Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

С. С. Грибкова

СОХРАНЯЮЩИЕ МЕРУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

1. Введение

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0,1]$, – скачкообразный процесс Леви, т.е. стохастически непрерывный, сепарабельный процесс с независимыми однородными приращениями, гауссовская компонента которого равна нулю. Известно [4], что траектории процессов Леви с вероятностью единица принадлежат пространству Скорохода $\mathbb{D}[0,1]$ функций, непрерывных справа и имеющих предел слева в каждой точке. Через $\mathcal{P}_\xi$ будем обозначать меру, порожденную процессом ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$.

Для описания данного класса процессов мы будем использовать представление Леви–Хинчина (см. [4]). Именно,

$$\xi(t) = at + \int_0^t \int_{0<|x|\leqslant 1} x\widetilde{\nu}(ds,dx) + \int_0^t \int_{|x|>1} x\nu(ds,dx). \qquad (1)$$

В этом представлении a – неслучайная константа, $\nu(ds,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,1]\times\mathbb{R}$ с интенсивностью вида $dt\Lambda(dx)$, где мера Λ носит название меры Леви или спектральной меры процесса ξ, а $\widetilde{\nu}(dt,dx) = \nu(dt,dx) - \mathbb{E}\nu(dt,dx)$ – соответствующая центрированная мера. Известно, что мера Леви Λ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\Lambda(\{0\}) = 0$,
2. для любого $\varepsilon > 0$ $\Lambda(\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]) < \infty$,
3. $\int\limits_{|x|\leqslant 1} x^2 d\Lambda < \infty$.

Мы дополнительно предположим, что мера Λ не содержит дискретной компоненты и $\Lambda((-\infty,0)) = \Lambda((0,\infty)) = \infty$.

Ключевые слова : пространство конфигураций, пуассоновская мера, группы преобразований, сохраняющие меру преобразования, устойчивый процесс Леви.

В настоящей работе мы построим группу преобразований пространства $\mathbb{D}[0,1]$, сохраняющих меру $\mathcal{P}_\xi$.

Первый результат об абсолютной непрерывности мер в пространстве $D[0,1]$, порожденных скачкообразными процессами Леви принадлежит А. В. Скороходу [3] (см. также [8]).

В работе [1] для меры, порожденной процессом с мерой Леви $\Lambda(dx) = \frac{e^{-x}}{x}dx$ (гамма процессом), была построена группа несингулярных преобразований. Каждое преобразование этой группы представляло из себя изменение величие всех скачков случайной функции при одновременном сохранении моментов времени, в которые эти скачки произошли. Более точно, новая величина скачка получалась из старой умножением на коэффициент, зависящий только от момента скачка. В работах [9, 10] было показано, что эта группа является группой несингулярных преобразований не только для меры, порожденной гамма процессом (или эквивалентной ей), но и для мер, порожденных рядом других скачкообразных процессов Леви.

Далее, в работе [6] для скачкообразных процессов Леви, у которых мера Леви удовлетворяет вышеперечисленным условиям, была построена группа сохраняющих меру преобразований. Каждое преобразование этой группы представляет из себя преобразование скачков случайной функции, причем закон преобразования каждого скачка зависит от единственного параметра – момента времени, в который этот скачок произошел. Мы в нашей работе также строим группу сохраняющих меру преобразований, но в нашем случае закон преобразования каждого скачка зависит не только от момента скачка, но и от всей траектории процесса до этого момента.

Следуя [6], в качестве вероятностного пространства для пуассоновской случайной меры мы выберем пространство конфигураций $\mathcal{X}(G)$ (см. [2]) на множестве $G = [0,1] \times \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. На этом пространстве конфигураций мы рассматриваем пуассоновскую меру с интенсивностью $\Pi(dt, dx) = dt\Lambda(dx)$.

Распределение процесса ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$ можно рассматривать как образ пуассоновской меры на пространстве конфигураций под действием отображения, задаваемого (1). Поэтому, вместо того, чтобы строить отображения пространства $\mathbb{D}[0,1]$ в себя, мы сначала построим группу сохраняющих пуасссоновскую меру преобразований пространства конфигураций $\mathcal{X}(G)$.

