Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

М. А. Лифшиц

О РАЗЛОЖЕНИИ ХААРА ПРОЦЕССА РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Введение в проблему и основной результат

Целью этой заметки является решение задачи, поставленной А. Аяшем и В. Линде в их недавней работе [1]. В этой статье рассматривается качество некоторых обычных разложений в ряд процессов дробного типа. В частности, Аяш и Линде изучали представления процессов Римана–Лиувилля R^α, $\alpha > 1/2$, с помощью базиса Хаара и тригонометрического базиса. Они смогли показать, что разложение R^α, основанное на базисе Хаара, оптимально относительно равномерной сходимости при $1/2 < \alpha < 3/2$ и не оптимально при $\alpha > 3/2$. Их техника, однако, не позволяет получить ответ в самом сложном случае $\alpha = 3/2$. Мы покажем, что разложение, основанное на базисе Хаара, не оптимально и при $\alpha = 3/2$.

Автору исключительно приятно подчеркнуть, что ключевое неравенство, на котором построена эта заметка, принадлежит В. Н. Судакову, чей юбилей мы отмечаем в этом сборнике.

Недавние результаты о разложениях в ряд процессов дробного типа можно найти в работах [2, 3, 4, 5, 6, 9, 10].

Напомним, что процесс Римана–Лиувилля R^α определяется интегрированием по белому шуму

$$R^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} dW(u), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Этот процесс (для краткости именуемый в дальнейшем RL-процессом) имеет непрерывные траектории при $\alpha > 1/2$. Он принадлежит к

Ключевые слова : Аппроксимация операторов и случайных процессов, процесс Римана–Лиувилля, разложение в ряд, базис Хаара.

Работа поддержана грантом РФФИ–ННИО 09-01-91331 и грантом РФФИ 09-01-12180-офи_м.

семейству так называемых процессов дробного типа наряду с более известным дробным броуновским движением W^H (если $\alpha \in (1/2, 3/2)$ и $H = \alpha - 1/2$) и переодическим стационарным процессом Вейля I^α. Все эти процессы отличаются друг от друга лишь гладкими случайными функциями и потому их аппроксимационные свойства, изучаемые в этой статье, в основном одинаковы, см. подробности в [1]. Упомянем также работу [8], где изучены дополнительные свойства RL-процессов и их устойчивые обобщения.

Представление RL-процесса с $\alpha > 1/2$, порожденное базисом Хаара, записывается в виде

$$R^\alpha(t) = \xi_{-1} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k} \ (R_\alpha h_{j,k})(t), \tag{1}$$

где R_α – классический интегральный оператор Римана–Лиувилля,

$$R_\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-u)^{\alpha-1} h(u) du,$$

$\{\xi\}$ – семейство независимых стандартных нормальных случайных величин, а $h_{j,k}$ – функции Хаара

$$h_{j,k}(t) = 2^{j/2} \left\{ \mathbf{1}_{\left[\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right)}(t) - \mathbf{1}_{\left[\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}}\right)}(t) \right\}.$$

С вероятностью единица ряд сходится равномерно на $t \in [0,1]$, т.е. имеется сходимость в смысле равномерной нормы $||\cdot||_\infty$.

Проинтегрированные функции Хаара можно записать в виде

$$\begin{aligned} (R_\alpha h_{j,k})(t) = \frac{2^{j/2}}{\Gamma(\alpha+1)} \Bigg\{ & \left(t - \frac{2k+2}{2^{j+1}}\right)_+^\alpha \\ & - 2\left(t - \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right)_+^\alpha + \left(t - \frac{2k}{2^{j+1}}\right)_+^\alpha \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Напомним некоторые стандартные обозначения, а также термины, связанные с аппроксимацией гауссовских случайных функций случайными функциями конечного ранга.

Символ $f_n \succeq g_n$ будет обозначать $\liminf_n f_n/g_n > 0$, а $f_n \asymp g_n$ обозначает, что выполнены и $f_n \succeq g_n$, и $g_n \succeq f_n$. Мы обозначаем через $\#(B)$ число элементов множества B, а через $|T|$ – длину интервала T. Наконец, символ c обозначает различные конечные положительные величины, значение которых нас не интересует.

