Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

Л. В. Розовский

О МАЛЫХ УКЛОНЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ГЛАДКИМИ ВЕСАМИ

1. Введение

Пусть $M = \sup\limits_{j\geqslant 1} \lambda_j X_j$, где $\{\lambda_j\}$ – последовательность *невозрастающих* положительных чисел, а $\{X_i\}$ – независимые копии неотрицательной случайной величины X с функцией распределения $\mathbf{P}(X < x) = V(x) > 0$ при любом $x > 0$. В предположении $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$ нами исследуется поведение $-\log \mathbf{P}(M < r)$ при $r \to 0$.

Такие задачи рассматривались ранее в работах [1, 2] и [3]. Приведем некоторые полученные там результаты.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $\alpha > 0$

$$\lambda_j \sim e^{-\alpha(j-1)}, \quad j \to \infty, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{E} \log(1 + X) < \infty \tag{1.2}$$

и $\mathbf{P}(X = 0) = p_0 \in (0, 1)$. *Тогда* $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$ *и*

$$-\log \mathbf{P}(M < r) \sim \frac{\log 1/p_0}{\alpha} \log 1/r, \quad r \to 0. \tag{1.3}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и* (1.2). *Если при некотором положительном* β

$$-\log V(r) = \beta \log 1/r + O(1), \quad r \to 0, \tag{1.4}$$

то $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$ *и*

$$-\log \mathbf{P}(M < r) \sim \frac{\beta (\log 1/r)^2}{2\alpha}, \quad r \to 0. \tag{1.5}$$

Ключевые слова : малые уклонения, максимальный элемент, неотрицательные случайные величины, медленно меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции.

Работа поддержана грантом НШ 638.2008.1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.2) *и* $\lambda_j = q^{j-1}$, $j \geqslant 1$. *Если при некотором положительном* τ

$$-\log V(r) \sim K\, r^{-\tau}, \quad r \to 0, \tag{1.6}$$

то $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$ *и*

$$-\log \mathbf{P}(M < r) \sim \frac{K}{1 - q^{\tau}}\, r^{-\tau}, \quad r \to 0. \tag{1.7}$$

Теоремы 1-3 доказаны в [2, Теоремы 10–12]. Заметим, что в [3] содержится широкое обобщение теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть при некоторых* $\gamma > 0$ *и* δ

$$\lambda_j \sim \left(\frac{\log^{\delta} j}{j} \right)^{1/\gamma}, \quad j \to \infty. \tag{1.8}$$

Положим $b(u) = \gamma^{\delta}\, u^{\gamma}\, \log^{\delta} u$, $u > 1$. *Если* $\mathbf{E}\, X^{\gamma} < \infty$, $\mathbf{E}\, b(X) < \infty$ *и*

$$-\log V(r) = O\,(r^{-\nu}), \quad \nu < \gamma, \quad r \to 0, \tag{1.9}$$

то $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$,

$$K(\gamma) = \int\limits_0^{\infty} u^{\gamma}\, d \log V(u) < \infty \tag{1.10}$$

и

$$-\log \mathbf{P}(M < r) \sim K(\gamma)\, b(1/r), \quad r \to 0. \tag{1.11}$$

Теорема 4 доказана в [1, Теоремы 4.1 и 4.3].

Отметим следующее: во всех приведенных теоремах асимптотика для $-\log \mathbf{P}(M < r)$ является функцией, правильно меняющейся в нуле. При этом, в случае замены в этих теоремах M на

$$M_Q = \sup_{j \geqslant Q} \lambda_j X_j, \quad Q = 1, 2, \dots, \tag{1.12}$$

правые части соотношений (1.3), (1.5) и (1.11) не меняются, а в правой части соотношения (1.7) добавляется множитель $q^{\tau(Q-1)}$.

Вышесказанное наводит на мысль рассмотреть соответствующую проблему в общем виде, а именно, исследовать соотношение

$$-\log \mathbf{P}(M_Q < r) \sim J_Q\,\omega(r), \quad r \to 0, \tag{1.13}$$

при *некоторой* положительной, возможно правильно меняющейся, функции $\omega(r)$, *любом* $Q \geqslant 1$ и *некоторой* последовательности $\{J_Q\}$ (заметим, что из (1.13) следует, что числа J_Q положительны и не возрастают).

