Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев

ТОЧНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ В МНОГОМЕРНОМ ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С КОНЕЧНЫМИ МОМЕНТАМИ

1. Введение

Цель этой статьи – вывести простейшие следствия из основного результата работы авторов [5] (см. теорему 2 ниже). Мы покажем, что в случае независимых одинаково распределенных слагаемых из этого результата следует многомерный вариант одного результата А. И. Саханенко [12]. Мы получим оценки для точности сильной гауссовской аппроксимации сумм независимых одинаково распределенных $\mathbf{R}^d$-значных случайных векторов ξ_j, имеющих конечные моменты $\mathbf{E}\,\|\xi_j\|^\gamma$, $\gamma > 2$.

Рассматривается следующая хорошо известная задача. Требуется построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ (с заданными распределениями) и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1, \dots, Y_n$ таким образом, чтобы величина

$$\Delta_n(X,Y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Big\| \sum_{j=1}^{k} X_j - \sum_{j=1}^{k} Y_j \Big\| \tag{1.1}$$

была бы по возможности мала с достаточно большой вероятностью. Именно к этой задаче сводится оценивание точности сильной аппрок-

---

Ключевые слова : многомерный принцип инвариантности, сильная аппроксимация, суммы независимых случайных векторов.

Работа поддержана SFB 701 Билефельдского университета.

Работа второго автора поддержана грантами РФФИ 09-01-12180, РФФИ-ННИО 09-01-91331, НШ 638.2008.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

симации в принципе инвариантности. Мы опускаем подробную историю вопроса, отсылая читателя к работам [5] и [13].

Ниже нам потребуются некоторые обозначения. Распределения случайных векторов ξ будут обозначаться $\mathcal{L}(\xi)$. Соответствующий ковариационный оператор будет обозначаться $\operatorname{cov}\xi$. В дальнейшем $\log^* b = \max\{1, \log b\}$, при $b > 0$. Через $\lceil x \rceil$ мы будем обозначать целую часть числа x.

Цель этой статьи – получить многомерные аналоги следующего результата А. И. Саханенко в случае независимых одинаково распределенных слагаемых.

Теорема 1 (А. И. Саханенко [12]). *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые случайные величины с $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть $\gamma \geqslant 2$ и*

$$L_\gamma = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, |\xi_j|^\gamma < \infty.$$

Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$ таким образом, что $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\mathbf{D}\,Y_j = \mathbf{D}\,X_j$, $j = 1, \ldots, n$, и

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X, Y)\right)^\gamma \leqslant c\,\gamma^{2\gamma} L_\gamma, \tag{1.2}$$

где c – абсолютная постоянная.

Следует отметить, что в работе А. И. Саханенко [12] содержатся и более общие результаты. В работе [12] отмечается, что из неравенства (1.2) следует известное неравенство Розенталя ([10, 11]) (см. лемму 1).

После естественной нормировки мы видим, что неравенство (1.2) эквивалентно неравенству

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X, Y)/\sigma\right)^\gamma \leqslant c\gamma^{2\gamma} L_\gamma/\sigma^\gamma,$$

где $\sigma^2 = \mathbf{D}\big(\sum_{j=1}^n \xi_j\big)$. Ясно, что L_γ/σ^γ, $2 < \gamma \leqslant 3$, представляет собой известную дробь Ляпунова, фигурирующую в неравенствах Ляпунова и Эссеена для равномерного расстояния в центральной предельной теореме.

В настоящей работе мы докажем теоремы 3 и 4, являющиеся достаточно элементарными следствиями следующей теоремы 2, доказанной авторами в работе [5]. В теореме 2 мы рассматриваем случай независимых вообще говоря неодинаково распределенных слагаемых. Теорема 3 выводится из теоремы 2 в частном случае, когда слагаемые одинаково распределены. Теорема 3 представляет собой многомерный вариант теоремы 1 для одинаково распределенных слагаемых.

