функционала от строго устойчивого случайного вектора. II.* — Теория вероятн. и ее примен. **44**, No. 2 (1999), 458–465.
10. N. Smorodina, M. Faddeev, *The Lévy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications.* — Acta Appl. Math. DOI 10.1007/s10440-009-9510-9.
11. Л. Шварц, *Математические методы для физических наук.* Мир, М. (1965).

Smorodina N. V., Faddeev M. M. The theorems about stochastic integral distributions convergence to signed measures and the local limit theorems for large deviations.

We study properties of symmetric stable measures with index $\alpha > 2$, $\alpha \neq 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Such measures are signed ones and hence they are not probability measures. For this class of measures we construct an analogue of the Lévy–Khinchin representation. We show that in some sense these signed measures are limit measures for sums of independent random variables.

С. Петербургский государственный университет,
Университетеский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

Поступило 10 октября 2009 г.

E-mail: mmf@ns2691.spb.edu