Пусть X – центрированный гауссовский случайный элемент нормированного пространства $(\mathcal{X}, ||\cdot||)$. Стохастические аппроксимационные числа, или ℓ-числа, вектора X определяются как

$$\ell_n(X) := \inf_{(\xi_i),(\varphi_i)} \left\{ \mathbb{E} \left\| X - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \varphi_i \right\| \right\}.$$

Здесь инфимум берется по всем семействам случайных величин (ξ_i) и всем конечным подмножествам $(\varphi_i) \subset \mathcal{X}$. Разложение в ряд

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \, \varphi_i$$

называется *оптимальным*, если

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=n}^{\infty} \xi_i \, \varphi_i \right\| \asymp \ell_n(X) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оно называется *перестановочно неоптимальным*, если не может быть превращено в оптимальное никакой перестановкой элементов (φ_i). В частности для неоптимального разложения ошибка аппроксимации $\mathbb{E} \left\| \sum_{i=n}^{\infty} \xi_i \, \varphi_i \right\|$ стремится к нулю медленнее, чем оптимальная скорость $\ell_n(X)$.

В частном случае RL-процессов и равномерной нормы $||\cdot||_\infty$ оптимальная скорость аппроксимации хорошо известна, см. [6]. А именно, для любого $\alpha > 1/2$ верно

$$\ell_n(R^\alpha) \asymp n^{-(\alpha - 1/2)} \sqrt{\ln n} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оптимальная скорость достигается, например, с использованием модифицированного базиса Добеши, см. [10]. Остается лишь понять, какие разложения обеспечивают эту скорость аппроксимации, а какие ведут себя хуже.

Для критического случая $\alpha = 3/2$ мы имеем

$$\ell_n(R^{3/2}) \asymp n^{-1} \sqrt{\ln n} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Наш основной результат показывает, что разложение, основанное на базисе Хаара, является перестановочно неоптимальным.

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi_i \varphi_i\}$ *– произвольная перестановка разложения* (1)*. Тогда*

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=n}^{\infty} \xi_i \varphi_i\Big\|_\infty \succeq n^{-1} \ln n \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Очевиден разрыв порядка $\sqrt{\ln n}$ между этой оценкой и оптимальной скоростью аппроксимации (3).

Доказательства

Начиная с этого места, мы рассматриваем только критический случай $\alpha = 3/2$.

Рассмотрим функцию $H(t) = (t-2)_+^{3/2} - 2(t-1)_+^{3/2} + t_+^{3/2}$, которая является версией интегрированных функций Хаара (2), свободной от масштабирования. Действительно, мы имеем

$$(R_{3/2} h_{j,k})(t) = \frac{H\left(2^{j+1}\left(t - \frac{2k}{2^{j+1}}\right)\right)}{2^{3/2+j}\Gamma(5/2)} \ . \tag{4}$$

Отметим, что для $t \geqslant 2$ верно

$$H(t) = \frac{3}{2} \int_{t-1}^{t} (x^{1/2} - (x-1)^{1/2}) dx \sim \frac{3}{4}\ t^{-1/2} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Для любого номера уровня j и любого множества натуральных чисел $K \subset [0, \dots, 2^j - 1]$ рассмотрим гауссовский процесс $\{X_K(t), t \in [0, 2^{j+1}]\}$, определенный формулой

$$X_K(t) = \sum_{k \in K} \xi_k H(t - 2k) = \sum_{k \in K, k \leqslant t/2} \xi_k H(t - 2k),$$

где $\{\xi_k\}$ – семейство независимых стандартных нормальных случайных величин. Очевидно, X_K является свободной от масштаба версией K-части уровня j разложения (1), так как в силу (4)

$$\sum_{k \in K} \xi_{j,k}\ (R_{3/2} h_{j,k})(t) = \frac{X_K(2^{j+1} t)}{2^{3/2+j}\Gamma(5/2)} \tag{6}$$

по распределению.