В следующем параграфе приведены необходимые и достаточные условия для (1.13) в предположении, что веса $\{\lambda_j\}$ являются гладкими в некотором смысле. Тем самым, вероятностная проблема сводится к аналитической задаче, которая предполагает асимптотический анализ интегралов определенного вида. На этом пути возможно уточнить и обобщить теоремы 1–4, а также найти для $-\log \mathbf{P}(M < r)$ новые асимптотики.

2. Результаты

Пусть положительная *неубывающая* функция $b(u) = b_\gamma(u)$, $u \geqslant 0$, правильно меняется на ∞ с некоторым неотрицательным показателем γ, т.е. функция $b_0(u) = u^{-\gamma} b(u)$ медленно меняется на ∞. Следуя [3], предположим, что $b(u)$ и $\{\lambda_j\}$ связаны соотношением

$$b_\gamma(1/\lambda_j) \sim j \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.1}$$

Так, если $\lambda_j \sim j^{-1/\gamma}\, g(\log j)$, где $\gamma > 0$ и положительная функция $g(u)$, $u > 0$, удовлетворяет условию $u\, g'(u) = (\delta + o(1)) g(u)$, $u \to \infty$ при некотором δ (и, следовательно, правильно меняется на ∞ с показателем δ), то можно положить $b(u) = u^\gamma (\gamma^\delta\, g(\log u))^\gamma$,$u > 1$. Если же $-\log \lambda_j \sim \alpha\, j^{\,\delta}$ при положительных α и δ, то $b(u) = (\alpha^{-1}\, \log u)^{1/\delta}$, $u > 1$. Наконец, если $\lambda^{-1}(1/u)$ правильно меняется на ∞ с показателем γ, то естественен выбор $b(u) = \lambda^{-1}(1/u)$, $u > 1$.

В [3, Замечание 1] было показано, что необходимое предположение $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$ равносильно условию

$$\mathbf{E}\, b_\gamma(X) < \infty. \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что условия (2.1) и (2.2) выполняются.

Положим

$$J(r) = -\int_1^\infty \log V(r\,u)\,db_\gamma(u), \quad 0 < r \leqslant 1.$$

Предложение 1. *Пусть* $\omega(r),\ 0 < r \leqslant 1$, *обозначает некоторую положительную функцию. Для того, чтобы при всех* $Q \geqslant 1$

$$-\log \mathbf{P}(M_Q < r) \sim \omega(r), \quad r \to 0, \tag{2.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$-\log V(r) = o\,(\omega(r)), \quad r \to 0, \tag{2.4}$$

и

$$J(r) \sim \omega(r), \quad r \to 0. \tag{2.5}$$

Кроме того, из условий (2.4) *и* (2.5) *следует, что функции* $J(r)$ *и* $\omega(r)$ *правильно меняются в нуле с показателем* $-\gamma$.

Отметим, что необходимость в предложении 1 сохранит справедливость, если условие (2.3) будет выполняться хотя бы при двух значениях Q, например, при $Q = 1$ и 2.

Замечание 1. Если выполнено условие (2.4), то

$$-\log \mathbf{P}(M < r) = (-1 + o\,(1)) \int_{1/\lambda_1}^\infty \log V(r\,u)\,db_\gamma(u) + o\,(\omega(r/\lambda_1)), \qquad r \to 0.$$

В частности, если $-\log V(r) = o\,(b(1/r)),\ r \to 0$, то $-\log \mathbf{P}(M < r) \sim J(r),\ r \to 0$.

Приведем одно следствие предложения 1, полученное с помощью достаточно несложной проверки условий (2.4) и (2.5) при подходящем $\omega(r)$.

Теорема 5. *Пусть* $-\log\lambda_j \sim \alpha j$ *при некотором* $\alpha > 0$, *а положительная функция* $g_\delta(t)$, $t > 1$, *правильно меняется на* ∞ *с некоторым показателем* $\delta \geqslant 0$. *Если выполнено условие* (1.2) *и*

$$-\log V(r) \sim g_\delta(\log 1/r), \quad r \to 0,$$

то $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$ *и*

$$-\log \mathbf{P}(M < r) \sim \frac{1}{\alpha(1+\delta)}\, g_\delta(\log 1/r)\, \log 1/r, \quad r \to 0.$$

Заметим, что теоремы 1 и 2 вытекают из теоремы 5 при $\delta = 0$, $g_\delta(t) = \log 1/p_0$ и $\delta = 1$, $g_\delta(t) = \beta\, t$, соответственно.