Далее, основная идея, используемая в работе [6], состоит в том, что сначала строится однопараметрическая группа $\{T_t,\, t \in \mathbb{R}\}$, преобразований $\overline{\mathbb{R}}$, сохраняющих меру Λ. После этого для каждой измеримой функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ строится порожденное ей преобразование Φ_f пространства конфигураций, такое, что конфигурация X, состоящая из точек вида $\overline{x} = (t,x)$, $\overline{x} \in X$, под действием этого преобразования переходит в конфигурацию $Y = \Phi_f(X)$, состоящую из точек вида $\overline{y} = F(\overline{x}) = (t, T_{f(t)}(x))$, $\overline{x} \in X$, т.е. $\Phi_f(X) = \{(t, T_{f(t)}(x))\}_{\overline{x} \in X}$. Или, другими словами, каждая точка (t,x) каждой конфигурации переходит в "новую" точку, именно в $\overline{y} = F(\overline{x}) = (t, T_{f(t)}(x))$. Далее используется хорошо известное свойство пуассоновских мер, состоящее в том, что под действием преобразований такого вида пуассоновская мера с интенсивностью Π переходит в пуассоновскую меру с интенсивностью ΠF^{-1}. Но, с другой стороны, очевидно, что $\Pi F^{-1} = \Pi$ и, значит, преобразование Φ_f является сохраняющим меру преобразованием.

Эти естественные соображения не работают, если мы хотим использовать преобразования, в которых "новое" положение точки конфигурации (t,x) не определяется только t и x (то есть ее старым положением), а зависит также и от других точек конфигурации. Образ пуассоновской меры под действием таких преобразований вообще говоря не является пуассоновской мерой.

Мы в нашей работе используем другие соображения, связанные с построением группы преобразований, сохраняющих так называемую корреляционную меру (см. [5]). Это σ-конечная мера, заданная на пространстве конечных конфигураций, поэтому первым шагом мы построим группу преобразований пространства конечных конфигураций.

2. Пространство конфигураций

В этом параграфе мы приведем список необходимых определений, относящихся к пространству конфигураций. Пусть G – метрическое пространство, $\mathcal{B}$ – его борелевская σ-алгебра, $\mathcal{B}_0$ – кольцо ограниченных борелевских подмножеств G. Далее, пусть Π – σ-конечная мера на $(G,\mathcal{B})$, причем $\Pi(V) < \infty$ для любого $V \subset \mathcal{B}_0$.

Через $\mathcal{X} = \mathcal{X}(G)$ мы обозначим пространства конфигураций на G. По определению

$$\mathcal{X}(G) = \{X \subset G : |X \cap V| < \infty \ \text{ для любого } \ V \subset \mathcal{B}_0\},$$

где через $|A|$ обозначено число точек в множестве A. На пространстве $\mathcal{X}$ мы будем рассматривать топологию $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ – слабейшую топологию, такую, что все функционалы $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$X \mapsto \sum_{x \in X} f(x)$$

непрерывны для любых непрерывных функций $f : G \to \mathbb{R}$ с ограниченным носителем. Борелевскую σ-алгебру, порожденную $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, мы будем обозначать через $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Это наименьшая σ-алгебра, для которой отображения

$$X \mapsto |X \cap V|$$

измеримы для любого $V \subset \mathcal{B}_0$.

Далее, мы говорим, что вероятностная мера P на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ есть пуассоновская мера с интенсивностью Π, если для каждого $V \in \mathcal{B}_0$

$$P(X : |X \cap V| = k) = e^{-\Pi(V)} \frac{\Pi(V)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и для непересекающихся множеств V_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ случайные величины ν_j, где $\nu_j(X) = |X \cap V_j|$ независимы. Подробнее см. [2].

3. Преобразование пространства конечных конфигураций $\mathcal{X}_0$

Рассмотрим пространство $G = [0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}$ с мерой $\lambda(dt, dx) = \lambda_1(dt)\lambda_2(dx)$, где λ_1, λ_2 – меры Лебега на $[0, 1]$ и $\overline{\mathbb{R}}$ соответственно.

Через $\mathcal{X}_0(G)$ мы обозначим пространство всех конечных конфигураций на G. Для этого пространства мы имеем представление вида

$$\mathcal{X}_0(G) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G^k / \pi_k,$$

где через G^k/π_k обозначено факторпространство G^k относительно группы перестановок π_k. Мера λ на G порождает на пространстве $\mathcal{X}_0(G)$ меру

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \pi_k^{-1}, \tag{2}$$

которая носит название меры Лебега–Пуассона.

Мы построим группу преобразований $\mathcal{X}_0(G)$, сохраняющих меру μ.

Выберем и зафиксируем функцию $L : \mathcal{X}_0(G) \to \mathbb{R}$. (Эта функция и будет фактически задавать зависимость наших преобразований от "прошлого"). Через L_k обозначим сужение функции L на множество G^k.

Далее, обозначим через $L_0[0,1]$ множество всех борелевских функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Для каждого $f \in L_0[0,1]$ определим теперь преобразование $\Phi_f^L : \mathcal{X}_0(G) \to \mathcal{X}_0(G)$, такое что его сужение $\Phi_{f,k}^L$ на множество G^k имеет вид

$$\Phi_{f,k}^L((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)) = ((t_1,y_1),\dots,(t_k,y_k)), \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1 + \rho_1,\\
&y_2 = x_2 + \rho_2 + L_1(t_1,x_1) - L_1(t_1,y_1),\\
&\qquad\dots\\
&y_k = x_k + \rho_k + L_{k-1}((t_1,x_1),\dots,(t_{k-1},x_{k-1}))\\
&\quad - L_{k-1}((t_1,y_1),\dots,(t_{k-1},y_{k-1})),\\
&(\rho_1,\dots,\rho_k) = (f(t_1),\dots,f(t_k)).
\end{aligned}$$

Лемма 1. *Преобразования вида* (3) *образуют группу.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что

$$\Phi_{f+g}^L = \Phi_f^L \circ \Phi_g^L. \tag{4}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
((t_1,z_1),\dots,(t_k,z_k)) &= (\Phi_f^L \circ \Phi_g^L)((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)),\\
((t_1,y_1),\dots,(t_k,y_k)) &= \Phi_g^L((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)).
\end{aligned}$$

Если

$$(\rho_1^{(1)},\dots,\rho_k^{(1)}) = (g(t_1),\dots,g(t_k)),$$

а

$$(\rho_1^{(2)},\dots,\rho_k^{(2)}) = (f(t_1),\dots,f(t_k)),$$

то, в соответствии с формулой (3), имеем

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 + \rho_1^{(1)} + \rho_1^{(2)}, \\
z_2 &= x_2 + \rho_2^{(1)} + L_1(t_1, x_1) \\
&\quad - L_1(t_1, y_1) + \rho_2^{(2)} + L_1(t_1, y_1) - L_1(t_1, z_1) \\
&= x_2 + \rho_2^{(1)} + \rho_2^{(2)} + L_1(t_1, x_1) - L_1(t_1, z_1), \\
&\quad \dots \\
z_k &= x_k + \rho_k^{(1)} + L_{k-1}((t_1, x_1), \dots, (t_{k-1}, x_{k-1})) \\
&\quad - L_{k-1}((t_1, y_1), \dots, (t_{k-1}, y_{k-1})) \\
&\quad + \rho_k^{(2)} + L_{k-1}((t_1, y_1), \dots, (t_{k-1}, y_{k-1})) \\
&\quad - L_{k-1}((t_1, z_1), \dots, (t_{k-1}, z_{k-1})) \\
&= \rho_k^{(1)} + \rho_k^{(2)} + L_{k-1}((t_1, x_1), \dots, (t_{k-1}, x_{k-1})) \\
&\quad - L_{k-1}((t_1, z_1), \dots, (t_{k-1}, z_{k-1})).
\end{aligned}$$

Полученные равенства означают, что

$$((t_1, z_1), \dots, (t_k, z_k)) = (\Phi^L_{f+g})((t_1, x_1), \dots, (t_k, x_k)).$$

что полностью доказывает (4).

