Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

**К. Ю. Волкова**

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРИТЕРИЕВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ, ОСНОВАННЫХ НА ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РОССБЕРГА

## 1. Введение

Экспоненциальное распределение играет важную роль в теории вероятностей и математической статистике, а модели с экспоненциально распределенными наблюдениями часто встречаются в прикладных областях, таких как теория надежности, анализ данных типа времени жизни, анализ живучести систем и др. Поэтому проверка экспоненциальности принадлежит к числу важнейших задач проверки статистических гипотез.

Общая постановка задачи проверки экспоненциальности выглядит так: пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные наблюдения (н.о.р.с.в.), имеющие непрерывную функцию распределения (ф.р.) $F$. Рассмотрим проверку сложной гипотезы экспоненциальности: $H_0 : F(x)$ – ф.р. экспоненциального закона с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$, где $\lambda > 0$ – некоторый неизвестный параметр, против альтернативы, состоящей в том, что $F$ – ф.р. неэкспоненциального закона.

Построим эмпирическую ф.р., основанную на этой выборке:

$$F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_i < t\}.$$

Мы рассмотрим критерии для проверки экспоненциальности, основанные на характеризации Россберга [11, 12] свойствами порядковых статистик:

---

*Ключевые слова* : экспоненциальное распределение, характеризация, большие уклонения, $U$-статистика, асимптотическая эффективность, локальная оптимальность.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00159 и грантом НШ 638.2008.1.

*Пусть $X_1, \dots, X_n$ – неотрицательные н.о.р.с.в. Если для некоторого $j$ статистики $X_{j+s,n} - X_{j,n}$ и $\min(X_1, \dots, X_{s,n-j})$ одинаково распределены, то выборка имеет экспоненциальный закон распределения.*

Рассмотрим частный случай характеризации $n = 3, s = 1$ и $j = 1$. Таким образом рассматриваемая характеризация примет вид: *если статистики $X_{2,3} - X_{1,3}$ и $\min(X_1, X_2)$ одинаково распределены, то выборка имеет экспоненциальный закон распределения.*

В соответствии с характеризацией построим две $U$-эмпирические ф.р.

$$H_n(t) = \binom{n}{3}^{-1} \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbf{1}\{X_{2,\{i,j,k\}} - X_{1,\{i,j,k\}} < t\}, \quad t \ge 0,$$

$$G_n(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{1}\{\min(X_i, X_j) < t\}, \quad t \ge 0,$$

где под выражением $X_{s,\{i,j,k\}}, s = 1, 2,$ понимается $s$-я порядковая статистика выборки $X_i, X_j, X_k$.

Построим новые инвариантные к параметру масштаба $\lambda$ статистики для проверки гипотезы экспоненциальности:

$$S_n = \int_0^\infty (H_n(t) - G_n(t))\, dF_n(t), \tag{1}$$

$$R_n = \sup_{t \ge 0} \mid H_n(t) - G_n(t) \mid . \tag{2}$$

Мы опишем предельные распределения и большие уклонения обеих последовательностей статистик при гипотезе $H_0$, вычислим их локальную бахадуровскую эффективность при ряде альтернатив и опишем для них условия локальной асимптотической оптимальности. При этом будем пользоваться необходимыми сведениями из теории $U$-статистик и теории асимптотической эффективности по Бахадуру, изложенными в [1] и [3].

Заметим, что в принципе можно строить критерии экспоненциальности, основанные на более сложных вариантах характеризации Россберга, чем рассматриваются в данной работе. Однако критерии, получающиеся при этом, оказываются довольно громоздкими и редко дают ощутимый выигрыш в эффективности для стандартных альтернатив.