Теорема 2. *Предположим, что* $\alpha > 0$, *а* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *– независимые* $\mathbf{R}^d$*-значные случайные векторы с* $\mathbf{E}\,\xi_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. *Пусть* $\gamma \geqslant 2$ *и величина* L_γ *определена равенством*

$$L_\gamma = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\, \|\xi_j\|^\gamma < \infty. \tag{1.3}$$

Предположим, что существует натуральное число s *и строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел* $m_0 = 0$, $m_1, \dots, m_s = n$, *удовлетворяющая следующим условиям. Пусть*

$$\zeta_k = \xi_{m_{k-1}+1} + \dots + \xi_{m_k}, \quad \operatorname{cov} \zeta_k = \mathbb{B}_k, \qquad k = 1, \dots, s, \tag{1.4}$$

и предположим, что для всех $v \in \mathbf{R}^d$ *и* $k = 1, \dots, s$,

$$w^2 \, \|v\|^2 \leqslant \big\langle \mathbb{B}_k v, v \big\rangle \leqslant C_1 \, w^2 \, \|v\|^2 , \tag{1.5}$$

где

$$w = C_2 \, L_\gamma^{1/\gamma} / \log^* s, \tag{1.6}$$

а C_1 *и* C_2 *– некоторые положительные постоянные. Предположим, что величины*

$$\lambda_{k,\gamma} = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \mathbf{E}\, \|\xi_j\|^\gamma, \qquad k = 1, \dots, s, \tag{1.7}$$

при некотором $0 < \varepsilon < 1$ *удовлетворяют неравенству*

$$C_3 \, d^{\gamma/2} \, s^\varepsilon \, (\log^* s)^{\gamma+3} \max_{1 \leqslant k \leqslant s} \lambda_{k,\gamma} \leqslant L_\gamma, \tag{1.8}$$

где C_3 *– некоторая положительная постоянная. Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность* *независимых случайных векторов* $X_1, \ldots, X_n$ *и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, \ldots, Y_n$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\, Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, \ldots, n$, *и*

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \leqslant a_1 \left(\varepsilon^{-1}\, d^{21/2+\alpha} \log^* d\right)^\gamma L_\gamma, \tag{1.9}$$

где a_1 *– положительная величина, зависящая только от* α, γ, C_1, C_2 *и* C_3.

Условие (1.8) довольно громоздко, но мы покажем, что оно выполняется, если случайные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ одинаково распределены, а n достаточно велико.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Предположим, что* $\alpha > 0$, *а* ξ *–* $\mathbf{R}^d$*-значный случайный вектор с* $\mathbf{E}\,\xi = 0$ *и* $\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma < \infty$, *при некотором* $\gamma \geqslant 2$. *Пусть* $\sigma^2_{\max}$ *и* $\sigma^2_{\min}$ *– максимальное и минимальное строго положительные собственные числа ковариационного оператора* $\operatorname{cov}\xi$ *соответственно. Пусть* n *– произвольное натуральное число. Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов* $X_1, \ldots, X_n$ *и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, \ldots, Y_n$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi)$, $\mathbf{E}\, Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, \ldots, n$, *и справедливо следующее неравенство:*

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \leqslant a_2\, A \left(\sigma_{\max}/\sigma_{\min}\right)^\gamma n \mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma, \tag{1.10}$$

где

$$A = A(\gamma,\alpha,d) = \max\left\{\left(d^{21/2+\alpha}\,(\log^* d)^2\right)^\gamma,\ d^{\frac{\gamma(\gamma+2)}{4}}\,(\log^* d)^{\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}}\right\}, \tag{1.11}$$

а a_2 *– положительная величина, зависящая только от* γ *и* α.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда можно построить на одном вероятностном пространстве бесконечную последовательность независимых случайных векторов* $X_1, X_2, \ldots$ *и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов* $Y_1, Y_2, \ldots$ *таким образом, что* $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi)$, $\mathbf{E}\, Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j$, $j = 1, 2 \ldots$, *и справедливо следующее неравенство:*

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^\gamma \leqslant a_3\, A \left(\sigma_{\max}/\sigma_{\min}\right)^\gamma n \mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma, \quad \text{для всех } n, \tag{1.12}$$

где величина A определена в (1.11), *а* a_3 *– положительная величина, зависящая только от* γ *и* α.

