Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

М. И. Гордин

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ТОРОВ

1. Введение

В работе [4] автор ввёл в рассмотрение некоторый класс неограниченных разностных операторов второго порядка, перестановочных с действием гиперболического автоморфизма тора. Поскольку в построении таких операторов определяющую роль играет *гомоклиническая группа* (см. ниже) рассматриваемого гиперболического автоморфизма, мы называем их *инвариантными гомоклиническими операторами.* В упомянутой работе, целью которой было доказательство предельных теорем, в качестве вспомогательного результата было установлено, что при определённых условиях такой оператор, действуя в пространстве L_2 функций, суммируемых с квадратом по мере Хаара, имеет *спектральную щель* в подпространстве L_2^0 функций с нулевым интегралом. В процессе написания указанной работы автору стало ясно, что такие инвариантные гомоклинические операторы являются генераторами марковских процессов, представляющих собой любопытный объект для изучения и, возможно, имеющих приложения к гиперболической динамике. В частности, определив соответствующую полугруппу переходных операторов в пространстве непрерывных функций на торе, мы получаем семейства инвариантных вероятностных мер для исходного автоморфизма тора. Позже были осознаны связи с исследованиями бесконечных свёрток вероятностных мер, обобщающих известную меру Эрдёша. В [4], однако, в соответствии с целями этой работы все рассмотрения проводилсь в пространстве L_2 относительно меры Хаара. Поэтому там не рассматривался вопрос о существовании обсуждаемых процессов как удо-

---

Ключевые слова : гиперболический автоморфизм тора, гомоклиническая группа, инвариантный гомоклинический оператор, инвариантный марковский процесс, инвариантная вероятностная мера.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами НШ 638.2008.1 и РФФИ 09-01-91331-ННИО.

влетворяющих стандартным требованиям марковских процессов. В настоящей работе показывается, что конструкция типа предложенной в [4] при определённых условиях действительно определяет на торе марковский процесс с непрерывным временем. Вводятся инвариантные относительно автоморфизма меры, связанные с упомянутыми марковскими процессами. Отмечается связь таких мер с обобщёнными мерами Эрдёша, формулируются открытые вопросы.

2. Гиперболические автоморфизмы торов, инвариантные гомоклинические генераторы и порождаемые ими процессы

2.1. Гиперболические автоморфизмы торов. Пусть $X = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ – d-мерный тор с мерой Хаара μ общей массы 1 и пусть $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ – алгебраический автоморфизм тора $\mathbb{T}^d$ (мы будем использовать аддитивную запись для операций в группе $\mathbb{T}^d$). Мера μ инвариантна относительно T. Автоморфизм T накрывается обратимым линейным отображением $\widetilde{T} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, таким, что $T\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d$. Тогда proj $\widetilde{T} = T$ proj, где proj : $\mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ – каноническое отображение группы на факторгруппу. Спектр $\operatorname{spec}(\widetilde{T})$ оператора $\widetilde{T}$ распадается на три непересекающиеся компоненты, $\operatorname{spec}(\widetilde{T}) = \sigma_s(\widetilde{T}) \cup \sigma_u(\widetilde{T}) \cup \sigma_n(\widetilde{T})$, расположенные вне, внутри и на единичной окружности $\{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$, соответственно.

Мы предполагаем в дальнейшем, что T – гиперболический автоморфизм, то есть, что $\sigma_n(\widetilde{T}) = \emptyset$. Разложение спектра $\operatorname{spec}(\widetilde{T}) = \sigma_s(\widetilde{T}) \cup \sigma_u(\widetilde{T})$ порождает $\widetilde{T}$-инвариантное разложение $\mathbb{R}^d = L_s \bigoplus L_u$. Обозначим через p_s и p_u соответствующие проекторы. Пусть U – оператор, действующий на функцию $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ посредством композиции с T:

$$Uf = f \circ T.$$

2.2. Гомоклиническая группа. Определим *устойчивую подгруппу* Γ_s, *неустойчивую подгруппу* Γ_u и *гомоклиническую подгруппу* Γ тора относительно его автоморфизма T соотношениями

$$\Gamma_s = \{\gamma \in \mathbb{T}^d : T^n\gamma \underset{n\to\infty}{\to} 0\}, \quad \Gamma_u = \{\gamma \in \mathbb{T}^d : T^n\gamma \underset{n\to-\infty}{\to} 0\},$$