## 2. Предельные распределения статистик $S_n$ и $R_n$

Без ограничения общности будем считать, что $\lambda = 1$. Статистика $S_n$ асимптотически эквивалентна $U$-статистике степени 4 с центрированным ядром

$$\Phi(X_i, X_j, X_k, X_l) = \frac{1}{4}(\mathbf{1}\{X_{2,\{i,j,k\}} - X_{1,\{i,j,k\}} < X_l\} \\ + \mathbf{1}\{X_{2,\{j,k,l\}} - X_{1,\{j,k,l\}} < X_i\} + \mathbf{1}\{X_{2,\{k,l,i\}} - X_{1,\{k,l,i\}} < X_j\} \\ + \mathbf{1}\{X_{2,\{l,i,j\}} - X_{1,\{l,i,j\}} < X_k\}) \\ - \frac{1}{12} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \in (i,j,k,l) \\ j_1 \neq j_2 \neq j_3}} \mathbf{1}\{\min(X_{j_1}, X_{j_2}) < X_{j_3}\}.$$

Вычислим проекцию этого ядра:

$$\psi(s) = E(\Phi(X, Y, Z, W) \mid X = s) = \frac{3}{4} P(X_{2,\{X,Y,Z\}} \\ - X_{1,\{X,Y,Z\}} < W \mid X = s) + \frac{1}{4} P(X_{2,\{Y,Z,W\}} - X_{1,\{Y,Z,W\}} < s) \\ - \frac{3}{12} P(\min(Y, Z) < s) \\ - \frac{3}{12} P(\min(Y, Z) < W) - \frac{6}{12} P(\min(s, Y) < Z).$$

Последние две вероятности легко вычисляются:

$$P(\min(Y, Z) < W) = \frac{2}{3}\ , \quad P(\min(s, Y) < Z) = \frac{1}{2}(e^{-2s} + 1).$$

Кроме того, из характеризации Россберга следует, что

$$P(X_{2,\{Y,Z,W\}} - X_{1,\{Y,Z,W\}} < s) = P(\min(Y, Z) < s) \\ = 1 - (1 - F(s))^2 = 1 - e^{-2s}.$$

Найдем $P(X_{2,\{X,Y,Z\}} - X_{1,\{X,Y,Z\}} < W \mid X = s)$. Заметим, что

$$P(X_{2,\{X,Y,Z\}} - X_{1,\{X,Y,Z\}} < W \mid X = s) \\ = P(X_{2,\{s,Y,Z\}} - X_{1,\{s,Y,Z\}} < W) \\ = \int_0^\infty P(X_{2,\{s,Y,Z\}} - X_{1,\{s,Y,Z\}} < t) e^{-t} dt.$$

Вероятность под знаком интеграла есть

$$\begin{aligned}P(X_{2,\{s,Y,Z\}} &- X_{1,\{s,Y,Z\}} < t)\\ &= 2P(X_{2,\{s,Y,Z\}} - X_{1,\{s,Y,Z\}} < t, 0 < s < Y < Z)\\ &+ 2P(X_{2,\{s,Y,Z\}} - X_{1,\{s,Y,Z\}} < t, 0 < Y < s < Z)\\ &+ 2P(X_{2,\{s,Y,Z\}} - X_{1,\{s,Y,Z\}} < t, 0 < Y < Z < s).\end{aligned}$$

После ряда вычислений имеем:

$$\begin{aligned}P(X_{2,\{s,Y,Z\}} - X_{1,\{s,Y,Z\}} < t) &= e^{-2s}(1-e^{-2t})\\ &+ \mathbf{1}\{s > t\}(1 - e^{-t} + e^{-2s}(e^t - 1)) + \mathbf{1}\{s < t\}(1 - e^{-2s}).\end{aligned}$$

Окончательно получаем необходимую вероятность для подсчета проекции $P(X_{2,\{X,Y,Z\}} - X_{1,\{X,Y,Z\}} < W \mid X = s) = e^{-2s}(s + \frac{1}{6}) + \frac{1}{2}$. Собирая проделанные вычисления, мы видим, что проекция ядра равна

$$\psi(s) = \frac{1}{4}\left((3s - \frac{1}{2})e^{-2s} - \frac{1}{6}\right).$$

Теперь вычислим дисперсию проекции $\Delta_\psi^2 = E\psi^2(Z)$ при $H_0$. Вычисления дают:

$$\Delta_\psi^2 = \frac{13}{4500} \approx 0.00288.$$

Таким образом, ядро $\Phi$ невырождено. По теореме Хёффдинга, см. [1, Теор. 4.2.1] при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}S_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{52}{1125}\right).$$