Применяя неравенство Чебышева, мы видим, что в условиях теоремы 4

$$\mathbf{P}\left\{\Delta_n(X,Y)\geqslant x\right\}\leqslant a_3\,A\left(\sigma_{\max}/\sigma_{\min}\right)^{\gamma} n\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma}/x^{\gamma} \tag{1.13}$$

для всех $x>0$ и всех $n=1,2,\dots$. Ясно, что утверждение теоремы 4 сильнее, чем (1.13). Построение, для которого (1.13) справедливо при $d=1$ при фиксированных n и $x=O\big(\sqrt{n\log n}\big)$ с a_3, зависящим только от γ и $\mathcal{L}(\xi)$, было предложено Я. Комлошем, П. Майором и Г. Тушнади (КМТ) [7], см. также работы [1] и [9] в случае $2<\gamma\leqslant 3$. Затем А. И. Саханенко [12] доказал теорему 1, обеспечивающую справедливость одномерного варианта неравенства (1.13) для всех x на одном и том же вероятностном пространстве. У. Айнмаль [4] получил многомерный вариант результата КМТ беэ ограничений на значения аргумента x.

Теорема 3 сформулирована при фиксированном n. Это означает, что вероятностное пространство зависит от этого n. Однако, применение результата при фиксированных n позволяет осуществить такое построение, что (1.12) выполняется для всех n одновременно на одном и том же вероятностном пространстве (теорема 4). Достаточно использовать независимые построения из формулировки теоремы 3 с фиксированными $n\asymp 2^m$, $m=1,2,\dots$. Аналог теоремы 1, который справедлив для всех n одновременно на одном и том же вероятностном пространстве, был получен М. А. Лифшицем [8] с помощью применения неравенства Розенталя (см. лемму 1). Выводя теорему 4 из теоремы 3, мы могли бы повторить рассуждения М. А. Лифшица [8]. Однако, применение аналога неравенства Розенталя для сумм независимых неотрицательных случайных величин (см. лемму 2) делает доказательство несколько проще. Мы не пытаемся оптимизировать зависимость постоянных от размерности d. Важно, что эта зависимость является степенной. Фиксируя α, например, $\alpha=1/2$, мы можем записать неравенство (1.12) в виде

$$\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^{\gamma}\leqslant a_4\big(\sigma_{\max}/\sigma_{\min}\big)^{\gamma} n\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma},\quad \text{для всех } n, \tag{1.14}$$

где a_4 – положительная величина, зависящая только от γ и d. В работе [5] было отмечено, что из теоремы 2 вытекает справедливость

(1.14) при достаточно большом фиксированном n. В настоящей работе мы покажем, что существует такое построение, что (1.14) справедливо для всех n одновременно.

Если одно или несколько собственных значений оператора $\operatorname{cov}\xi$ таковы, что их сумма пренебежимо мала по сравнению сравнению с остальными собственными значениями, то теоремы 3 и 4 могут дать более сильные результаты, если их применять только к суммам координат, имеющих "большие" дисперсии. Остальные же координаты можно достроить произвольным образом, оценивая моменты погрешности с помощью неравенств (1.15) и (1.16), по аналогии с тем, как это сделано в (2.16). Существование построения обеспечивается известной леммой Беркеша–Филиппа. Поскольку неравенства (1.15) и (1.16) справедливы и для гильбертовозначных случайных векторов, это рассуждение может использоваться для получения содержательных результатов даже в бесконечномерной ситуации.

Для доказательства нам потребуются следующие леммы 1–3.

Лемма 1. *Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ – независимые случайные векторы, которые имеют нулевые средние и принимают значения в $\mathbf{R}^d$. Тогда*

$$\mathbf{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big\|^{\gamma}\leqslant a_5\Big(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|\xi_j\|^{\gamma}+\Big(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|\xi_j\|^{2}\Big)^{\gamma/2}\Big)\quad \text{при } \gamma\geqslant 2, \tag{1.15}$$

где a_5 – положительная величина, зависящая только от γ.

Этот многомерный вариант неравенства Розенталя легко следует из одного результата де Акоста [2]. В случае одинаково распределенных слагаемых второе слагаемое в правой части (1.15) растет быстрее, чем первое при $n\to\infty$. Неравенство (1.14) показывает, что этот рост соответствует росту моментов сумм гауссовских аппроксимирующих векторов.

Следующая ниже лемма 2 содержится в работе Розенталя [10], см. также [6].

Лемма 2. *Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ – независимые случайные величины, принимающие неотрицательные значения с вероятностью единица. Тогда*

$$\mathbf{E}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big\|^{\gamma}\leqslant a_6\Big(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|\xi_j\|^{\gamma}+\Big(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\,\|\xi_j\|\Big)^{\gamma}\Big)\quad \text{при } \gamma\geqslant 1,$$

где a_6 – положительная величина, зависящая только от γ.

