Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ДОСТИЖЕНИЯ МИНИМУМОВ И МАКСИМУМОВ ДЛЯ СКАЧКООБРАЗНЫХ ДИФФУЗИЙ

1. Диффузии со скачками. В работе рассматриваются диффузионные процессы со скачками. Для таких процессов максимальные и минимальные значения достигаются только в одной точке. Нас интересуют распределения моментов времени, в которые достигаются максимальные и минимальные значения. Для диффузий без скачков такая задача рассматривалась, например, в работе [1].

Помимо строго марковского свойства, диффузии обладают свойством, что, начинаясь на некотором уровне, они проводят как выше, так и ниже уровня положительное время. В силу этого, для диффузий со скачками минимальные и максимальные значения не могут достигаться на моментах скачков.

Рассмотрим однородную диффузию X, которая является решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для любых $s \leqslant t \leqslant T$

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mu(X(u))\,du + \int_s^t \sigma(X(u))\,dW(u), \tag{1.1}$$

где $\mu(x)$, $\sigma(x)$ являются дифференцируемыми функциями с ограниченными производными. Пусть $\sigma(x) > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $X(0) = x$.

Скачкообразная диффузия, обозначим ее J, определяется следующим образом. Пусть τ_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ_1 случайные величины ($\mathbf{P}(\tau_k \geqslant$

Ключевые слова : распределение функционалов, диффузия со скачками, инфимум, супремум.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ-ННИО 09-01-91331, НШ 632.2008.1 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

$t) = e^{-\lambda_1 t})$, а Y_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от τ_k, $k = 1, 2, \dots$. Предположим, что броуновское движение W не зависит от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \dots$. Для $\tau_0 := 0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ полагаем $J(t) = X(t)$, а для $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t < \sum\limits_{k=1}^{l+1} \tau_k$, $l = 1, 2, \dots$, определяем J как решение стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = \rho\bigl(J\bigl(\textstyle\sum_{k=1}^{l} \tau_k -\bigr), Y_l\bigr) + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l} \tau_k}^{t} \mu(J(u))\,du + \int\limits_{\sum_{k=1}^{l} \tau_k}^{t} \sigma(J(u))\,dW(u), \quad (1.2)$$

где $\rho(x, y)$ – некоторая функция, которая является кусочно непрерывной по переменной x. В момент $\sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k$ скачкообразная диффузия J начинается заново как обычная диффузия X, выходящая из точки $\rho\bigl(J\bigl(\sum_{k=1}^{l} \tau_k -\bigr), Y_l\bigr)$, где $q- = \lim\limits_{s \uparrow q} s$.

Вычисление распределений моментов положения максимумов и минимумов основано на общих результатах о распределении функционалов от скачкообразных диффузий. Приведем формулировки этих результатов (см. [2], [3]).

Пусть τ – не зависимый от процесса $\{J(s),\ s \geq 0\}$ и величин τ_k, Y_k, $k = 1, 2, \dots$, экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание относительно процесса J при условии $J(0) = x$. Для краткости мы используем следующее обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{I}_A\}$.

Теорема 1.1. *Пусть $\varPhi(x)$ и $f(x)$, $x \in [a, b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$. Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x \Bigl\{ \varPhi(J(\tau)) \exp\Bigl(-\int\limits_0^{\tau} f(J(s))\,ds \Bigr); a \leqslant \inf_{0 \leq s \leq \tau} J(s), \sup_{0 \leq s \leq \tau} J(s) \leqslant b \Bigr\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1, \lambda}(x)\, \mathbf{E} Q(\rho(z, Y_1))\,dz, \quad (1.3)$$

где $M(x)$ при $x \in (a,b)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x)+\mu(x)M'(x)-(\lambda+\lambda_1+f(x))M(x)=-\lambda\Phi(x), \quad (1.4)$$

$$M(a)=0, \qquad M(b)=0, \quad (1.5)$$

а $G_z^{\mu,\eta}(x)$ при $x \in (a,b)\setminus\{x\}$ является единственным непрерывным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x)+\mu(x)G'(x)-(\mu+\eta+f(x))G(x)=0, \quad (1.6)$$

$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2\mu/\sigma^2(z), \quad (1.7)$$

$$G(a)=0, \qquad G(b)=0. \quad (1.8)$$

Полагаем $M(x)=0$, $G_z^{\mu,\eta}(x)=0$ при $x,z\notin(a,b)$.

Замечание 1.1. Если $a=-\infty$ или $b=\infty$, то предполагается, что функция $\Phi(x)$ является ограниченной, и соответствующее граничное условие в (1.5) и (1.8) заменяется условием ограниченности решения на соответствующем конце.

Ключевым для вычисления совместных распределений интегральных функционалов и функционалов инфимума и супремума от моста диффузионного процесса со скачками, т. е. когда фиксируется конец траектории, является следующий результат.

Теорема 1.2. *Пусть $f(x)$, $x\in[a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда функция*

$$G_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^\tau f(J(s))\,ds\Big); a\leqslant \inf_{0\le s\le\tau} J(s),$$
$$\sup_{0\le s\le \tau} J(s)\leqslant b, J(\tau)<y\Big\} \quad (1.9)$$

существует и является единственным ограниченным решением уравнения

$$G_y(x)=G_y^{\lambda,\lambda_1}(x)+\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,\lambda}(x)\,\mathbf{E}G_y(\rho(z,Y_1))\,dz, \quad (1.10)$$

где $G_y^{\mu,\eta}(x)$ *– единственное непрерывное решение задачи* (1.6)–(1.8). *Полагаем* $G_y^{\mu,\eta}(x)=0$ *при* $x\notin(a,b)$ *или* $y\notin(a,b)$.