Теперь рассмотрим статистику колмогоровского типа (2). В этом случае при фиксированном $t$ разность $H_n(t) - G_n(t)$ есть $U$-статистика с ядром

$$\begin{aligned}&\Xi(X, Y, Z; t) = \mathbf{1}\{X_{2,\{X,Y,Z\}} - X_{1,\{X,Y,Z\}} < t\}\\ &-\frac{1}{3}\mathbf{1}\{\min(X,Y) < t\} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\{\min(Y,Z) < t\} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\{\min(X,Z) < t\},\end{aligned}$$

зависящим от $t \geq 0$.

Вычислим проекцию ядра:

$$\xi(s,t) = E(\Xi(X,Y,Z;t) \mid X = s) = P(X_{2,\{s,Y,Z\}} \\ - X_{1,\{s,Y,Z\}} < t) - \frac{2}{3}P(\min(s,Y) < t) - \frac{1}{3}P(\min(Y,Z) < t).$$

Из характеризации экспоненциального закона следует, что

$$P(\min(Y,Z) < t) = 1 - (1 - F(t))^2 = 1 - e^{-2t}.$$

Кроме того, $P(\min(s,Y) < t) = 1 - \mathbf{1}\{s > t\}e^{-t}$.

Вероятность $P(X_{2,\{s,Y,Z\}} - X_{1,\{s,Y,Z\}} < t)$ уже была вычислена для интегральной статистики. Таким образом, проекция ядра равна

$$\xi(s,t) = \mathbf{1}\{s > t\}(1 - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{-2s}(e^t - 1)) \\ + \mathbf{1}\{s < t\}(1 - e^{-2s}) + (e^{-2s}(1 - e^{-2t}) - 1 + \frac{1}{3}e^{-2t}.$$

Теперь вычислим $\Delta_\xi^2(t) = E\xi^2(Z,t)$ при $H_0$. Вычисления дают:

$$\Delta_\xi^2(t) = \frac{4}{45}e^{-3t}(-2e^{-3t} + e^{-t} + 1).$$

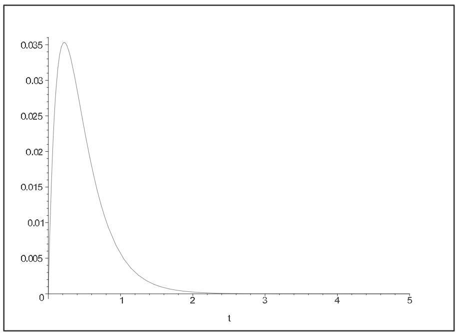


Рис. 1. График функции $\Delta_\xi^2(t)$.

Поэтому наше семейство ядер $\Xi(X,Y,Z;t)$ невырождено в смысле [8, 9], и

$$\Delta_\xi^2 = \sup_{t\geq 0} \Delta_\xi^2(t) \approx 0.03532.$$

Это значение потребуется нам ниже для вычисления асимптотики больших уклонений.

Предельное распределение статистики $R_n$ неизвестно. Опираясь на методы работы [13], можно показать, что $U$-эмпирический процесс

$$\eta_n(t) = \sqrt{n}\left(H_n(t) - G_n(t)\right), \quad t \geq 0,$$

слабо сходится при $n \to \infty$ к некоторому центрированному гауссовскому процессу $\eta(t)$ со сложной ковариацией. Тогда последовательность статистик $\sqrt{n}R_n$ сходится по распределению к величине $\sup_{t\geq 0}|\eta(t)|$, найти распределение которой в явном виде не представляется возможным. Поэтому критические значения для статистик $R_n$ целесообразно искать с помощью моделирования их выборочного распределения.

## 3. Большие уклонения и локальная эффективность статистик $S_n$

Переходим к анализу логарифмических больших уклонений последовательностей статистик (1) при нулевой гипотезе. Ядро $\Phi$ не только центрировано и невырождено, но и ограничено. Поэтому по теореме о больших уклонениях невырожденных $U$- и $V$-статистик из [4] получаем при $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(S_n > a) = -f(a),$$

где функция $f$ непрерывна при достаточно малых $a > 0$, причем

$$f(a) = \frac{1125}{104} a^2 (1 + o(1)), \quad \text{при} \quad a \to 0.$$

Сначала рассмотрим альтернативу Вейбулла с плотностью

$$g(x,\theta) = (1+\theta)x^\theta \exp(-x^{1+\theta}), \quad \theta \geq 0, x \geq 0,$$

и соответствующей ф.р. $G(x,\theta)$. Согласно закону больших чисел для $U$-статистик [1], предел вероятности статистик $S_n$ при альтернативе равен

$$b_S(\theta) = P_\theta(X_{2,3} - X_{1,3} < X_4) - P_\theta(X_{1,2} < X_3).$$

Вычислим по отдельности эти вероятности. Для первой из них имеем

$$\begin{aligned} P_\theta(X_{2,3} - X_{1,3} < X_4) &= \int\limits_0^\infty P_\theta(X_{2,3} - X_{1,3} < x) g(x,\theta)dx \\ &= 1 - \int\limits_0^\infty \left( 3\int\limits_0^\infty (1 - G(x+y,\theta))^2 g(y,\theta)dy \right) g(x,\theta)dx \\ &= J(0) + J'(\theta)\mid_{\theta=0} \theta + o(\theta). \end{aligned}$$

Получаем $J(0) = \frac{2}{3}$, и

$$\begin{aligned} J'(\theta)\mid_{\theta=0} = &-2\int\limits_0^\infty g'(x,0) \left( 3\int\limits_0^\infty (1 - G(x+y,0))^2 g(y,0)dy \right) dx \\ &+ \int\limits_0^\infty g(x,0) 3 (\int\limits_0^\infty 2(1 - G(x+y,0))G'(x+y,0)g(y,0)dy)dx = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Для второй вероятности имеем при любом $\theta$

$$P_\theta(X_{1,2} < X_3) = \int\limits_0^\infty g(x,\theta)(1 - (1 - G(x,\theta))^2)dx = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$b_S(\theta) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\theta - \frac{2}{3} + o(\theta) \sim \frac{2}{9}\theta, \quad \theta \to 0.$$

Таким образом, локальный точный наклон [3] последовательности статистик $S_n$ при $\theta \to 0$ допускает представление

$$c_S(\theta) = b_S(\theta)^2/(16\Delta_\psi^2) = \frac{125}{117}\theta^2 \sim 1.068\theta^2.$$

Точный наклон в теории Бахадура является мерой асимптотической эффективности. Для точных наклонов имеется теоретическая верхняя граница $2K(\theta)$ в терминах расстояния Кульбака–Лейблера $K(\theta)$ между $H_0$ и $H_1$, см. [3, Гл. 1]. Эта граница при проверке сложной гипотезы экспоненциальности для альтернативы Вейбулла вычислена в [2]. Оказывается, что $K \sim \pi^2\theta^2/12, \theta \to 0$. Следовательно, локальная бахадуровская эффективность нашего критерия равна

$$\mathrm{eff}(S_n) := \lim_{\theta\to 0} \frac{c_S(\theta)}{2K} \approx 0.6495.$$

В качестве второй альтернативы возьмем альтернативу Макегама с плотностью

$$g(x,\theta) = (1+\theta(1-e^{-x}))\exp(-x-\theta(e^{-x}-1+x)), \quad \theta \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Пользуясь полученными формулами, после ряда вычислений имеем:

$$b_S(\theta) \sim \frac{1}{24}\theta, \qquad \theta \to 0.$$

Локальный точный наклон имеет вид

$$c_S(\theta) \sim 0.0376\theta^2, \qquad \theta \to 0.$$

Информация Кульбака–Лейблера для альтернативы Макегама известна из [2], где доказано, что

$$K(\theta) \sim \theta^2/24, \qquad \theta \to 0.$$

Следовательно, локальная эффективность критерия равна 0.4507.

Третьей мы рассмотрим альтернативу линейности функции интенсивности отказов с плотностью

$$g(x,\theta) = (1+\theta x)e^{-x-\frac{1}{2}\theta x^2}, \quad \theta \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Опуская аналогичные предыдущим примерам вычисления, получаем $b_S(\theta) \sim \frac{2}{27}\theta$. Локальный точный наклон имеет вид

$$c_S(\theta) \sim 0.1187\theta^2, \qquad \theta \to 0.$$

Из [2] известно, что

$$K(\theta) \sim \theta^2/2, \qquad \theta \to 0.$$

Поэтому локальная эффективность критерия для этой альтернативы равна 0.1187.

## 4. Большие уклонения и локальная эффективность статистик $R_n$

Очевидно, что семейство ядер $\{\Xi(X,Y,Z;t), t \geq 0\}$ не только центрировано и ограничено, но и невырождено в смысле [8]. Поэтому по теореме о больших уклонениях супремума семейства $U$-статистик из [8, Теор. 2.4], получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbb{P}(R_n > a) = -f(a),$$

где функция $f$ непрерывна при достаточно малых $a > 0$, причем

$$f(a) = \frac{a^2}{18 \sup\limits_{t\geq 0} \Delta_\xi^2(t)}(1 + o(1)) \sim 1.5729a^2, \quad \text{при} \quad a \to 0.$$

Теперь снова рассмотрим альтернативу Вейбулла. По теореме Гливенко–Кантелли для $U$-статистических ф.р. [7] предел $R_n$ по вероятности равен

$$b_R(\theta) = \sup_{t\geq 0} |P_\theta(X_{2,3} - X_{1,3} < t) - P_\theta(X_{1,2} < t)|.$$

Вычислим по отдельности эти вероятности. Для первой из них имеем

$$\begin{aligned} P_\theta(X_{2,3} - X_{1,3} < t) &= 1 - 3\int_0^\infty (1 - G(t+y,\theta))^2 g(y,\theta)dy \\ &= J(0) + J'(\theta)\mid_{\theta=0} \theta + o(\theta). \end{aligned}$$

Получаем $J(0) = 1 - e^{-2t}$, и

$$\begin{aligned} J'(\theta)\mid_{\theta=0} = 6\int_0^\infty (1 - G(t+y,0))G'(t+y,0)g(y,0)dy \\ - 3\int_0^\infty (1 - G(t+y,0))^2 g'(y,0)dy \\ = \left(2t\ln(t)e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-2t}(\ln t + \gamma + \ln 3) + \frac{2}{3}Ei(1,3t)e^t\right)\theta. \end{aligned}$$

где $\gamma$ – константа Эйлера, $\gamma \approx 0.5772157$, а $Ei(k,z) = \int\limits_1^\infty e^{-zt}t^{-k}dt$.