Следующая лемма 3 представляет собой частный случай теоремы 1.1.5 из монографии де ля Пенья и Жине [3].

Лемма 3. *Пусть* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные векторы, принимающие значения в* $\mathbf{R}^d$. *Тогда, для всех* $x \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}\Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\|\sum_{j=1}^{k}\xi_j\Big\| > x\Big\} \leqslant 9\ \mathbf{P}\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big\| > x/30\Big\}.$$

Вместе с хорошо известным равенством

$$\mathbf{E}\ |\eta|^\gamma = \gamma\int\limits_0^\infty x^{\gamma-1}\ \mathbf{P}\left\{|\eta| > x\right\}dx, \quad \gamma > 0,$$

справедливым для любых случайных величин η, лемма 3 позволяет оценивать моменты

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\|\sum_{j=1}^{k}\xi_j\Big\|^\gamma \leqslant a_7\mathbf{E}\ \Big\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j\Big\|^\gamma, \quad \gamma > 0, \tag{1.16}$$

в случае независимых одинаково распределенных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$, где a_7 – величина, зависящая только от γ.

2. Доказательства

Обозначения $c, c_1, c_2, \dots$ будут использоваться для абсолютных положительных постоянных. Символ c может обозначать различные постоянные, если нас не интересуют их численные значения. То же самое обозначение используется для положительных величин, зависящих только от α и γ, фигурирующих в условиях теоремы 3. Это фактически означает, что мы рассматриваем α и γ в качестве абсолютных постоянных. Запись $A \ll B$ будет означать, что существует такая c, что $A \leqslant c\,B$. Мы будем также использовать обозначение $A \asymp B$, если $A \ll B \ll A$.

Доказательство теоремы 3. Не нарушая общности, предположим, что $\gamma > 2$ и $\operatorname{cov}\xi = \mathbb{I}_d$. Действительно, если $\gamma = 2$, то неравенство (1.10) очевидно. Ясно, что мы можем предполагать, что оператор $\mathbb{B} = \operatorname{cov}\xi$ является невырожденным. Если $\mathbb{B} \neq \mathbb{I}_d$, мы можем вместо ξ рассматривать вектор $\mathbb{B}^{-1/2}\,\xi$.

Согласно неравенству Ляпунова,

$$1 \leqslant d = \mathbf{E}\,\|\xi\|^2 \leqslant (\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma)^{2/\gamma}. \tag{2.1}$$

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые копии вектора ξ и пусть величина L_γ определена в (1.3). Таким образом, $L_\gamma = n\,\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma$. Положим

$$y = \frac{n}{L_\gamma^{2/\gamma}} = n^{1-2/\gamma}\big(\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma\big)^{-2/\gamma}. \tag{2.2}$$

Предположим, что

$$y \geqslant c_1\, d^{\gamma/2}\,(\log^* d)^{\gamma+1}, \tag{2.3}$$

где величина c_1 настолько велика, насколько будет необходимо для справедливости проводимых ниже рассуждений. Обозначим

$$u = \frac{L_\gamma^{2/\gamma}}{\log^2 y} = \frac{n}{y\,\log^2 y} = \frac{n^{2/\gamma}\big(\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma\big)^{2/\gamma}}{\log^2 y} \tag{2.4}$$

(см. (2.2)). Согласно (2.1)–(2.4), справедливы неравенства

$$1 \leqslant \frac{y^{2/(\gamma-2)}}{\log^2 y} \leqslant u \leqslant n/4, \tag{2.5}$$

если величина c_1 достаточно велика.

Пусть целое число $s \geqslant 2$ и строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $m_0 = 0$, $m_1, \dots, m_s = n$ выбраны таким образом, что $m_j - m_{j-1} = \lceil u \rceil$ при $j = 1, \dots, s-1$ и $\lceil u \rceil \leqslant m_s - m_{s-1} \leqslant 2\,\lceil u \rceil$. Пусть величины ζ_k, $\mathbb{B}_k$ и $\lambda_{k,\gamma}$ определены равенствами (1.4) и (1.7).