Ясно, что

$$Q(x)=\int\limits_a^b \Phi(y)G_y(x)\,dy.$$

Принципиальными для вычисления распределений моментов положения максимумов и минимумов являются результаты, позволяющие вычислять распределения функционалов от диффузий со скачками, остановленных в момент выхода из интервала.

Для скачкообразных диффузий момент выхода может происходить либо посредством пересечения границы, либо посредством перескока.

Важным для рассматриваемой задачи является случай, когда выход из интервала происходит посредством пересечения границы. В этом случае справедлив следующий результат (см. [4])

Теорема 1.3. *Пусть* $f(x)$, $x\in[a,b]$, *– неотрицательная кусочно непрерывная функция и* $H_{a,b}=\min\{s: J(s)\notin(a,b)\}$. *Тогда функция*

$$R^\circ(x):=\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b})=b\Big\}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R^\circ(x)=M_b(x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^{\lambda_1,0}(x)\mathbf{E}R^\circ(\rho(z,Y_1))\,dz, \qquad (1.11)$$

где $M_b(x)$ *является единственным решением задачи*

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M''(x)+\mu(x)M'(x)-(\lambda_1+f(x))M(x)=0,\quad x\in(a,b), \qquad (1.12)$$

$$M(a)=0,\qquad M(b)=1, \qquad (1.13)$$

Функция $G_z^{\lambda_1,0}(x)$ *при* $x\in(a,b)\setminus\{z\}$ *является единственным непрерывным решением задачи* (1.6)–(1.8), $\mu=\lambda_1$, $\eta=0$, *и* $G_z^{\lambda_1,0}(x)=0$ *при* $x,z\notin(a,b)$.

2. Оценки вероятностей для попадания диффузий со скачками в интервалы. Рассмотрим задачи (1.4), (1.5) и (1.6)–(1.8) для $f(x)\equiv 0$, $\Phi(x)\equiv 1$, $a=-\infty$.

Пусть $\psi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – возрастающее положительное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Y''(x) + \mu(x)Y'(x) - (\lambda_1 + \lambda)Y(x) = 0, \tag{2.1}$$

а $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – убывающее положительное решение уравнения (2.1). Очевидно, что ограниченным решением задачи (1.4), (1.5) является функция

$$M_{(b)}(x) := M(x) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\Big(1 - \frac{\psi(x)}{\psi(b)}\Big). \tag{2.2}$$

Несложные вычисления показывают, что ограниченное решение задачи (1.6)–(1.8) имеет вид

$$G^{\mu,\eta}_{b,z}(x) := G^{\mu,\eta}_{z}(x) = \begin{cases} \dfrac{2\mu}{\sigma^2(z)}\dfrac{(\psi(b)\varphi(z) - \psi(z)\varphi(b))}{\Delta(z)\psi(b)}\psi(x), & x \leqslant z, \\ \dfrac{2\mu}{\sigma^2(z)}\dfrac{\psi(z)(\psi(b)\varphi(x) - \psi(x)\varphi(b))}{\Delta(z)\psi(b)}, & z \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\Delta(z) = \psi'(z)\varphi(z) - \psi(z)\varphi'(z) > 0$ – вронскиан. Поскольку $G^{\lambda_1,\lambda}_{b,z}$ является функцией Грина для задачи (1.4), (1.5), то

$$M_b(x) = \int\limits_{-\infty}^{b} G^{\lambda_1,\lambda}_{b,z}(x)\,dz.$$

При $\delta \downarrow 0$, $x \leqslant b$

$$M_{(b+\delta)}(b) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\Big(1 - \frac{\psi(b)}{\psi(b+\delta)}\Big) \sim \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\frac{\psi'(b)}{\psi(b)}\delta, \tag{2.4}$$

$$M_{(b+\delta)}(x) - M_{(b)}(x) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\Big(\frac{\psi(x)}{\psi(b)} - \frac{\psi(x)}{\psi(b+\delta)}\Big) \sim \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\frac{\psi(x)\psi'(b)}{\psi^2(b)}\delta, \tag{2.5}$$

и

$$\sup_{x \leqslant b}\big(M_{(b+\delta)}(x) - M_{(b)}(x)\big) = \frac{\lambda\psi(b)}{\lambda + \lambda_1}\Big(\frac{1}{\psi(b)} - \frac{1}{\psi(b+\delta)}\Big) \sim \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}\frac{\psi'(b)}{\psi(b)}\delta. \tag{2.6}$$

При $\delta \downarrow 0$, $z \leqslant b$, $x \leqslant b$

$$G^{\mu,\eta}_{b+\delta,z}(b) = \frac{2\mu\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\frac{\psi(b+\delta)\varphi(b) - \psi(b)\varphi(b+\delta)}{\psi(b+\delta)} \sim \frac{2\mu\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\frac{\Delta(b)}{\psi(b)}\delta, \tag{2.7}$$

$$G^{\mu,\eta}_{b+\delta,z}(x) - G^{\mu,\eta}_{b,z}(x) = \frac{2\mu\psi(z)\psi(x)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\Big(\frac{\varphi(b)}{\psi(b)} - \frac{\varphi(b+\delta)}{\psi(b+\delta)}\Big)$$

$$\sim \frac{2\mu\psi(z)\psi(x)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\frac{\Delta(b)}{\psi^2(b)}\delta, \qquad (2.8)$$

$$\sup_{x\leqslant b}\Big(G^{\mu,\eta}_{b+\delta,z}(x) - G^{\mu,\eta}_{b,z}(x)\Big) = \frac{2\mu\psi(z)\psi(b)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\Big(\frac{\varphi(b)}{\psi(b)} - \frac{\varphi(b+\delta)}{\psi(b+\delta)}\Big)$$

$$\sim \frac{2\mu\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\frac{\Delta(b)}{\psi(b)}\delta, \qquad (2.9)$$