Для второй вероятности имеем

$$P_\theta(X_{1,2} < t) = 1 - (1 - G(t,\theta))^2 = J(0) + J'(\theta)\mid_{\theta=0}\theta + o(\theta).$$

В этом случае снова $J(0) = 1 - e^{-2t}$, и

$$J'(\theta)\mid_{\theta=0} = 2(1 - G(t,0))G'(t,0) = 2e^{-2t}t\ln t.$$

Следовательно,

$$b_R(t,\theta) \sim \left(\frac{2}{3}e^{-2t}(\ln t + \gamma + \ln 3) + \frac{2}{3}Ei(1,3t)e^t\right)\theta.$$

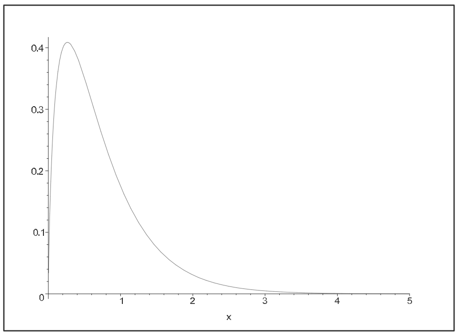


Рис. 2. График функции $b_R(t,\theta)$, альт. Вейбулла.

Поэтому

$$b_R(\theta) = \sup_{t\geq 0} b_R(t,\theta) \sim 0.4088\theta, \qquad \theta \to 0.$$

Локальный точный наклон допускает представление

$$c_R(\theta) = b_R(\theta)^2/(9\Delta_\xi^2) \sim 0.5258\theta^2.$$

Как и в случае интегральной статистики для альтернативы Вейбулла

$$K \sim \pi^2\theta^2/12, \qquad \theta \to 0.$$

Следовательно, локальная бахадуровская эффективность равна

$$\text{eff}(R) = \frac{c_R(\theta)}{2K(\theta)} = 0.3196.$$

Для альтернативы Макегама, используя полученные в предыдущем случае формулы, имеем при $\theta \to 0$ :

$$b_R(t,\theta) \sim \frac{1}{2}e^{-2t}(1-e^{-t})\theta.$$

Простыми вычислениями получаем, что:

$$b_R(\theta) = \sup_{t\geq 0} b_R(t,\theta) = b_R(\ln 3 - \ln 2, \theta) \sim 0.(074)\theta, \qquad \theta \to 0.$$

Локальный точный наклон при $\theta \to 0$ допускает представление $c_R(\theta) \sim 0.01735\theta^2$. Как и для интегральной статистики для альтернативы Макегама $K(\theta) \sim \theta^2/24$. Поэтому эффективность нашего критерия равна 0.2071.

В случае альтернативы линейности функции интенсивности отказов после ряда вычислений имеем при $\theta \to 0$ :

$$\begin{aligned} b_R(t,\theta) &\sim \frac{2}{3}te^{-2t}\theta, \\ b_R(\theta) &= \sup_{t\geq 0} b_R(t,\theta) = b_R(\frac{1}{2},\theta) \sim \frac{\theta}{3e}. \end{aligned}$$

Локальный точный наклон имеет вид $c_R(\theta) \sim 0.0473\theta^2, \theta \to 0$. Информация Кульбака–Лейблера, как и в случае интегральной статистики, равна $K(\theta) = \theta^2/2$, поэтому локальная бахадуровская эффективность критерия очень мала и равна 0.0473.

## 5. Условия локальной асимптотической оптимальности

Значения эффективностей наших критериев для стандартных альтернатив к гипотезе экспоненциальности далеки от максимальных. Тем не менее, существуют такие альтернативы, для которых наши статистики локально асимптотически оптимальны. Опишем семейства альтернатив, для которых каждая из последовательностей статистик $S_n$ и $R_n$ является наилучшей в бахадуровском смысле. При этом будем пользоваться результатами и методом, предложенным для решения этой задачи в [10, 5].

Для заданного ядра $\Psi$ обозначим через $\mathcal{G}(\Psi)$ множество плотностей $g(x,\theta)$ с ф.р. $G(x,\theta)$. Введем функции

$$H(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}G(x,\theta)\mid_{\theta=0}, \quad h(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}g(x,\theta)\mid_{\theta=0}.$$

Предположим также, что выполнены следующие условия регулярности:

$$\begin{aligned} &h(x) = H'(x), \quad \forall x \geq 0,\\ &\int h^2(x)e^x dx < +\infty,\\ &\frac{\partial}{\partial\theta}\int xg(x,\theta)dx\mid_{\theta=0} = \int xh(x)dx. \end{aligned}$$

Выведем условия оптимальности в терминах функции $h(x)$.