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{T}^d : T^n\gamma \underset{|n|\to\infty}{\to} 0.\}$$

Каждая из подгрупп Γ_s и Γ_u плотна в $\mathbb{T}^d$, а в точках подгруппы $\Gamma = \Gamma_s \cap \Gamma_u$ подгруппы Γ_s и Γ_u пересекаются трансверсально. При этом $\Gamma_s = \mathrm{proj}\,(L_s)$ и $\Gamma_u = \mathrm{proj}\,(L_u)$, причём ограничение отображения proj как на L_s, так и на L_u взаимно однозначно. Как показано в [4], для гиперболического автоморфизма гомоклиническая группа Γ является счётной плотной T-инвариантной подгруппой тора $\mathbb{T}^d$. Алгебраически Γ является свободной абелевой группой с d образующими.

2.3. Финитные гомоклинические генераторы и гомоклинические процессы. Здесь приводится формальное описание инвариантного оператора, близкое к применённому в [4]. Заметим, что в [4] установлена корректность симметрического варианта этой конструкции для пространства L_2. С каждым конечным множеством $J \subset \Gamma$ мы связываем оператор A_J, такой, что для функции $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$

$$(A_J f)(\cdot) = \sum_{\gamma \in J} (f(\gamma + \cdot) - f(\cdot)). \tag{2.1}$$

Таким образом, во многих пространствах функций на торе, таких, например, как $L_p = L_p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $C = C(\mathbb{T}^d)$, и для каждого конечного множества $J \subset \Gamma$ соотношение (2.1) определяет ограниченный оператор A_J. Далее, выражение (2.1) задаёт в пространстве C оператор, являющийся генератором скачкообразного марковского процесса на $\mathbb{T}^d$. Этот процесс может быть получен посредством пуассоновской субординации из некоторой цепи Маркова на $\mathbb{T}^d$. Цепь, которая здесь имеется в виду, является случайным блужданием, совершая один шаг которого, частица, находящаяся в точке $x \in \mathbb{T}^d$, перескакивает в одну из точек вида $x + \gamma$, $\gamma \in J$, в соответствии с равномерным вероятностным распределением на J.

Положим

$$Uf = f \circ T.$$

Тогда для $k \in \mathbb{Z}$

$$U^{-k} A_J U^k f = \sum_{\gamma \in J} (f(T^k \gamma + \cdot) - f(\cdot)).$$

Поскольку для $\gamma \in \Gamma$ сходимость $T^k \gamma \underset{|k| \to \infty}{\longrightarrow} 0$ осуществляется экспоненциально быстро, ряд

$$\sum_{\gamma \in J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f(T^k \gamma + \cdot) - f(\cdot)) \tag{2.2}$$

сходится по норме, скажем, пространства C для любой функции f из банахова пространства гёльдеровских функций с произвольным показателем $\alpha \in (0,1]$. Выражение (2.2) определено, таким образом, на плотном в пространстве C подпространстве. Функционально-аналитический подход к построению марковского процесса с непрерывным временем, имеющего $\mathbb{T}^d$ своим пространством состояний, генератор которого задаётся выражением (2.2), состоит в том, чтобы построить замкнутый оператор с плотной областью определения, для которого удастся проверить выполнение известных условий, выделяющих генераторы марковских полугрупп, действующих в пространстве C. Этот путь детально описан в монографии [5], посвящённой марковским процессам на пространствах конфигураций бесконечных систем взаимодействующих частиц. Следует заметить, что введённый в работе [4] выражением, подобным (2.2), инвариантный гомоклинический оператор является аналогом генератора именно такого процесса. Соответствующая случайная эволюция конфигураций [3] известна под названием *глауберовой динамики*. Не обсуждая более подробно параллели между этими двумя ситуациями, заметим только, что пространство конфигураций частиц снабжено богатой системой σ-алгебр, позволяющих рассматривать локальные и квазилокальные объекты и применять соответствующие технические средства, в то время как при изучении гиперболических автоморфизмов тора подобные системы изначально отсутствуют, но могут быть введены (неканоническим образом) с помощью марковских разбиений. Однако наличие структуры компактной абелевой группы позволяет построить интересующие нас процессы прямым вероятностным методом, не используя марковских разбиений. Эта же структура позволяет применять гармонический анализ и ведёт, посредством дуализации пары $\Gamma \subset \mathbb{T}^d$ в рамках двойственности Понтрягина, к двойственной паре, что и было использовано в [4]. Этот подход, однако, не может быть применён к инвариантным мерам на $\mathbb{T}^d$, отличным от меры Хаара.