Легко видеть, что $\Phi_0^L = \mathrm{I}$. Вместе с (4) это дает существование обратного элемента $(\Phi_f^L)^{-1} = \Phi_{-f}^L$. □

Лемма 2. *Для любого* $f \in L_0[0,1]$

$$\mu(\Phi_f^L)^{-1} = \mu.$$

Доказательство. Имеем

$$\mu(\Phi_f^L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k (\Phi_{f,k}^L)^{-1}. \tag{5}$$

При фиксированном k преобразование $(\Phi_{f,k}^L)^{-1}$ не меняет t-координаты точек конфигурации, а по координате x оно представляет собой сдвиг каждой точки (t_i, x_i) на величину, зависящую от t_i и от всех точек вида $\{(t_l, x_l),\ t_l < t_i\}$. Так как любое преобразование сдвига в $\mathbb{R}^k$ сохраняет меру λ_2^k, то мера μ совпадает с мерой $\mu(\Phi_f^L)^{-1}$. Таким образом, мы выяснили, что формулы (3) определяют группу преобразований пространства $\mathcal{X}_0(G)$, сохраняющих меру μ. $\square$

Рассмотрим теперь на G другую меру Π вида

$$\Pi(dt, dx) = dt\Lambda(dx),$$

где мера Λ – мера Леви нашего процесса. Мера Π в свою очередь порождает меру (так называемую корреляционную меру) P_0 на пространстве конечных конфигураций вида

$$P_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Pi^k \pi_k^{-1}.$$

Используя уже построенную группу Φ_f^L преобразований, сохраняющих меру μ, нетрудно построить группу преобразований, сохраняющих меру P_0.

Для этого определим сначала функцию $U : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, полагая

$$U(x) = \begin{cases} \Lambda(x, \infty), & \text{если} \quad x > 0; \\ -\Lambda(-\infty, x), & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Мы дополнительно предположим, что функция U непрерывна и строго убывает на интервалах $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$. Положим по определению $U(0) = \infty$, а $U(\infty) = 0$.

Нетрудно показать, что построенная таким образом функция U обладает следующим важным для нас свойством: образ меры Λ под действием U есть мера Лебега, и, наоборот – обратное отображение U^{-1} переводит меру Лебега обратно в меру Λ.

Определим теперь преобразование $\mathbb{U} : \mathcal{X}_0(G) \to \mathcal{X}_0(G)$, полагая для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{U}\big(\{(t_1, x_1), \ldots, (t_k, x_k)\}\big) = \big(\{(t_1, U(x_1)), \ldots, (t_k, U(x_k))\}\big).$$

Из вышесказанного следует справедливость следующих соотношений

$$P_0 \mathbb{U}^{-1} = \mu, \quad \mu\mathbb{U} = P_0, \tag{6}$$

то есть $\mathbb{U}$ переводит меру P_0 в меру μ, и, соответственно, обратное отображение $\mathbb{U}^{-1}$ переводит μ в P_0.

Выберем и зафиксируем функцию $M : \mathcal{X}_0(G) \to \mathbb{R}$, и с ее помощью определим группу преобразований $\Psi_f^M : \mathcal{X}_0(G) \to \mathcal{X}_0(G)$, $f \in L_0(\overline{\mathbb{R}})$, полагая

$$\Psi_f^M = \mathbb{U}^{-1} \circ \Phi_f^L \circ \mathbb{U}, \tag{7}$$

где $L = M \circ \mathbb{U}^{-1}$.

Из (6) немедленно вытекает, что для всех $f \in L_0(\overline{\mathbb{R}})$ преобразование Ψ_f^M сохраняет меру P_0, то есть

$$P_0(\Psi_f^M)^{-1} = P_0. \tag{8}$$

Отметим еще, что преобразование Ψ_f^M может быть описано также и другим способом. Именно, пусть $Y = \Psi_f^M(X)$. Мы будем считать, что под действием преобразования Ψ_f^M каждая точка (t,x) конфигурации $X \in \mathcal{X}_0$ перешла в точку (t,y) конфигурации Y, где $y = \Gamma_f^M(t,x,X \cap ([0,t) \times \overline{\mathbb{R}}))$, а функция $\Gamma_f^M : G \times \mathcal{X}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ задается формулой

$$\begin{aligned} &\Gamma_f^M(t,x,X) \\ &= U^{-1}\big(U(x) + f(t) + M(X \cap ([0,t) \times \overline{\mathbb{R}})) - M(Y \cap ([0,t) \times \overline{\mathbb{R}}))\big). \end{aligned} \tag{9}$$

4. Преобразования пространства $\mathcal{X}(G)$ бесконечных конфигураций

Следующим шагом мы покажем, что при дополнительном условии на функцию M преобразования Ψ_f^M могут рассматриваться и как преобразования пространства всех конфигураций $\mathcal{X}(G)$, определенное почти всюду по пуассоновской мере P.

Пусть $G_\varepsilon = [0,T] \times (\mathbb{R} \backslash [-\varepsilon, \varepsilon])$. Рассмотрим функцию $M : \mathcal{X}_0(G) \to \mathbb{R}$, финитную в следующем смысле. Для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и всех $X \in \mathcal{X}_0(G)$

$$M(X) = M(X \cap G_{\varepsilon_0}). \tag{10}$$

Ясно, что эту функцию мы можем рассматривать и как функцию $M : \mathcal{X}(G) \to \mathbb{R}$. Из условий на меру Леви вытекает, что эта функция определена P-почти всюду. Кроме того, мы предположим, что функция M непрерывна и ограничена.

Для каждого $f \in L_0[0,1]$ определим теперь преобразование $\widetilde{\Psi}_f^M : \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$ так, что под действием этого преобразования каждая точка (t,x) конфигурации X переходит в точку (t,y), где

$$y = \lim_{\varepsilon \to 0} \Gamma_f^M(t,x,X \cap G_\varepsilon). \tag{11}$$

Нетрудно понять, что в силу (10) предел в (11) существует для P-почти всех $X \in \mathcal{X}(G)$, а сужение $\widetilde{\Psi}_f^M$ на $\mathcal{X}_0(G)$ совпадает с Ψ_f^M.

Ясно также, что для семейства отображений $\widetilde{\Psi}_f^M$ также справедливо групповое свойство: для любых $f, g \in L_0[0,1]$

$$\widetilde{\Psi}_{f+g}^M = \widetilde{\Psi}_f^M \circ \widetilde{\Psi}_g^M.$$

Покажем теперь, что группа $\widetilde{\Psi}_f^M$, $f \in L_0[0,1]$, является группой сохраняющих меру P преобразований.

Теорема 1. *Для любого* $f \in L_0[0,1]$

$$P(\widetilde{\Psi}_f^M)^{-1} = P. \tag{12}$$

Доказательство. Для доказательства (12) достаточно проверить, справедливость

$$\int \varphi\, dP = \int \varphi \circ \widetilde{\Psi}_f^M\, dP \tag{13}$$

для всех ограниченных финитных функций $\varphi : \mathcal{X}(G) \to \mathbb{R}$. (Напомним, что функцию φ мы называем финитной, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $X \in \mathcal{X}(G)$ выполнено $\varphi\,(X \cap G_\varepsilon) = \varphi\,(X)$.)

Это утверждение следует из (8) и теоремы 8 в [7]. $\square$

5. Преобразование траекторий процессов Леви

Будем предполагать, что мера Леви Λ процесса ξ удовлетворяет условиям $\Lambda(0,\infty) = \infty$ и $\Lambda(-\infty,0) = \infty$. Также предположим, что функция $U : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая формулой

$$U(x) = \begin{cases} \Lambda(x,\infty), & \text{если} \quad x > 0; \\ -\Lambda(-\infty,x), & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

непрерывна и строго убывает на интервалах $(0,\infty)$ и $(-\infty,0)$.

На пространстве конфигураций $\mathcal{X}([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$ рассмотрим пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi(dt,dx) = dt\Lambda(dx)$.

На вероятностном пространстве $(\mathcal{X}([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}), P)$ процесс Леви $\xi(t)$ со спектральной мерой Λ может быть задан как

$$\xi(t,X) = at + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1}} x - t\int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} x d\Lambda\Bigg) + \sum_{\substack{(s,x)\in X,\\ s\leqslant t,|x|>1}} x. \tag{14}$$

Суммирование проводится по точкам (s, x) конфигурации $X \in \mathcal{X}$. Последняя формула проясняет соответствие между конфигурациями и траекториями. Если точка (t, x) принадлежит конфигурации X, то построенная по X траектория случайного процесса в момент времени t имеет скачок величины x. Отображение $\mathcal{X} \to \mathbb{D}[0,1]$, задаваемое (14), сопоставляющее конфигурации траекторию случайного процесса, будем обозначать через Ξ, так что

$$\Xi(X) = \xi(\cdot, X).$$

Различные конфигурации порождают различные траектории случайного процесса: при $X_1 \neq X_2$

$$\Xi(X_1) \neq \Xi(X_2).$$

Через $\mathcal{P}_\xi$ будем обозначать меру, порожденную процессом ξ в пространстве $\mathbb{D}[0,1]$, т.е.

$$\mathcal{P}_\xi = P\Xi^{-1}.$$

Для функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и $M : \mathcal{X}(G) \to \mathbb{R}$ определим преобразование Υ_f^M, действующее по формуле

$$\Upsilon_f^M = \Xi \circ \widetilde{\Psi}_f^M \circ \Xi^{-1}.$$

Преобразования такого вида образуют группу и выполняется соотношение

$$\Upsilon_f^M \circ \Xi = \Xi \circ \widetilde{\Psi}_f^M.$$

Теорема 2. *Для любого $f \in L_0[0,1]$ выполнено $\mathcal{P}_\xi(\Upsilon_f^M)^{-1} = \mathcal{P}_\xi$, то есть преобразование Υ_f^M сохраняет меру, порожденную процессом Леви.*

Доказательство. В силу теоремы 1 имеем

$$P\,(\widetilde{\Psi}_f^M)^{-1} = P.$$

Значит

$$P\,(\widetilde{\Psi}_f^M)^{-1}\Xi^{-1} = P\Xi^{-1} = \mathcal{P}_\xi.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P\,(\widetilde{\Psi}_f^M)^{-1}\Xi^{-1} &= P(\Xi \circ \widetilde{\Psi}_f^M)^{-1} \\ = P(\Upsilon_f^M \circ \Xi)^{-1} &= (P\Xi^{-1})(\Upsilon_f^M)^{-1} = P_\xi(\Upsilon_f^M)^{-1}. \end{aligned}$$

Сравнивая последние две формулы, получаем утверждение теоремы.
□

Литература

1. A. Vershik, N. Tsilevich, *Quasi-invariance of the gamma process and multiplicative properties of the Poisson–Dirichlet measures.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math. no. 329 (1999), 163–168.
2. J. Kerstan, K. Mattes, J. Mecke, *Infinite Divisible Point Processes.* Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
3. А. В. Скороход, *О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **II** (1957), 629–649.
4. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов.* Изд-во Киевского ун-та, 1961.
5. Д. Рюэль, *Статистическая механика.* Наука, М., 1971.
6. N. V. Smorodina, *The measure preserving and nonsingular transformations of the jump Lévy processes.* — Theory of Stoch. Proc. **14**, No. 1 (2008), 144–154.
7. S. Albeverio, N. Smorodina, *A distributional approach to multiple stochastic integrals and transformations of the Poisson measure* 2. — Acta Appl. Math. **102** (2008), 319–343.
8. М. А. Лифшиц, *Метод расслоений для процессов с независимыми приращениями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **130** (1983), 109–121.
9. М. А. Лифшиц, Е. Ю. Шмилева, *Пуассоновские меры, квазиинвариантные относительно мультипликативных преобразований* — Теор. вероятн. и ее примен. **46** (2001), 697–712.
10. М. А. Лифшиц, Е. Ю. Шмилева, *Критерий квази-инвариантности пуассоновских мер относительно "линейных" трансформаций пространства.* — Успехи мат. наук. **56** (2001), 159–160.

Gribkova S. S. The measure preserving transformations of the jump Lévy process.

Let $\xi(t)$, $t \in [0,1]$, be a jump Lévy process. By $\mathcal{P}_\xi$ we denote the law of ξ in the Skorokhod space $\mathbb{D}[0,1]$. Under some nondegeneracy condition on the Lévy measure Λ of the process we construct a group of a $\mathcal{P}_\xi$-preserving transformations of the space $\mathbb{D}[0,1]$.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетеский пр. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: s.gribkova@mail.ru

Поступило 10 октября 2009 г.