В работе [10] было показано, что для информации Кульбака–Лейблера для семейства альтернатив с описанными условиями регулярности верна асимптотика

$$2K(\theta) \sim \left[\int h^2(x)e^x dx - \left(\int xh(x)dx\right)^2\right]\theta^2, \quad \theta \to 0.$$

Сначала рассмотрим интегральную статистику $S_n$ с уже выписанным ядром $\Phi(X,Y,Z,W)$ и вычисленной проекцией ядра $\psi(s)$. В этом случае верна асимптотика для функции $b_S(\theta)$:

$$b_S(\theta) \sim 4\theta\int_0^\infty \psi(s)h(s)ds.$$

Поэтому локальная асимптотическая эффективность принимает вид

$$\begin{aligned} \mathrm{eff}(T) &= \lim_{\theta\to 0} b_S^2(\theta)/\left(32\Delta_\psi^2 K(\theta)\right)\\ &= \left(\int_0^\infty \psi(s)h(s)ds\right)^2 \Big/ \left(\int_0^\infty \psi(s)^2 e^{-x}dx\right.\\ &\qquad \left.\times\left[\int h^2(x)e^x dx - \left(\int xh(x)dx\right)^2\right]\right). \end{aligned}$$

Как известно, [6, 3], локальная асимптотическая оптимальность (ЛАО) в бахадуровском смысле статистики $S_n$ означает, что выражение в правой части равно 1. Как следует из теории, развитой в работах [10, 5], статистика $S_n$ локально оптимальна для семейства альтернатив с плотностями $G(x,\theta)$ тогда и только тогда, когда соответствующая функция $h(x)$ удовлетворяет условию $h(x) = e^{-x}(\beta\psi(x)+\gamma(x-1))$ при произвольных вещественных $\beta > 0$ и $\gamma$. Распределения, для которых функция $h(x)$ указанного вида, образуют область ЛАО в классе $\mathcal{G}(\Phi)$.

Простейшим примером альтернативы может служить та, у которой плотность $g(x,\theta)$ при всех $\theta \to +0$ выражается формулой:

$$g(x,\theta) = e^{-x}\left(1+\frac{\theta}{4}\left((3x-\frac{1}{2})e^{-2x}-\frac{1}{6}\right)\right).$$

Теперь рассмотрим супремальную статистику $R_n$ с уже выписанным ядром $\Xi(X,Y,Z;t)$ и вычисленной проекцией ядра $\xi(s,t)$. В этом случае верна асимптотика для функции $b(\theta)$:

$$b_R(\theta) \sim 3\theta \sup_{t\geq 0}\int_0^\infty \xi(s,t)h(s)ds.$$

Поэтому локальная асимптотическая эффективность принимает вид

$$\begin{aligned}\mathrm{eff}(T) &= \lim_{\theta\to 0} b_R^2(\theta)\Big/\left(18\sup_{t\geq 0}\Delta_\xi^2(t)K(\theta)\right)\\ &= \left(\int_0^\infty \sup_{t\geq 0}\xi(s,t)h(s)ds\right)^2\Big/\left(\sup_{t\geq 0}\int_0^\infty \xi(s,t)^2e^{-x}dx\right.\\ &\qquad\left.\times\left[\int h^2(x)e^x dx - \left(\int xh(x)dx\right)^2\right]\right).\end{aligned}$$