и

$$\sup_{x\leqslant b} G^{\mu,\eta}_{b,z}(x) = G^{\mu,\eta}_{b,z}(z) = \frac{2\mu}{\sigma^2(z)}\frac{(\psi(b)\varphi(z) - \psi(z)\varphi(b))}{\Delta(z)\psi(b)}\psi(z). \qquad (2.10)$$

Лемма 2.1. *Для некоторых постоянных C_b, K_b справедливы соотношения*

$$\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \leqslant b+\delta\Big) \sim \delta C_b, \qquad (2.11)$$

$$\sup_{x\leqslant b}\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \in [b, b+\delta)\Big) \leqslant \delta K_b. \qquad (2.12)$$

Доказательство. Рассмотрим вероятность

$$Q_b(x) := \mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \leqslant b\Big).$$

Согласно (1.3),

$$Q_b(x) = M_{(b)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G^{\lambda_1,\lambda}_{b,z}(x)\,\mathbf{E}Q_b(\rho(z, Y_1))\,dz. \qquad (2.13)$$

Тогда, в силу (2.4), (2.7),

$$Q_{b+\delta}(b) \sim \delta\Big[\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}\frac{\psi'(b)}{\psi(b)} + \frac{2\lambda_1\Delta(b)}{\psi(b)}\int_{-\infty}^{b}\frac{\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\mathbf{E}Q_b(\rho(z, Y_1))\,dz\Big],$$

что доказывает (2.11).

Положим

$$D_\delta(x) := \mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \in [b, b+\delta)\Big) = Q_{b+\delta}(x) - Q_b(x),$$

$$\widetilde{M}_\delta(x) := M_{(b+\delta)}(x) - M_{(b)}(x) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(G^{\lambda_1,\lambda}_{b+\delta,z}(x) - G^{\lambda_1,\lambda}_{b,z}(x)\right) \mathbf{E} Q_{b+\delta}(\rho(z,Y_1))\, dz.$$

Из (2.11) следует, что

$$D_\delta(x) = \widetilde{M}_\delta(x) + \int_{-\infty}^{b} G^{\lambda_1,\lambda}_{b,z}(x)\, \mathbf{E} D_\delta(\rho(z,Y_1))\, dz. \tag{2.14}$$

В [2] п. 4 устанавливается, что

$$\int_{-\infty}^{b} G^{\lambda_1,\lambda}_{b,z}(x)\, dz \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}, \tag{2.15}$$

и что для решений интегральных уравнений (2.14) справедлива оценка

$$\sup_{x\leqslant b+\delta} D_\delta(x) \leqslant \frac{\lambda_1+\lambda}{\lambda} \sup_{x\leqslant b+\delta} \widetilde{M}_\delta(x). \tag{2.16}$$

Из (2.4), (2.6), (2.7) и (2.9) следует, что

$$\sup_{x\leqslant b+\delta} \widetilde{M}_\delta(x) \leqslant \frac{\lambda\psi(b)}{\lambda+\lambda_1}\Big(\frac{1}{\psi(b)} - \frac{1}{\psi(b+\delta)}\Big)$$
$$+2\lambda_1\psi(b)\Big(\frac{\varphi(b)}{\psi(b)} - \frac{\varphi(b+\delta)}{\psi(b+\delta)}\Big) \int_{-\infty}^{b+\delta} \frac{\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)} dz.$$

Поскольку интеграл в правой части конечен, то эта оценка совместно с (2.16) влечет (2.12). □

Лемма 2.2. *Для некоторых постоянных* $C_{z,b}$, $K_{z,b}$ *справедливы соотношения*

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \leqslant b+\delta, J(\tau) < z\Big) \sim \delta C_{z,b}, \tag{2.17}$$

$$\sup_{x\leqslant b} \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) \in [b, b+\delta), J(\tau) < z\Big) \leqslant \delta K_{z,b}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Вывод этого результата аналогичен доказательству леммы 2.1. Отметим лишь некоторые моменты. Согласно (1.10) величина
$$G_{b,z}(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s)\leqslant b, J(\tau)\leqslant z\Big)$$
является единственным ограниченным решением уравнения
$$G_{b,y}(x) = G^{\lambda,\lambda_1}_{b,y}(x) + \int\limits_{-\infty}^{b} G^{\lambda_1,\lambda}_{b,z}(x)\,\mathbf{E}G_{b,y}(\rho(z,Y_1))\,dz. \tag{2.19}$$

Тогда, применяя оценку аналогичную (2.16) и (2.10), получаем
$$\sup_{x\leqslant b} G_{b,y}(x) \leqslant \frac{\lambda_1+\lambda}{\lambda}\sup_{x\leqslant b} G^{\lambda,\lambda_1}_{b,y}(x) \leqslant C_{b,y}. \tag{2.20}$$

Тогда из (2.19) и (2.7) следует, что
$$G_{b+\delta,y}(b) \sim \delta\Big[\frac{2\lambda\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\frac{\Delta(b)}{\psi(b)} + \frac{2\lambda_1\Delta(b)}{\psi(b)}\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\mathbf{E}G_{b+\delta,y}(\rho(z,Y_1))\,dz\Big].$$

Это доказывает (2.17). Оценка (2.18) доказывается аналогично (2.12), основываясь на соотношениях (2.7)–(2.10). □

3. Моменты достижения минимальных и максимальных значений. Пусть $J(t)$, $t\geqslant 0$, скачкообразный диффузионный процесс, а τ – показательно распределенный с параметром $\lambda>0$ момент времени, не зависящий от J. Для процесса $J(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, величина $\check{H}(t) := \inf\{v<t : J(v) = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} J(s)\}$ является положением максимума до момента t, а величина $\hat{H}(t) := \inf\{u<t : J(u) = \inf_{0\leqslant s\leqslant t} J(s)\}$ является положением минимума до момента t. Обозначим $H_b = \min\{s : J(s)\geqslant b\}$ – момент первого превышения уровня b.

Теорема 3.1. *При* $x\leqslant b$
$$\frac{d}{db}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma\check{H}(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s)<b\Big\}$$
$$= \mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\gamma)H_b}; J(H_b)=b\Big\}\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s)<b+\delta\Big). \tag{3.1}$$

Доказательство. Важно, что момент первого превышения уровня b может осуществляться посредством пересечения или перескоком. Поскольку скачкообразная диффузия в момент скачка имеет плотность распределения, то при перескоке через уровень b вероятность попасть в интервал $(b, b+\delta)$ будет иметь порядок δ. Это приводит к тому, что нам нужно рассматривать моменты первого превышения уровня b, осуществляемые посредством пересечения. В результате имеем, что при $\delta \downarrow 0$

$$\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \check{H}(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} J(s) \in [b, b+\delta)\Big\}$$

$$= \mathrm{o}(\delta) + \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \check{H}(\tau)}; J(H_b) = b, \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} J(s) \in [b, b+\delta)\Big\}. \tag{3.2}$$

Используя строго марковское свойство скачкообразной диффузии, второе слагаемое в правой части (3.2) преобразуем следующим образом

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \check{H}(t)}; J(H_b) = b, \sup_{0\leqslant s\leqslant t} J(s) \in [b, b+\delta)\Big\}\, dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \check{H}(t)}; J(H_b) = b, H_b \in ds, \sup_{0\leqslant s\leqslant t} J(s) \in [b, b+\delta)\Big\}\, dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \check{H}(t)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant t} J(s) \in [b, b+\delta) \Big| J(H_b) = b, H_b = v\Big\}$$

$$\times \mathbf{P}_x(J(H_b) = b, H_b \in dv)\, dt = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\gamma)v} \mathbf{P}_x(J(H_b) = b, H_b \in dv)$$

$$\times \int_v^\infty e^{-\lambda(t-v)} \mathbf{E}_b\Big\{e^{-\gamma \check{H}(t-v)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant t-v} J(s) < b+\delta\Big\} dt$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\gamma)H_b}; J(H_b) = b\Big\} \mathbf{E}_b\Big\{e^{-\gamma \check{H}(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} J(s) < b+\delta\Big\}.$$

В силу (3.2), нам достаточно убедиться, что

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{\big(e^{-\gamma\check{H}(\tau)}-1\big);\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J(s)<b+\delta\Big\}=0. \tag{3.3}$$

Выберем произвольное малое число $q>0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_b\Big\{&\big(1-e^{-\gamma\check{H}(\tau)}\big);\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J(s)<b+\delta\Big\}\\ &=\mathbf{E}_b\Big\{\big(1-e^{-\gamma\check{H}(\tau)}\big);\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J(s)<b+\delta,\tau<q\Big\}\\ &+\mathbf{E}_b\Big\{\big(1-e^{-\gamma\check{H}(\tau)}\big);\sup_{0\leqslant s\leqslant q}J(s)<b+\delta,\sup_{q\leqslant s\leqslant\tau}J(s)<b,\tau\geqslant q\Big\}\\ &+\mathbf{E}_b\Big\{\big(1-e^{-\gamma\check{H}(\tau)}\big);\sup_{0\leqslant s\leqslant q}J(s)<b+\delta,\sup_{q\leqslant s\leqslant\tau}J(s)\in[b,b+\delta),\tau\geqslant q\Big\}\\ &=:I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Оценим каждое слагаемое. В силу (2.11), имеем

$$I_1\leqslant q\gamma\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J(s)<b+\delta\Big)\leqslant C_\delta q\gamma\delta.$$

Аналогично,

$$I_2\leqslant q\gamma\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J(s)<b+\delta\Big)\leqslant C_\delta q\gamma\delta.$$

В силу марковского свойства, для третьего слагаемого получаем

$$\begin{aligned}I_3=\int_q^\infty e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{b+\delta}&\mathbf{E}_b\Big\{\big(1-e^{-\gamma\check{H}(t)}\big);\sup_{0\leqslant s\leqslant q}J(s)<b+\delta,J(q)\in dy\Big\}\\ &\times\mathbf{P}_y\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t-q}J(s)\in[b,b+\delta)\Big)dt\\ &\leqslant 2\sup_{y\leqslant b+\delta}\mathbf{P}_y\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J(s)\in[b,b+\delta)\Big)\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant q}J(s)<b+\delta\Big).\end{aligned}$$

Поскольку

$$C_\delta \delta \geqslant \mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) < b+\delta\Big) \geqslant \int\limits_0^q e^{-\lambda t}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} J(s) < b+\delta\Big)dt$$

$$\geqslant \mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant q} J(s) < b+\delta\Big)\frac{1-e^{-\lambda q}}{\lambda},$$

и справедлива оценка (2.12), то $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}I_3 = 0$. В силу (3.4) и того, что пределы $\limsup\limits_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}I_k$, $k=1,2$ меньше любого наперед заданного числа $C_\delta\gamma q$, выполняется соотношение (3.3). Тем самым теорема доказана. □

Аналогично, используя (2.17), (2.18), можно доказать следующий результат.

Теорема 3.2. *При* $x\leqslant b$, $z\leqslant b$

$$\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \check{H}(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) < b, J(\tau) < z\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\gamma)H_b}; J(H_b) = b\Big\}\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) < b+\delta, J(\tau) < z\Big). \tag{3.5}$$

Для момента достижения минимального значения справедливы аналогичные результаты.

Теорема 3.3. *При* $a\leqslant x$

$$-\frac{d}{db}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \hat{H}(\tau)}; \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) > a\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\gamma)H_a}; J(H_a) = a\Big\}\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{P}_a\Big(\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) > a-\delta\Big). \tag{3.6}$$

Теорема 3.4. *При* $a\leqslant x$, $a\leqslant z$

$$-\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma \hat{H}(\tau)}; \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) > a, J(\tau) < z\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\gamma)H_a}; J(H_a) = a\Big\} \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_a\Big(\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J(s) > a-\delta, J(\tau) < z\Big). \tag{3.7}$$

4. Пример вычисления распределения момента достижения максимального значения. Явные формулы для распределений функционалов от диффузий со скачками удается получать лишь для узкого класса процессов. Рассмотрим процесс, являющийся суммой броуновского движения и сложного пуассоновского процесса.

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения. Положим

$$J^{\circ}(t) := W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad W(0) = x,$$

где $N(t)$, $t \geqslant 0$, – пуассоновский процесс с параметром λ_1, а Y_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса N.

Предполагается, что броуновское движение $W(t)$, $t \geqslant 0$, не зависит от процесса N и величин Y_k, $k = 1, 2, \dots$.

Этому процессу посвящено много работ. Интересные результаты о распределении супремума процесса J° получены Э. Мордецким [5]. Детальное изучение методов вычисления распределений функционалов от процессов с независимыми приращениями дано в монографии А. В. Скорохода [6].

Пусть плотность распределения величин Y_k, $k = 1, 2, \dots$, имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y_1 < y) = \frac{1}{2}\eta e^{-\eta|y|}, \qquad \eta > 0.$$

В этом случае $J^{\circ}(t)$ является симметричным случайным процессом ($-J^{\circ}(t)$ распределен так же как $J^{\circ}(t)$).

Вычисление распределения момента достижения максимального значения основано на лемме 3.1.

Пусть ρ_1, ρ_2 – корни уравнения

$$\frac{\eta^2}{(\eta^2-\rho^2)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-\rho^2)} = 1. \tag{4.1}$$

Тогда

$$\rho_1 = \sqrt{\lambda+\lambda_1+\frac{\eta^2}{2} - \Big(\Big(\lambda+\lambda_1+\frac{\eta^2}{2}\Big)^2 - 2\lambda\eta^2\Big)^{1/2}},$$

$$\rho_2 = \sqrt{\lambda + \lambda_1 + \frac{\eta^2}{2} + \left(\left(\lambda + \lambda_1 + \frac{\eta^2}{2}\right)^2 - 2\lambda\eta^2\right)^{1/2}},$$

и $0 < \rho_1 < \eta < \rho_2$.

В работе Мордецкого [5] (другой вывод см. [7]) получена следующая формула

$$\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) < b\Big) = 1 - \mathbf{P}_x(\tau \geqslant H_b) = 1 - \mathbf{E}e^{-\lambda H_b}$$

$$= 1 - \frac{(\eta-\rho_1)\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)\eta}e^{-(b-x)\rho_1} - \frac{(\rho_2-\eta)\rho_1}{(\rho_2-\rho_1)\eta}e^{-(b-x)\rho_2}. \tag{4.2}$$

Тогда при $\delta \downarrow 0$

$$\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) < b+\delta\Big) \sim \frac{(\eta-\rho_1)\rho_2\rho_1 + (\rho_2-\eta)\rho_1\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)\eta}\delta = \frac{\rho_1\rho_2}{\eta}\delta = \sqrt{2\lambda}\delta.$$

Пусть $\tilde\rho_1$, $\tilde\rho_2$ – корни уравнения

$$\frac{\eta^2}{(\eta^2-\tilde\rho^2)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\gamma+2\lambda_1-\tilde\rho^2)} = 1. \tag{4.3}$$

Выражение для этих корней такое же как и для корней уравнения (4.1) с заменой λ на $\lambda+\gamma$. При этом $0 < \tilde\rho_1 < \eta < \tilde\rho_2$.

Воспользуемся формулой (3.24) работы [4]. Перейдем в этой формуле к пределу при $a \to -\infty$, тогда получим

$$\mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\gamma)H_b}; J^\circ(H_b) = b\Big\}$$

$$= \frac{\eta-\tilde\rho_1}{\tilde\rho_2-\tilde\rho_1}e^{-(b-x)\tilde\rho_1} + \frac{\tilde\rho_2-\eta}{\tilde\rho_2-\tilde\rho_1}e^{-(b-x)\tilde\rho_2}. \tag{4.4}$$

Заметим, что переход к пределу при $a \to -\infty$ в формуле (3.29) работы [4] приводит к выражению

$$\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda H_b}; J^\circ(H_b) > b\Big\} = \frac{(\eta-\rho_1)(\rho_2-\eta)}{\eta(\rho_2-\rho_1)}\big(e^{-(b-x)\rho_1} - e^{-(b-x)\rho_2}\big).$$

Сложив эту формулу с формулой (4.4) при $\gamma = 0$, мы получим (4.2).

Согласно (3.1), имеем

$$\frac{d}{db}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma\check H(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) < b\Big\}$$

$$= \frac{\sqrt{2\lambda}(\eta - \tilde\rho_1)}{\tilde\rho_2 - \tilde\rho_1} e^{-(b-x)\tilde\rho_1} + \frac{\sqrt{2\lambda}(\tilde\rho_2 - \eta)}{\tilde\rho_2 - \tilde\rho_1} e^{-(b-x)\tilde\rho_2}. \tag{4.5}$$

Интегрируя по b из интервала (x, ∞), получаем

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma \check H(\tau)} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\tilde\rho_2 - \tilde\rho_1}\Big(\frac{\eta - \tilde\rho_1}{\tilde\rho_1} + \frac{\tilde\rho_2 - \eta}{\tilde\rho_2}\Big) = \frac{\sqrt{2\lambda}\eta}{\tilde\rho_1\tilde\rho_2} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda+\gamma}}.$$

Примечательно, что это выражение совпадает с соответствующим выражением для классического броуновского движения (см. [8], формулу 1.1.12.1).

В силу свойства симметрии процесса J°, имеем

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma \check H(\tau)} = \mathbf{E}_x e^{-\gamma \hat H(\tau)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda+\gamma}}. \tag{4.6}$$

Обращая соответствующие преобразования Лапласа по параметрам γ и λ, получаем

$$\mathbf{P}_x\big(\check H(\tau) \in dv\big) = \mathbf{P}_x\big(\hat H(\tau) \in dv\big) = \frac{\sqrt{\lambda}e^{-\lambda v}}{\sqrt{\pi v}} dv, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma \check H(t)} = \mathbf{E}_x e^{-\gamma \hat H(t)} = e^{-\gamma t/2} I_0\Big(\frac{\gamma t}{2}\Big), \tag{4.8}$$

и при $0 \leqslant v \leqslant t$

$$\mathbf{P}_x\big(\check H(t) < v\big) = \mathbf{P}_x\big(\hat H(t) < v\big) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{t-v}}\Big). \tag{4.9}$$

5. Пример вычисления распределения супремума процесса J° и момента его достижения, при фиксированном конце траектории. Рассмотрим сначала задачу о совместном распределении супремума процесса J° и конца его траектории. Все вычисляется только для момента времени τ. По сути рассматривается преобразование Лапласа с параметром λ по времени от соответствующих выражений для фиксированного момента времени t. Формулы обращения преобразования Лапласа по λ пока получить не удается.

Теорема 5.1. *Для J° совместная функция распределения максимума процесса и конца траектории задается формулой*

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) \leqslant b, J^\circ(\tau) < y\big)$$

$$
= \frac{\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_1} e^{-|x-y|\rho_1} + \frac{\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_2} e^{-|x-y|\rho_2}
$$

$$
-\frac{2\lambda(\rho_2-\eta)(\eta-\rho_1)}{(\rho_2^2-\rho_1^2)(\rho_2-\rho_1)}\Big(e^{-(b-y)\rho_2-(b-x)\rho_1}+e^{-(b-y)\rho_1-(b-x)\rho_2}\Big)
$$

$$
-\frac{\lambda(\eta-\rho_1)^2}{(\rho_2-\rho_1)^2\rho_1} e^{-(2b-x-y)\rho_1} - \frac{\lambda(\rho_2-\eta)^2}{(\rho_2-\rho_1)^2\rho_2} e^{-(2b-x-y)\rho_2}. \tag{5.1}
$$

Доказательство. Положим

$$
G_{b,y}(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{P}_x\big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s)\leqslant b, J^\circ(\tau)<y\big).
$$

Для вычисления этой величины воспользуемся теоремой 1.2, а точнее уравнением (2.19).

Нетрудно решить задачу (1.6)–(1.8) при $\sigma(x)\equiv 1$, $\mu(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$ и $a=-\infty$. В точке $a=-\infty$ налагается условие на ограниченность функции G.

Имеем

$$
G_{b,z}^{\lambda_1,\lambda}(x) = \frac{\lambda_1}{\varUpsilon}\big(e^{-|x-z|\varUpsilon} - e^{-(2b-x-z)\varUpsilon}\big),
$$

где $\varUpsilon := \sqrt{2\lambda+2\lambda_1}$.

Решение уравнения (2.19) ищем в виде

$$
G_{b,y}(x) = \sum_l A_l e^{-|y-x|q_l} - \sum_l B_l e^{-(b-x)q_l}, \tag{5.2}
$$

где A_l, B_l, q_l, – некоторые константы.

Нам понадобятся следующие вспомогательные формулы

$$
\int_{-\infty}^{b} e^{-|z-v|p} e^{-|v-y|q}\,dv = \frac{2}{p^2-q^2}\Big(pe^{-|z-y|q} - qe^{-|z-y|p}\Big)
$$

$$
-\frac{1}{p+q} e^{-(b-z)p-(b-y)q}, \tag{5.3}
$$

$$
\int_{-\infty}^{b} e^{-|z-v|p} e^{-(b-v)q}\,dv = \frac{2p}{p^2-q^2} e^{-(b-z)q} - \frac{1}{p-q} e^{-(b-z)p}. \tag{5.4}
$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{b} G_{b,x}^{\lambda_1,\lambda}(v)e^{-|y-v|p}\,dv = \frac{2\lambda_1}{2\lambda+2\lambda_1-p^2}\Big(e^{-|y-x|p} - \frac{p}{\Upsilon}e^{-|y-x|\Upsilon}$$

$$-\Big(e^{-(b-y)p} - \frac{p}{\Upsilon}e^{-(b-y)\Upsilon}\Big)e^{-(b-x)\Upsilon}\Big),$$

и

$$\int_{-\infty}^{b} G_{b,x}^{\lambda_1,\lambda}(v)e^{-(b-v)q}\,dv = \frac{2\lambda_1}{2\lambda+2\lambda_1-q^2}\Big(e^{-(b-x)q} - e^{-(b-x)\Upsilon}\Big).$$

Используя формулы (5.3), (5.4), можно получить, что

$$\mathbf{E}G_{b,y}(z+Y_1) = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{b} G_{b,y}(v)e^{-|z-v|\eta}\,dv$$

$$= \sum_l \frac{A_l\eta}{2}\Big[\frac{2}{\eta^2-q_l^2}\Big(\eta e^{-|y-z|q_l} - q_l e^{-|y-z|\eta}\Big) - \frac{e^{-(b-z)\eta}e^{-(b-y)q_l}}{\eta+q_l}\Big]$$

$$-\sum_l \frac{B_l\eta}{2}\Big[\frac{2\eta}{\eta^2-q_l^2}e^{-(b-z)q_l} - \frac{1}{\eta-q_l}e^{-(b-z)\eta}\Big].$$

Снова используя формулы (5.3), (5.4), получим

$$\int_{-\infty}^{b} G_{b,x}^{\lambda_1,\lambda}(v)\mathbf{E}G_{b,y}(z+Y_1)\,dv$$

$$= \sum_l \frac{A_l\eta^2 2\lambda_1}{(\eta^2-q_l^2)(2\lambda+2\lambda_1-q_l^2)}\Big(e^{-|y-x|q_l} - \frac{q_l}{\Upsilon}e^{-|y-x|\Upsilon}$$

$$-\Big(e^{-(b-y)q_l} - \frac{q_l}{\Upsilon}e^{-(b-y)\Upsilon}\Big)e^{-(b-x)\Upsilon}\Big)$$

$$-\sum_l \frac{A_l\eta q_l 2\lambda_1}{(\eta^2-q_l^2)(2\lambda+2\lambda_1-\eta^2)}\Big(e^{-|y-x|\eta} - \frac{\eta}{\Upsilon}e^{-|y-x|\Upsilon}$$

$$-\Big(e^{-(b-y)\eta} - \frac{\eta}{\Upsilon}e^{-(b-y)\Upsilon}\Big)e^{-(b-x)\Upsilon}\Big)$$

$$
-\sum_l \frac{A_l\eta\lambda_1}{(\eta+q_l)(2\lambda+2\lambda_1-\eta^2)} e^{-(b-y)q_l}\Big(e^{-(b-x)\eta}-e^{-(b-x)\Upsilon}\Big)
$$

$$
-\sum_l \frac{B_l\eta^2 2\lambda_1}{(\eta^2-q_l^2)(2\lambda+2\lambda_1-q_l^2)}\Big(e^{-(b-x)q_l}-e^{-(b-x)\Upsilon}\Big)
$$

$$
+\sum_l \frac{B_l\eta\lambda_1}{(\eta-q_l)(2\lambda+2\lambda_1-\eta^2)}\Big(e^{-(b-x)\eta}-e^{-(b-x)\Upsilon}\Big). \qquad (5.5)
$$

Согласно уравнению (2.19), это выражение нужно приравнять выражению

$$
\sum_l A_l e^{-|y-x|q_l}-\sum_l B_l e^{-(b-x)q_l}-\frac{\lambda}{\Upsilon}e^{-|x-y|\Upsilon}+\frac{\lambda}{\Upsilon}e^{-(2b-x-y)\Upsilon}. \qquad (5.6)
$$

Приравнивая в полученном равенстве коэффициенты при $e^{-|y-x|q_l}$, имеем

$$
A_l = A_l\frac{\eta^2}{(\eta^2-q_l^2)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-q_l^2)},
$$

а это влечет, что q_1 и q_2 являются неотрицательными решениями уравнения (4.1). Таких решений два: $q_1=\rho_1$, $q_2=\rho_2$. Такой выбор влечет и равенство коэффициентов при $e^{-(b-x)q_l}$.

Приравнивая коэффициенты при $e^{-|y-x|\eta}$, получаем

$$
A_1\frac{\rho_1}{(\eta^2-\rho_1^2)}+A_2\frac{\rho_2}{(\eta^2-\rho_2^2)}=0.
$$

В итоге, равенство двух выражений (5.5) и (5.6) преобразуется в равенство

$$
-\sum_{l=1}^{2} A_l\Big(\frac{\rho_l}{\Upsilon}e^{-|y-x|\Upsilon}+\Big(e^{-(b-y)\rho_l}-\frac{\rho_l}{\Upsilon}e^{-(b-y)\Upsilon}\Big)e^{-(b-x)\Upsilon}\Big)
$$

$$
-\sum_{l=1}^{2}\frac{A_l\eta\lambda_1}{(\eta+\rho_l)(2\lambda+2\lambda_1-\eta^2)}e^{-(b-y)\rho_l}\Big(e^{-(b-x)\eta}-e^{-(b-x)\Upsilon}\Big)
$$

$$
+\sum_{l=1}^{2}B_l e^{-(b-x)\Upsilon}+\sum_{l=1}^{2}\frac{B_l\eta\lambda_1}{(\eta-\rho_l)(2\lambda+2\lambda_1-\eta^2)}\Big(e^{-(b-x)\eta}-e^{-(b-x)\Upsilon}\Big)
$$

$$
=-\frac{\lambda}{\Upsilon}e^{-|x-y|\Upsilon}+\frac{\lambda}{\Upsilon}e^{-(2b-x-y)\Upsilon}. \qquad (5.7)
$$