Предложение 2. *Существует такая числовая постоянная c, что*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,2^{j+1}]} |X_K(t)| \geqslant c\, j$$

для всех $j > 0$ и всех множеств $K \subset \{0,\dots,2^j-1\}$, для которых $\#(K) \geqslant 2^{j-1}$.

Следствие 3. *С учетом масштабирования* (6) *мы сразу получаем*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,1]} \Big| \sum_{k\in K} \xi_{j,k}(R_{3/2}h_{j,k})(t)\Big| \geqslant c\, j\, 2^{-j}, \tag{7}$$

где $h_{j,k}$ – функции Хаара.

Доказательство предложения 2. Прежде всего, дадим оценку естественной метрики, порожденной процессом X_K. Пусть $0 \leqslant s < t \leqslant 2^{j+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} X_K(t) &= \sum_{k\in K: k\leqslant t/2} \xi_k H(t-2k) \\ &= \sum_{k\in K: k\leqslant s/2} \xi_k H(t-2k) + \sum_{k\in K: s/2<k\leqslant t/2} \xi_k H(t-2k) \\ &:= Y(s,t) + Z(s,t)\ . \end{aligned}$$

Отметим, что как величина $X_K(s)$, так и $Y(s,t)$, принадлежат линейному пространству $\mathrm{span}(\xi_k, k\in K, k\leqslant s/2)$, в то время как величина $Z(s,t)$ ортогональна этому пространству. Используя асимптотику (5), найдем, что при $s<t$ верно

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_K(t)-X_K(s))^2 \geqslant \mathbb{E}\, Z(s,t)^2 &= \sum_{k\in K: s/2<k\leqslant t/2} H(t-2k)^2 \\ &\geqslant c \sum_{k\in K: s/2<k\leqslant t/2-1} (t-2k)^{-1}\,. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что мы нашли в интервале $[0,2^{j+1}]$ такую упорядоченную последовательность $t_1,\dots,t_m$, $m \geqslant 2^{j/2-2}$, что для любого $2 \leqslant i \leqslant m$ верно

$$\sum_{k\in K: t_{i-1}/2<k\leqslant t_i/2-1} (t_i-2k)^{-1} \geqslant c\, j. \tag{8}$$

Используя нижнюю оценку по Судакову (см. например, [7, глава 14]), получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sup_{t\in[0,2^{j+1}]} |X_K(t)| &\geqslant \mathbb{E} \sup_{1\leqslant i\leqslant m} X_K(t_i)\\ &\geqslant c(\ln m)^{1/2} \cdot \inf_{i_1\neq i_2} \left[\mathbb{E}(X(t_{i_1}) - X(t_{i_2}))^2\right]^{1/2}\\ &\geqslant c\, j^{1/2} \cdot c\, j^{1/2} = c\, j\,.\end{aligned}$$

Остается найти последовательность (t_i), удовлетворяющую условию (8). Если бы множество K было максимальным, т.е. $K = \{0,\dots,2^j-1\}$, мы могли бы просто выбрать $t_i = i2^{j/2}$, $i = 0,\dots, 2^{j/2}-1$. Однако в общем случае ситуация несколько сложнее. Мы воспользуемся следующим фактом, который имеет смысл сформулировать отдельно.

Лемма 4. *Пусть точки $s_1 < s_2 < \cdots < s_{2q}$ принадлежат интервалу T в $\mathbb{R}$. Тогда*

$$\max_{1<r\leqslant 2q} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{s_r - s_i} \geqslant c\ \frac{q}{|T|}\ \ln q.$$

Доказательство леммы 4. Возьмем целое j из диапазона $1 \leqslant j \leqslant q$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{r=q+1}^{2q} (s_r - s_{r-j}) &= \sum_{r=q+1}^{2q} \sum_{l=r-j}^{r-1} (s_{l+1} - s_l)\\ &\leqslant \sum_{l=q+1-j}^{2q-1} j(s_{l+1} - s_l) \leqslant j|T|.\end{aligned}$$