Как следует из [10, 5], статистика $R_n$ локально оптимальна для семейства альтернатив $G(x,\theta)$ тогда и только тогда, когда соответствующая функция $h(x)$ удовлетворяет условию

$$h(x) = e^{-x}(\beta\xi(x,t_0)+\gamma(x-1))$$

при произвольных вещественных $\beta > 0$ и $\gamma$ и

$$t_0 = \mathrm{argmax}_{t\geq 0}\Delta_\xi^2(t).$$

Распределения, для которых функция $h(x)$ указанного вида, образуют область ЛАО в классе $\mathcal{G}(\Xi)$. Примером такой альтернативы может служить та, у которой плотность $g(x,\theta)$ при всех $\theta \to +0$ выражается формулой:

$$g(x,\theta) = e^{-x}(1+\theta\mathbf{1}\{x>t_0\}(1-\frac{1}{3}e^{-t_0}+e^{-2x}(e^{t_0}-1))$$
$$+\theta\mathbf{1}\{x<t_0\}(1-e^{-2x})+\theta(e^{-2x}(1-e^{-2t_0})-1+\frac{1}{3}e^{-2t_0})),$$

где

$$t_0 = \arg\max_{t\geq 0}\left(\frac{4}{45}e^{-3t}(-2e^{-3t}+e^{-t}+1)\right).$$

Автор выражает благодарность Я. Ю. Никитину за предложенную характеризацию, внимание к работе и ценные консультации.

## Литература


1. В. С. Королюк, Ю. В. Боровских, *Теория $U$-статистик.* Киев. Наукова Думка (1989).
2. В. В. Литвинова, *Асимптотические свойства критериев симметрии и согласия, основанных на характеризациях.* Кандидатская диссертация. СПбГУ (2004).
3. Я. Ю. Никитин, *Асимптотическая эффективность непараметрических статистических критериев.* М. Наука (1995).
4. Я. Ю. Никитин, Е. В. Поникаров, *Грубая асимптотика вероятностей больших уклонений черновского типа для функционалов Мизеса.* — Тр. С.-Петерб. матем. общества **7** (1999), 124–167.
5. А. В. Чирина, *Асимптотическая эффективность критериев экспоненциальности, свободных от параметра масштаба.* Кандидатская диссертация. СПбГУ. 2005. 82 С.
6. R. R. Bahadur, *Rates of convergence of estimates and test statistics.* — Ann. Math. Stat., **38** (1967), 303–324.
7. P. L. Janssen, *Generalized empirical distribution functions with statistical applications.* Limburgs Universitair Centrum. Diepenbeek. (1988).
8. Ya. Yu. Nikitin, *Large deviations of $U$-empirical Kolmogorov–Smirnov tests, and their efficiency.* — J. Nonparam. Statistics, 2010. Принято к печати. Доступно в http://arxiv.org/pdf/0906.0428.

9. Ya. Yu. Nikitin, *U-statistical Kolmogorov–Smirnov tests: large deviations and asymptotic efficiency.* — Proceedings of ISNI2008, ed. by J. C. Fernandez-Pardo and J. de Una-Alvarez, Vigo, 2008, 138–142.
10. Ya. Yu. Nikitin, A. V. Tchirina, *Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic.* — J. Ital. Statist. Soc., **5**, No. 1 (1996) 163–175.
11. H.-J. Rossberg, *Characterization of the exponential and the Pareto distributions by means of some properties of the distributions which differences and quotients of order statistics are subjected to.* — Math. Operat. Statist. **3** (1972), 207–216.
12. M. Riedel, H.-J. Rossberg, *Characterization of the exponential distribution function by properties of the difference* $X_{k+s:n} - X_{k:n}$ *of order statistics.* — Metrika **41** (1994), 1–19.
13. B. W. Silverman, *Convergence of a class of empirical distribution functions of dependent random variables.* — Ann. Probab. **11** (1983), 745–751.

Volkova K. Yu. On asymptotic efficiency of exponentiality tests based on Rossberg's characterization.

We construct new tests of exponentiality based on Rossberg's characterization of exponential law. We compute limiting distributions of new tests, local Bahadur efficiency for common alternatives and describe conditions of their local asymptotic optimality.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

*E-mail*: efrksenia@gmail.com

Поступило 19 октября 2009 г.