Приравнивая коэффициенты при $e^{-|y-x|\Upsilon}$, получаем

$$A_1\rho_1 + A_2\rho_2 = \lambda.$$

Это позволяет вычислить коэффициенты A_1 и A_2:

$$A_1 = \frac{\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_1}, \qquad A_2 = \frac{\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{(\rho_2^2-\rho_1^2)\rho_2}.$$

Приравнивая в (5.7) коэффициенты при $e^{-(b-x)\eta}$, получаем

$$-\frac{A_1e^{-(b-y)\rho_1}}{\eta+\rho_1} - \frac{A_2e^{-(b-y)\rho_2}}{\eta+\rho_2} + \frac{B_1}{\eta-\rho_1} + \frac{B_2}{\eta-\rho_2} = 0.$$

Приравнивая в (5.7) оставшиеся коэффициенты при $e^{-(b-x)\Upsilon}$, получаем

$$-A_1e^{-(b-y)\rho_1} - A_2e^{-(b-y)\rho_2} + B_1 + B_2 = 0.$$

Решая полученную алгебраическую систему относительно неизвестных B_1 и B_2, имеем

$$B_1 = \frac{\lambda(\eta-\rho_1)^2}{(\rho_2-\rho_1)^2\rho_1}e^{-(b-y)\rho_1} + \frac{2\lambda(\rho_2-\eta)(\eta-\rho_1)}{(\rho_2^2-\rho_1^2)(\rho_2-\rho_1)}e^{-(b-y)\rho_2},$$

$$B_2 = \frac{2\lambda(\rho_2-\eta)(\eta-\rho_1)}{(\rho_2^2-\rho_1^2)(\rho_2-\rho_1)}e^{-(b-y)\rho_1} + \frac{\lambda(\rho_2-\eta)^2}{(\rho_2-\rho_1)^2\rho_2}e^{-(b-y)\rho_2}.$$

Подставляя вычисленные коэффициенты в (5.2), доказываем формулу (5.1). □

Согласно теореме 3.2,

$$\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma\check{H}(\tau)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) < b, J^\circ(\tau) < z\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\gamma)H_b}; J^\circ(H_b) = b\Big\}$$

$$\times \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) < b+\delta, J^\circ(\tau) < z\Big). \tag{5.8}$$

Из (5.1) при $\delta\downarrow 0$ следует, что

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s) < b+\delta, J^\circ(\tau) < z\Big)$$

$$\sim 2\lambda\Big(\frac{\eta-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}e^{-(b-z)\rho_1}+\frac{\rho_2-\eta}{\rho_2-\rho_1}e^{-(b-z)\rho_2}\Big)\delta.$$

В результате, с учетом формулы (4.4), имеем

$$\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma\check{H}(\tau)};\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J^\circ(s)<b,J^\circ(\tau)<z\Big\}$$

$$=2\lambda\Big[\frac{\eta-\tilde\rho_1}{\tilde\rho_2-\tilde\rho_1}e^{-(b-x)\tilde\rho_1}+\frac{\tilde\rho_2-\eta}{\tilde\rho_2-\tilde\rho_1}e^{-(b-x)\tilde\rho_2}\Big]$$
$$\times\Big[\frac{\eta-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}e^{-(b-z)\rho_1}+\frac{\rho_2-\eta}{\rho_2-\rho_1}e^{-(b-z)\rho_2}\Big]. \qquad (5.9)$$

При $x\leqslant z$ интегрируя выражение (5.9) по b в интервале $[z,\infty)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma\check{H}(\tau)};J^\circ(\tau)<z\Big\}$$

$$=\frac{2\lambda(\eta^2-\tilde\rho_1^2)}{(\tilde\rho_2-\tilde\rho_1)(\rho_2+\tilde\rho_1)(\tilde\rho_1+\rho_1)}e^{-(z-x)\tilde\rho_1}+\frac{2\lambda(\tilde\rho_2^2-\eta^2)}{(\tilde\rho_2-\tilde\rho_1)(\tilde\rho_2+\rho_1)(\tilde\rho_2+\rho_2)}e^{-(z-x)\tilde\rho_2}.$$

Дополним эту формулу выражением для $x\geqslant z$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma\check{H}(\tau)};J^\circ(\tau)<z\Big\}$$

$$=\frac{2\lambda(\eta^2-\rho_1^2)}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_1+\tilde\rho_2)(\tilde\rho_1+\rho_1)}e^{-(z-x)\rho_1}+\frac{2\lambda(\rho_2^2-\eta^2)}{(\rho_2-\rho_1)(\tilde\rho_1+\rho_2)(\tilde\rho_2+\rho_2)}e^{-(z-x)\rho_2}.$$

Литература

1. E. Csáki, A. Földes, P. Salminen, *On the joint distribution of the maximum and its location for a linear diffusion.* — Ann I. H. P. **23**, No. 2 (1987), 179–194.
2. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 15–36.
3. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от мостов скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 34–47.
4. А. Н. Бородин, *О моменте первого выхода из интервала для диффузий со скачками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **364** (2009), 70–88.
5. E. Mordecki, *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48**, No. 1 (2003), 188–194.
6. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*, М., Наука, 1964.
7. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от некоторых процессов с независимыми приращениями.* — Вестник СПбГУ. Сер. 1, No. 4 (2005), 7–20.

8. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*, Second edition, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin (2002).

Borodin A. N. Distributions of the location of the maximum and minimum for diffusions with jumps.

The paper deals with methods of computation of distributions of the location of the maximum and the location of the minimum for a diffusions with jumps. As an example explicit formulas for distributions of the location of the maximum of the process equal the sum of Brownian motion and compound Poisson process is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 30 октября 2009 г.