Предложение 2. *Пусть положительная функция* $\omega_\tau(r)$, $r > 0$, *правильно меняется в нуле с некоторым показателем* $-\tau$, *а числовая последовательность* $\{J_Q\}$ *содержит хотя бы два неравных элемента. Соотношение*

$$-\log \mathbf{P}(M_Q < r) \sim J_Q\, \omega_\tau(r) \quad (\forall Q \geqslant 1), \quad r \to 0, \tag{2.6}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$-\log V(r) \sim c\, \omega_\tau(r), \quad r \to 0, \tag{2.7}$$

$$J(r) \sim (c\, k_\tau + d)\, \omega_\tau(r), \quad r \to 0, \tag{2.8}$$

$$J_Q = d + c\, L_Q, \tag{2.9}$$

где $c > 0$ *и* $d \geqslant 0$ *– некоторые постоянные, а*

$$k_\tau = \int\limits_1^\infty u^{-\tau}\, db(u) < \infty \tag{2.10}$$

и

$$L_Q = \sum_{j \geqslant Q} \lambda_j^\tau < \infty. \tag{2.11}$$

Заметим, что из условия (2.10) следует, что $\tau \geqslant \gamma$ и $\tau > 0$; кроме того, условия (2.10) и (2.11) равносильны и всегда выполняются, если $\tau > \gamma$.

Следствием предложения 2 является нижеследующий результат, обобщающий и уточняющий теорему 3.

Теорема 6. *Пусть последовательность* $\{\lambda_j\}$ *удовлетворяет условию теоремы* 5, *а функция* $\omega_\tau(r)$, $\tau > 0$, *такая, как в предложении* 2. *Если выполнены условия* (1.2) *и* (2.7) *при* $c = 1$, *то* $\mathbf{P}(M < \infty) = 1$ *и* (*см.*(2.11))

$$-\log \mathbf{P}(M < r) \sim L_1\, \omega_\tau(r), \quad r \to 0.$$

Предложение 2, так же как и предложение 1, в части достаточности можно уточнить.

Замечание 2. Пусть функция $\omega_\tau(r)$ определена в предложении 2. Если выполнены условия (2.7) и (2.10), то (см. (2.11))

$$-\log \mathbf{P}(M < r) \sim c\,(L_1 - k_\tau)\, \omega_\tau(r) + J(r), \quad r \to 0. \tag{2.12}$$

Достаточность в предложении 2 следует из (2.12) и (2.8).

3. Доказательства

Пусть выполняются условия (2.1) и (2.2). Тогда (напоминаем, что распределение $V(r)$ положительно в любой окрестности нуля)

$$-\log \mathbf{P}(M_Q < r) = \sum_{j \geqslant Q} (-\log V(r/\lambda_j)) < \infty \quad (\forall r > 0).$$

Доказательство предложения 1. При $R > Q$ положим

$$-\log \mathbf{P}(M_Q < r) = \left(\sum_{j=Q}^{R-1} + \sum_{j \geqslant R}\right)(-\log V(r/\lambda_j)) = A_R + B_R. \tag{3.1}$$

Пусть положительная невозрастающая функция $\lambda(y)$, $y > 0$, удовлетворяет условию $\lambda_j = \lambda(j)$, $j \geqslant 1$.

Очевидно,

$$\hat{J}_R(t) = -\int_R^\infty \log V(r/\lambda_j)\, dy \leqslant B_R \leqslant \hat{J}_R(t) - \log V(r/\lambda_R) \tag{3.2}$$

и, по (2.2),

$$\hat{J}_R(t) = R \log V(r/\lambda_R) + \int_R^\infty y d \log V(r/\lambda(y)). \tag{3.3}$$

Если $R \to \infty$ при $r \to 0$, то, по (2.1),

$$\int_R^\infty y d\log V(r/\lambda(y)) \sim \int_R^\infty b(1/\lambda(y)) d\log V(r/\lambda(y))$$

$$= -b(1/\lambda_R)\log V(r/\lambda_R) - \int_{1/\lambda_R}^\infty \log V(ru)\, db(u).$$

Отсюда и из (3.3), (3.2) и (2.2) следует

$$B_R = o(1) R\log V(r/\lambda_R) + (-1+o(1)) \int_{1/\lambda_R}^\infty \log V(ru)\, db(u), \ r \to 0. \quad (3.4)$$

Предположим, что выполнены условия (2.4) и (2.5). Тогда, если $R \to \infty$ достаточно медленно при $r \to 0$,

$$\int_1^{1/\lambda_R} \log V(ru)\, db(u) \leqslant -b(1/\lambda_R)\log V(r) \sim -R\log V(r) = o(1)J(r)$$

и $-R\log V(r/\lambda_R) = o(1)J(r)$. Таким образом,

$$B_R \sim J(r), \quad r \to 0. \quad (3.5)$$

Покажем теперь, что функция $J(r)$ правильно меняется в нуле с показателем $-\gamma$. По (2.2), при $r \to 0$

$$J(r) \sim \int_1^\infty b(u)\, d\log V(ru) = \int_r^\infty b(u/r)\, d\log V(u). \quad (3.6)$$

Пусть положительная функция $\varepsilon = \varepsilon(r)$ стремится к нулю при $r \to 0$. Тогда при любом положительном k

$$J(kr) \sim \Big(\int_{r/\varepsilon}^\infty + \int_{kr}^{r/\varepsilon}\Big) b(u/(kr))\, d\log V(u) = I_1 + I_2.$$

Функция $b(u)$ правильно меняется на ∞ с показателем γ и, следовательно,

$$I_1 \sim k^{-\gamma} \int_{r/\varepsilon}^{\infty} b(u/r)\, d \log V(u), \quad r \to 0.$$

Поскольку

$$\int_{r}^{r/\varepsilon} b(u/r)\, d \log V(u) \leqslant b(1/\varepsilon)(-\log V(r)) = o\,(1) b(1/\varepsilon) J(r)$$
$$= o\,(1) J(r), \quad r \to 0,$$

если ε стремится к 0 достаточно медленно, из (3.6) следует, что

$$I_1 \sim k^{-\gamma} J(r), \quad r \to 0.$$

Аналогично,

$$I_2 \leqslant b(1/(k\varepsilon))(-\log V(kr)) = o\,(1) J(kr),$$

откуда

$$J(kr) = (k^{-\gamma} + o\,(1)) J(r) + o\,(J(kr)), \quad r \to 0.$$

Таким образом,

$$J(kr) \sim k^{-\gamma} J(r), \quad r \to 0,$$

т.е. $J(r)$ в самом деле правильно меняется в нуле с показателем $-\gamma$.

Отсюда, в частности, следует

$$A_R \leqslant -R \log V(r/\lambda_1) = o\,(J(r)), \quad r \to 0, \tag{3.7}$$

что, вместе с (3.5), (3.1) и (2.5), доказывает достаточность в предложении 1. Замечание 1 следует из (3.1), (3.4) и (3.7).

Теперь проверим необходимость. Пусть, для определенности, (2.3) выполняется при $Q = 1$ и 2. Тогда

$$-\log \mathbf{P}(M_1 < r) + \log \mathbf{P}(M_2 < r) = -\log V(r/\lambda_1) = o\,(\omega(r)), \quad r \to 0 \tag{3.8}$$

и, следовательно (см. (3.1), (3.4) и (3.7)),

$$A_R = o\,(\omega(r)),$$

$$-\log \mathbf{P}(M_Q < r) = (-1 + o\,(1)) \int\limits_{1/\lambda_R}^{\infty} \log V(ru)\,db(u) + o\,(\omega(r))$$

$$= (-1 + o\,(1)) \int\limits_{1/\lambda_1}^{\infty} \log V(ru)\,db(u) + o\,(\omega(r)), \quad r \to 0. \tag{3.9}$$

Из (2.3) и (3.9) следует

$$\omega(r) \sim \tilde{J}(r) = \int\limits_{1/\lambda_1}^{\infty} \log V(ru)\,db(u). \tag{3.10}$$

Функция $\tilde{J}(r)$ правильно меняется в нуле (этот факт проверяется так же, как аналогичное свойство $J(r)$). Поэтому, принимая во внимание (3.8) и (3.10), получим

$$-\log V(r) = o\,(\tilde{J}(r/\lambda_1)) = o\,(\tilde{J}(r)), \quad r \to 0.$$

Таким образом, $|\int\limits_{1/\lambda_1}^{1} \log V(ru)\,db(u)| = o\,(\tilde{J}(r))$ при $r \to 0$ и, следовательно, $\tilde{J}(r) \sim J(r)$. Отсюда следуют соотношения (2.4) и (2.5).

Предложение 1 полностью доказано.