3. Построение инвариантного гомоклинического процесса

Построение инвариантного гомоклинического процесса мы начнём с *гомоклинического случайного блуждания* на торе T^d. Пусть $\rho = (\rho_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ – вероятностная мера на Γ, а $Y_1, Y_2, \dots$ – последовательность независимых случайных величин со значениями в T^d и общим распределением ρ. Определим на T^d случайное блуждание $W = (W_n)_{n\geqslant 0}$, положив $W_0 = 0$, $W_1 = Y_1$, $W_2 = Y_1 + Y_2, \dots$. Обозначим через P

переходный оператор этого блуждания, определённый для $f \in C$ соотношением

$$(Pf)(\cdot) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho_\gamma f(\gamma + \cdot). \tag{3.1}$$

Для всех $k \in \mathbb{Z}$ мы полагаем

$$P_k = U^{-k} P U^k, \tag{3.2}$$

так что

$$(P_k f)(\cdot) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho_\gamma f(T^k \gamma + \cdot). \tag{3.3}$$

Из (3.3) ясно, что (P_k) является переходным оператором случайного блуждания $T^k W$ с шагами $T^k Y_1, T^k Y_2, \ldots$.

Тогда для всех $k \in \mathbb{Z}$

$$Q_k(t) = \exp t(P_k - I), \quad t \geqslant 0 \tag{3.4}$$

– марковская полугруппа в C с ограниченным генератором. Ясно, что

$$Q_k(t) = U^{-k} Q(t) U^k, \tag{3.5}$$

где $Q(t) = \exp t(P - I)$.

Пусть для каждого $k \in \mathbb{Z}$ $X_k(\cdot)$ – это стартующий из 0 марковский процесс, соответствующий полугруппе $(Q_k(t))_{t \geqslant 0}$, причём процессы $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ независимы.

Наша задача – показать, что при определённых предположениях относительно ρ для любого $t \geqslant 0$ ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k(t) \tag{3.6}$$

сходится почти наверное. Из этого факта следует, в частности, существование полугруппы $(R(t))_{t \geqslant 0}$, операторы которой являются сильными пределами операторов $\prod_{k \in [-N,N]} Q_k(t)$ при $N \to \infty$.

Снабдим $\mathbb{T}^d$ стандартной римановой метрикой и пусть для $x \in \mathbb{T}^d$ $d(x)$ – длина кратчайшей геодезической, идущей в x из 0. Пусть, далее, для $\gamma \in \Gamma$ $d_s(\gamma)$ и $d_u(\gamma)$ – длины кратчайших геодезических, идущих в γ из 0 вдоль Γ_s и Γ_u, соответственно. Заметим, что величины

$$\frac{d_s(T^n \gamma)}{d_s(\gamma)}, \quad \frac{d_u(T^{-n} \gamma)}{d_u(\gamma)} \tag{3.7}$$

равномерно по $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Предложение 1. *Предположим, что мера ρ удовлетворяет условиям*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} d_s(\gamma)\rho(\gamma) < \infty, \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} d_u(\gamma)\rho(\gamma) < \infty. \tag{3.8}$$

Тогда для любого $t \geqslant 0$ ряд (3.6) *сходится с вероятностью* 1. *Кроме того,*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} Ed(X_k(t)) < \infty. \tag{3.9}$$

Доказательство. В силу экспоненциального убывания первой из величин (3.7) мы имеем при некотором $\alpha > 0$ и всех $k \geqslant 0$

$$\begin{aligned} Ed(X_k(t)) &= Ed(T^k X_0(t)) \leqslant Ed_s(T^k X_0(t)) \\ &\leqslant \exp\{-\alpha k\} Ed_s(X_0(t)) = \exp\{-\alpha k\}(Q(t)d_s)(0). \end{aligned}$$

Заметим, что хотя d_s является неограниченной функцией, определённой только на Γ, корректность выражения $(Q(t)d_s)(0)$ устанавливается с помощью следующих оценок (напомним, что эта функция неотрицательна и субаддитивна):

$$\begin{aligned} (Q(t)d_s)(0) &= (\exp t(P-I)d_s)(0) = \exp(-t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t^m P^m d_s)(0)}{m!} \\ &\leqslant \exp(-t) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mt^m (Pd_s)(0)}{m!} = t(Pd_s)(0). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, с использованием d_u вместо d_s, оцениваются слагаемые $Ed(X_k(t))$ при $k < 0$. Из сходимости ряда (3.9) следует сходимость с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} d(X_k(t)), \tag{3.10}$$

откуда, в свою очередь, вытекает сходимость ряда (3.6). □

4. Заключительные замечания

Весьма вероятно, что условие (3.8) может быть существенно ослаблено. В частности, можно надеяться, что для сходимости ряда (3.6) достаточно потребовать, чтобы при некотором $\epsilon > 0$ у функций g_s и g_u были конечны логарифмические моменты порядка $1+\epsilon$ относительно меры ρ.

Мы почти не касались того обстоятельства, что все рассматривавшиеся нами процессы являются процессами с независимыми однородными приращениями, принимающими значения в $\mathbb{T}^d$. Ясно, что T-инвариантные процессы имеют реализации довольно сложной структуры (в частности, у них не может быть изолированных скачков).

Инвариантные марковские процессы доставляют семейства инвариантных мер для автоморфизма T. Именно, такой мерой является переходная вероятность за любое время $t > 0$ для процесса стартовавшего из произвольной неподвижной точки автоморфизма (в частности, из точки 0). Каждая такая мера является бесконечной свёрткой типа меры Эрдёша (см. ниже).

Интересным вопросом является поведение переходных вероятностей рассматривавшихся процессов при большом t. К этому имеет отношение результат о “спектральной щели” из [4]. При соответствующих условиях имеет место слабая сходимость переходных вероятностей к мере Хаара. Ясно, однако, что в пространстве C спектральной щели нет (иначе имела бы место сходимость переходных вероятностей по вариации). Тесно связанный вопрос – исследование стационрных распределений рассматривавшихся марковских процессов.

Наконец, следут заметить, что стала очевидной связь рассматриваемых вопросов с бесконечными двусторонними свёртками [9], обобщающими односторонние свёртки Эрдёша [6]. Такой свёрткой является распределение суммы (3.6). Мы получаем однопапраметрическое семейство таких свёрток вместе с каждым процессом рассмотренного выше типа.

Литература

1. R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* — Lect. Notes Math. **470**. Springer-Verlag, Berlin (1975).
2. А. М. Вершик, *Сверхгрубость гиперболических автоморфизмов и унитарные дилатации марковских операторов.* — Вестник ЛГУ. Сер. 1 (матем., мех., астрон.) **3** (1987), 28–33, 127.
3. R. J. Glauber, *Time-dependent statistics of the Ising model.* — J. Math. Phys. **4** (1963), 294–307.
4. M. Gordin, *Homoclinic approach to the central limit theorem for dynamical systems.* — Doeblin and Modern Probability (Blaubeuren, 1991). Contemp. Math. **149**, 149–162, Amer. Math. Soc., Providence (1993).
5. T. M. Liggett, *Interacting particle systems.* Springer-Verlag, New York (1985).

6. P. Erdös, *On a family of symmetric Bernoulli convolutions.* — Amer. J. Math. **61** (1939), 974–976.
7. E. Olivier, N. Sidorov, A, Thomas, *On the Gibbs properties of Bernoulli convolutions related to β-numeration in multinacci bases.* — Monatsh. Math. **145**, no. 2 (2005), 145–174.
8. D. Ruelle, *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibriun statistical mechanics.* — Encyclop. of Mathem. and Its Applic. Vol. 5. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1978).
9. N. Sidorov, A. Vershik, *Ergodic properties of the Erdös measure, the entropy of the golden shift, and related problems.* — Monatsh. Math. **126**, no. 3 (1998), 215–261.

Gordin M.I. Homoclinic processes and invariant measures for hyperbolic toral automorphisms.

For every hyperbolic toral automorphism T, the present author has defined in one of his previous papers some unbounded T-invariant second order difference operators related to the so-called homoclinic group of T. These operators were considered in the space L_2 with respect to the Haar measure. It is shown in the present paper that such operators give rise to transition semigroups in the space of continuous functions on the torus and generate dynamically invariant Markov processes. This leads almost immediately to a family of invariant measures for the automorphism T. After a short discussion, some open questions about properties of these measures and related topics are posed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: gordin@pdmi.ras.ru

Поступило 2 декабря 2009 г.