Используя выпуклость функции $x \to \frac{1}{x}$, получим

$$\frac{1}{q} \sum_{r=q+1}^{2q} \frac{1}{s_r - s_{r-j}} \geqslant \left(\frac{1}{q} \sum_{r=q+1}^{2q} (s_r - s_{r-j})\right)^{-1} \geqslant \left(\frac{j|T|}{q}\right)^{-1}.$$

Суммируя по j, найдем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q}\sum_{r=q+1}^{2q}\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{s_r-s_{r-j}} &= \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{q}\sum_{r=q+1}^{2q}\frac{1}{s_r-s_{r-j}} \\
&\geqslant \sum_{j=1}^{q}\left(\frac{j|T|}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{|T|}\sum_{j=1}^{q} j^{-1} \geqslant \frac{cq}{|T|}\,\ln q.
\end{aligned}
$$

Очевидно,

$$
\begin{aligned}
&\max_{1<r\leqslant 2q}\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{s_r-s_i} \geqslant \max_{q+1\leqslant r\leqslant 2q}\sum_{i=r-q}^{r-1}\frac{1}{s_r-s_i} = \max_{q+1\leqslant r\leqslant 2q}\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{s_r-s_{r-j}} \\
&\geqslant \frac{1}{q}\sum_{r=q+1}^{2q}\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{s_r-s_{r-j}} \geqslant \frac{cq}{|T|}\,\ln q.
\end{aligned}
$$

Продолжим доказательство предложения 2. Для простоты записи предположим, что j четно. Тогда $2^{j/2}$ будет целым числом. Разобьем интервал $[0,2^j-1]$ на $2^{j/2}$ блоков $B_\iota = \bigl[\iota 2^{j/2}, (\iota+1)2^{j/2}\bigr)$.

Обозначим

$$
I = \Bigl\{\iota : \#(K\cap B_\iota) \geqslant \frac{1}{4}\,2^{j/2}\Bigr\}
$$

и положим $m = \#(I)$. Покажем, что m достаточно велико. Действительно, из

$$
\begin{aligned}
2^{j-1} \leqslant \#(K) &= \sum_{\iota=0}^{2^{j/2}-1}\#(K\cap B_\iota) \\
&= \sum_{\iota\in I}\#(K\cap B_\iota) + \sum_{\iota\notin I}\#(K\cap B_\iota) \\
&\leqslant m2^{j/2} + \Bigl(2^{j/2}-m\Bigr)\frac{1}{4}\,2^{j/2}
\end{aligned}
$$

следует

$$
\frac{1}{2} \leqslant \frac{m}{2^{j/2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,\frac{m}{2^{j/2}},
$$

откуда

$$
m \geqslant \frac{1}{3}\,2^{j/2} > 2^{j/2-2}.
$$

Для каждого блока $B_\iota, \iota \in I$ применим лемму 4 с $T = B_\iota$, $|T| = 2^{j/2}$, и $\{s_1, \dots, s_{2q}\} \subset K \bigcap B_\iota$, выбирая q максимально возможным. Тогда

$$2q \geqslant \#\,(K \cap B_\iota) - 1 \geqslant \frac{1}{4} 2^{j/2} - 1.$$

По лемме 4 мы можем найти такую целую точку $v_\iota \in \{s_1, \dots, s_{2q}\} \subset K \bigcap B_\iota$, что

$$\sum_{s \in K \bigcap B_\iota, s < v_\iota} \frac{1}{v_\iota - s} \geqslant \frac{cq}{|T|} \ \ln q \geqslant c\, j.$$

Перенумеровав точки $\{2v_\iota, \iota \in I\}$, получаем большое семейство $m \geqslant 2^{j/2-2}$ точек t_i, обладающих свойством

$$\begin{aligned}\sum_{k \in K: t_{i-1}/2 < k \leqslant t_i/2-1} (t_i - 2k)^{-1} &= \frac{1}{2} \sum_{k \in K: t_{i-1}/2 < k \leqslant t_i/2-1} (t_i/2 - k)^{-1} \\ &\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k \in K: t_{i-1}/2 < k \leqslant t_i/2} (t_i/2 - k)^{-1} - 1 \\ &\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k \in K \bigcap B_\iota, k < v_\iota} (v_\iota - k)^{-1} - 1 \geqslant cj,\end{aligned}$$

где индекс ι таков, что $t_i/2 = v_\iota$. Здесь мы также воспользовались тем фактом, что все числа v_ι и все числа k – целые, поэтому мы теряем не более единицы при выбрасывании одного k из суммы. Поэтому семейство точек $\{t_i, i \leqslant m\}$ удовлетворяет свойству (8) и предложение 2 доказано.

Доказательство теоремы 1. Фактически наша теорема прямо следует из предложения 2 и леммы 2.3 работы [1]. Тем не менее, мы приведем доказательство для удобства чтения заметки.

Пусть $\{\xi_i \varphi_i\}$ – произвольная перестановка разложения (1). Возьмем целое $j \geqslant 1$, положим $n = 2^{j-1}$, и выберем в качестве $K \subset [0, \dots, 2^j - 1]$ множество тех k, для которых $R_\alpha h_{j,k}$ принадлежит семейству $\{\varphi_i, i \geqslant n\}$. Очевидно, $\#(K) \geqslant 2^{j-1}$, и можно записать

$$\sum_{i \geqslant n} \xi_i \varphi_i = \sum_{k \in K} \xi_{j,k} \ (R_\alpha h_{j,k}) + Y,$$

где Y и сумма по K независимы. Используя стандартные аргументы, основанные на неравенстве Андерсона для гауссовских процессов (см. [7]), получим

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\geqslant n}\xi_i\varphi_i\Big\|_\infty \geqslant \mathbb{E}\Big\|\sum_{k\in K}\xi_{j,k}\ (R_\alpha h_{j,k})\Big\|_\infty.$$

Теперь из неравенства (7) следует

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\geqslant n}\xi_i\varphi_i\Big\|_\infty \geqslant c\ j\, 2^{-j}\ \asymp n^{-1}\ln n,$$

что и требовалось.

Автор признателен А. Аяшу и В. Линде за интересные обсуждения и постановку задачи, решенной в этой заметке.

Литература

1. A. Ayache, W. Linde, *Series representations of fractional Gaussian processes by trigonometric and Haar systems.* — Electronic J. Probab. **14** (2009), to appear.
2. A. Ayache, M. S. Taqqu, *Rate optimality of wavelet series approximations of fractional Brownian motion.* — J. Fourier Anal. Appl. **9** (2003), 451–471.
3. K. Dzhaparidze, H. van Zanten, *Optimality of an explicit series expansion of the fractional Brownian sheet.* — Statist. Probab. Letters **71** (2005), 295–301.
4. H. Gilsing, T. Sottinen, *Power series expansions for fractional Brownian motions.* — Theory of Stoch. Proc. **9 (25)** (2003), 38–49.
5. E. Iglói, *A rate optimal trigonometric series expansion of the fractional Brownian motion.* — Electronic J. Probab. **10** (2005), 1381–1397.
6. Th. Kühn and W. Linde, *Optimal series representation of fractional Brownian sheets.* — Bernoulli. **8** (2002), 669–696.
7. M. A. Lifshits, *Gaussian Random Functions*, Kluwer (1995).
8. M. A. Lifshits, Th. Simon, *Small deviations for fractional stable processes.* — Ann. Inst. H. Poincaré. **41** (2005), 725–752.
9. A. Malyarenko, *An optimal series expansion of the multiparameter fractional Brownian motion.* — J. Theoret. Probab. **21** (2008), 459–475.
10. H. Schack, *An optimal wavelet series expansion of the Riemann–Liouville process.* — J. Theoret. Probab., to appear.

Lifshits M. A. On Haar Expansion of Riemann–Liouville process in a critical case.

We show that Haar-based series representation of the critical Riemann–Liouville process R^{α} with $\alpha = 3/2$ is rearrangement non-optimal in the sense of convergence rate in $\mathbf{C}[0, 1]$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lifts@mail.rcom.ru

Поступило 26 октября 2009 г.