Тогда

$$\mathbb{B}_k = (m_k - m_{k-1})\,\mathbb{I}_d, \qquad k = 1, \dots, s. \tag{2.6}$$

В соответствии с (2.3)–(2.5),

$$s \asymp \frac{n}{\lceil u \rceil} \asymp \frac{n}{u} = y\,\log^2 y \gg d^{\gamma/2}\,(\log^* d)^{\gamma+3} \tag{2.7}$$

и, следовательно,

$$\log y \asymp \log s. \tag{2.8}$$

Поэтому, согласно (2.4), (2.7) и (2.8),

$$m_k - m_{k-1} \asymp \lceil u \rceil \asymp u \asymp \frac{n}{s} \asymp \frac{L_\gamma^{2/\gamma}}{\log^2 s}, \qquad k = 1, \dots, s. \tag{2.9}$$

Теперь, пользуясь (2.6) и (2.9), мы можем выбрать $C_1 = c_2$ и $C_2 = c_3$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения (1.5) и (1.6). Кроме того, согласно (2.9),

$$\lambda_{k,\gamma} = (m_k - m_{k-1})\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma \asymp \frac{n\,\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma}{s} = \frac{L_\gamma}{s}, \qquad k = 1,\dots,s. \tag{2.10}$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{3\,\log^* d} \leqslant \frac{1}{3}. \tag{2.11}$$

Покажем, что

$$d^{\gamma/2}\,s^{\varepsilon-1}\,(\log^* s)^{\gamma+3} \ll 1. \tag{2.12}$$

Если $s \geqslant d^\gamma$, то соотношение (2.12) очевидно. Если же $s < d^\gamma$, то, согласно (2.7), (2.8) и (2.11), $\log d \asymp \log s \asymp \log y$, $s^\varepsilon \asymp 1$, и (2.12) легко выводится из (2.7). С помощью (2.10) и (2.12) мы получаем

$$d^{\gamma/2}\,s^{\varepsilon}\,(\log^* s)^{\gamma+3}\,L_\gamma^{-1} \max_{1\leqslant k\leqslant s} \lambda_{k,\gamma} \ll 1. \tag{2.13}$$

Условие (1.8) теперь выполняется с $C_3 = c_4$. Учитывая (2.11) и применяя утверждение теоремы 2, мы видим, что можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность независимых случайных векторов $X_1,\dots,X_n$ и соответствующую последовательность независимых гауссовских случайных векторов $Y_1,\dots,Y_n$ таким образом, что $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j = \mathbb{I}_d$, $j = 1,\dots,n$, и

$$\mathbf{E}\,\bigl(\Delta_n(X,Y)\bigr)^\gamma \ll \bigl(d^{21/2+\alpha}\,(\log^* d)^2\bigr)^\gamma\,L_\gamma. \tag{2.14}$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$y \leqslant c_1\,d^{\gamma/2}\,(\log^* d)^{\gamma+1}. \tag{2.15}$$

Тогда, при *любом* способе построения на одном вероятностном пространстве последовательности независимых случайных векторов $X_1,\dots,X_n$ и соответствующей последовательности независимых гауссовских случайных векторов $Y_1,\dots,Y_n$ таким образом, что $\mathcal{L}(X_j) = \mathcal{L}(\xi_j)$, $\mathbf{E}\,Y_j = 0$, $\operatorname{cov} Y_j = \operatorname{cov} X_j = \mathbb{I}_d$, $j = 1,\dots,n$, справедливы следующие неравенства:

$$\mathbf{E}\,\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Bigl\|\sum_{j=1}^{k} X_j\Bigr\|^\gamma \ll n\,\mathbf{E}\,\|\xi\|^\gamma + (n\,d)^{\gamma/2},$$

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\|\sum_{j=1}^{k}Y_j\Big\|^{\gamma}\ll (n\,d)^{\gamma/2}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\Delta_n(X,Y)\right)^{\gamma}&\ll \mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\|\sum_{j=1}^{k}X_j\Big\|^{\gamma}+\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\|\sum_{j=1}^{k}Y_j\Big\|^{\gamma}\\&\ll n\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma}+(n\,d)^{\gamma/2}\\&\ll d^{\frac{\gamma(\gamma+2)}{4}}\,(\log^{*} d)^{\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}}n\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma}\end{aligned}\tag{2.16}$$

(мы воспользовались леммой 1 и соотношениями (1.1), (1.16), (2.1), (2.2) и (2.15)). Пользуясь (1.11), (2.14) и (2.16), мы убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 3. □