Доказательство предложения 2. Из условий (2.1) и (2.2) следует (см. (2.11))

$$L_Q < \infty \Longleftrightarrow \int\limits_1^{\infty} \lambda^{\tau}(u)du < \infty \Longleftrightarrow \int\limits_1^{\infty} u d\lambda^{\tau}(u) < \infty \Longleftrightarrow (2.10). \tag{3.11}$$

Отсюда, по (2.7) (см. также (3.1) и (3.4)) при $r \to 0$

$$-\log V(r/\lambda_j) \sim \lambda_j^{\tau}\,\omega_\tau(r)\ (1 \leqslant j \leqslant R), \quad R\lambda_R^{\tau} \sim b(1/\lambda_R)\lambda_R^{\tau} \to 0,$$

$$A_R \sim c\,L_Q\,\omega_\tau(r), \quad -\int\limits_1^{1/\lambda_R} \log V(ru)\,db(u)$$

$$\sim c\,\omega_\tau(r) \int\limits_1^{1/\lambda_R} u^{-\tau}\,db(u) \sim c\,k_\tau\,\omega_\tau(r). \tag{3.12}$$

Это, а также (3.4), (3.1) и (2.8) доказывает достаточность в предложении 2. Замечание 2 проверяется аналогично.

Обратно, если (2.6) выполняется при некоторой последовательности $\{J_Q\}$, то при $r \to 0$

$$-\log V(r/\lambda_i) \sim (J_i - J_{i+1})\, \omega_\tau(r), \quad i = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$-\log V(r) \sim (J_i - J_{i+1})\, \lambda_i^{-\tau}\, \omega_\tau(r), \quad i = 1, 2, \dots. \tag{3.13}$$

Отсюда, $(J_Q - J_{Q+1})\, \lambda_Q^{-\tau} = c$ $(\forall Q \geqslant 1)$, где постоянная $c > 0$ в силу сделанного предположения о том, что последовательность $\{J_Q\}$ содержит разные элементы. Таким образом, мы приходим к (2.7), (2.11) и (2.10), а также к (2.9) при $d = \lim\limits_{Q\to\infty} J_Q$ (заметим, что $J_1 > J_2 > \cdots$).

Чтобы получить (2.8), следует сопоставить (2.6) и (3.1), принимая во внимание условия (3.4) и (3.12).

Доказательства теорем 5 и 6. Для проверки теоремы 5 воспользуемся предложением 1 (достаточность) при $b(u) = \alpha^{-1} \log u$, $u > 1$ и

$$\omega(r) = \frac{1}{\alpha(1+\delta)}\, g_\delta(\log 1/r)\, \log 1/r.$$

Условие (2.4), очевидным образом, выполняется. Теперь

$$J(r) = \Big(\int\limits_r^\varepsilon + \int\limits_\varepsilon^{1/\varepsilon} + \int\limits_{1/\varepsilon}^\infty\Big)(-\log V(u))\, db(u/r) = I_1 + I_2 + I_3.$$

При этом, если $\varepsilon \to 0$ достаточно медленно при $r \to 0$, то $I_2 = o\,(\omega(r))$; из условий теоремы 5 и свойств правильно меняющихся функций следует

$$I_1 \sim \alpha^{-1} \int\limits_{\log 1/\varepsilon}^{\log 1/r} g_\delta(t)\, dt \sim \omega(r), \quad r \to 0,$$

и по (1.2)

$$I_3 \sim \alpha^{-1} \int\limits_{1/\varepsilon}^{\infty} (1 - V(u))\, du/u = o(1), \quad r \to 0.$$

Таким образом, условие (2.5) также справедливо. Отсюда и из предложения 1 следует (2.3) и, следовательно (см. также (2.2)), теорема 5.

Теорема 6 доказывается с помощью предложения 2 совершенно аналогично.

Литература

1. F. Aurzada, *On the lower tail probabilities of some random sequences in l_p.* — J. Theoret. Probab., **20** (2007), 843–858.
2. F. Aurzada, *A short note on small deviations of sequences of i.i.d. random variables with exponentially decreasing weights.* — Statist. Probab. Lett., **78** (2008), 2300–2307.
3. L. V. Rozovsky, (2009). *Small deviations of series of weighted i.i.d. non-negative random variables with a positive mass at the origin.* — Statist. Probab. Lett. **79** (2009), 1495–1500.

Rozovsky L. V. Small deviations of the maximal element of a sequence of independent variables with smooth weights.

We study the logarithmic small deviations of the maximal element of a sequence $\{\lambda_j X_j\}$, where $\{X_j\}$ are independent copies of non-negative random variable X and $\{\lambda_j\}$ is a non-increasing sequence of positive numbers, satisfying certain conditions of regularity.

С.-Петербургская
Химико-фармацевтическая Академия
ул. проф. Попова 14,
197376, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: L-Rozovsky@mail.ru

Поступило 9 ноября 2009 г.