Доказательство теоремы 4. Не нарушая общности, мы опять предположим, что $\gamma > 2$ и $\operatorname{cov}\xi = \mathbb{I}_d$. Согласно теореме 3, существует такое построение, что совместное распределение последовательностей независимых случайных векторов $\{X_j\}$ и $\{Y_j\}$ с требуемыми распределениями удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E}\,\delta_m^{\gamma}\ll 2^m\,A\,\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma},\quad m=1,2,\dots,\tag{2.17}$$

где

$$\delta_m=\max_{2^{m-1}<k\leqslant 2^m}\Big\|\sum_{j=2^{m-1}+1}^{k}X_j-\sum_{j=2^{m-1}+1}^{k}Y_j\Big\|.\tag{2.18}$$

Разумеется, мы можем предполагать, что описанные выше построения для различных m независимы в совокупности. Согласно неравенству Ляпунова,

$$\mathbf{E}\,\delta_m\leqslant\left(\mathbf{E}\,\delta_m^{\gamma}\right)^{1/\gamma}.\tag{2.19}$$

Согласно лемме 2 и соотношениям (2.17)–(2.19),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\Delta_{2^k}(X,Y)\right)^{\gamma}&\leqslant\mathbf{E}\Big(\sum_{m=1}^{k}\delta_m\Big)^{\gamma}\\&\leqslant A\Big(\sum_{m=1}^{k}2^m\,\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma}+\Big(\sum_{m=1}^{k}2^{m/\gamma}\Big)^{\gamma}\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma}\Big)\\&\ll 2^k\,A\,\mathbf{E}\,\|\xi\|^{\gamma}\end{aligned}\tag{2.20}$$

при $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом, утверждение теоремы 4 проверено при $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$, то утверждение теоремы 4 следует из уже доказанного неравенства (2.20). Соответствующая постоянная увеличивается при этом не более чем в два раза. $\square$

Литература

1. А. А. Боровков, *О скорости сходимости в принципе инвариантности.* — Теория вероятн. и ее примен. **18** (1973), 217–234.
2. A. de Acosta, *Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers.* — Ann. Prob. **9** (1981), 157–161.
3. V. H. de la Peña, E. Giné, *Decoupling. From dependence to independence. Randomly stopped processes. U-statistics and processes. Martingales and beyond.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York (1999).
4. U. Einmahl, *Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case.* — J. Multivar. Anal. **28** (1989), 20–68.
5. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Bounds for the rate of strong approximation in the multidimensional invariance principle.* — Теория вероятн. и ее примен. **53**, No. 1 (2008), 100–123.
6. W. B. Johnson, G. Schechtman, J. Zinn, *Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables.* — Ann. Probab. **13** (1985), 234–253.
7. J. Komlós, P. Major, G. Tusnády *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.* I; II. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **32** (1975), 111–131; **34** (1976), 34–58.
8. М. А. Лифшиц, *Лекции по сильной аппроксимации*, изд-во СПбГУ, С.-Петербург (2007).
9. P. Major, *The approximation of partial sums of independent r.v.'s.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **35** (1976), 213–220.
10. H. P. Rosenthal, *On the subspaces of L_p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables.* — Israel J. Math. **8** (1970), 273–303.
11. H. P. Rosenthal, *On the span in L^p of sequences of independent random variables.* II. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II: Probability theory, Univ. California Press, Berkeley, Calif. (1972), pp. 149–167.
12. А. И. Саханенко, *Оценки в принципе инвариантности.* — В кн.: Труды инст. матем. СО АН СССР **5**, Наука, Новосибирск (1985), pp. 27–44.
13. А. Ю. Зайцев, *Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **364** (2009), 148–165.

Götze F., Zaitsev A. Yu. Rates of approximation in the multidimensional invariance principle for sums of i.i.d. random vectors with finite moments.

The aim of this paper is to derive consequences of a result of Götze and Zaitsev (2008). It is shown that in the case of i.i.d. summands this result implies a multidimensional version of some results of Sakhanenko (1985) We establish bounds for the rate of strong Gaussian approximation of sums of independent $\mathbf{R}^d$-valued random vectors ξ_j having finite moments $\mathbf{E}\,\|\xi_j\|^\gamma$, $\gamma \geqslant 2$.

Поступило 20 ноября 2009 г.

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Postfach 100131
Universitätsstrasse 25
33501 Bielefeld, Germany

E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru