Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

С. Г. Бобков

# К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ В. Н. СУДАКОВА О ТИПИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – случайный вектор в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Будем рассматривать линейные функционалы

$$S_\theta = \theta_1 X_1 + \cdots + \theta_n X_n$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию $\theta_1^2 + \cdots + \theta_n^2 = 1$, и соответствующие им функции распределения

$$F_\theta(x) = \mathbf{P}\{S_\theta \leq x\}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Коэффициенты могут быть координатами произвольных векторов $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ на единичной сфере $S^{n-1}$.

В 1978 г. В. Н. Судаковым сделано следующее замечательное наблюдение [15]: если абсолютные моменты второго порядка случайных величин $S_\theta$ равномерно ограничены по $\theta$, и размерность $n$ велика, то $F_\theta$ концентрируются вокруг некоторого "типичного" распределения $F$. В качестве такого можно взять среднее

$$F(x) = \mathbf{E}_\theta\, F_\theta(x) = \int\limits_{S^{n-1}} F_\theta(x)\, d\sigma_{n-1}(\theta)$$

по равномерному распределению $\sigma_{n-1}$ на единичной сфере, а для оценки близости распределений на числовой прямой можно использовать, например, среднюю метрику (метрику Канторовича–Рубинштейна)

$$\kappa(F_\theta, F) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F_\theta(x) - F(x)|\, dx.$$

В наших обозначениях теорему В. Н. Судакова можно сформулировать так.

---

*Ключевые слова* : взвешенные суммы, типичные распределения, концентрация, степень приближения.

Работа поддержана грантом NSF DMS-0706866.

**Теорема 1.** *Для любого $\delta > 0$ можно указать натуральное число $n_\delta$ со следующим свойством. Предположим, что для случайного вектора $X$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ размерности $n \geq n_\delta$ выполнено условие*

$$\mathbf{E}\,|S_\theta|^2 \leq \lambda^2 \quad \forall\,\theta \in S^{n-1}$$

*с некоторым $\lambda \geq 0$. Тогда найдется измеримое подмножество $\Theta \subset S^{n-1}$ меры $\sigma_{n-1}(\Theta) \geq 1 - \delta$, такое что для всех его элементов*

$$\kappa(F_\theta, F) \leq \lambda\delta.$$

Типичное распределение $F$ можно охарактеризовать как распределение случайной величины $\xi\|X\|$, где $\|X\| = (X_1^2 + \cdots + X_n^2)^{1/2}$ – длина исходного случайного вектора в евклидовой метрике, а $\xi$ независима от $X$ и распределена так же, как первая координата единичного вектора на сфере по отношению к мере $\sigma_{n-1}$. Как хорошо известно, распределение случайной величины $\xi\sqrt{n}$ при больших $n$ близко к стандартному нормальному и, поэтому, $\xi\|X\|$ и $Z\|X\|/\sqrt{n}$ почти одинаково распределены, где $Z$ – независимая от $X$ стандартная нормальная случайная величина. Следовательно (что было подчеркнуто в [15]), в качестве типичного распределения можно также взять определенную смесь нормальных законов на прямой с нулевым средним.

Если при этом случайная величина $\|X\|/\sqrt{n}$ почти постоянна (то есть, выполняется своего рода слабый закон больших чисел для последовательности $X_i^2$), то можно сделать вывод, что "почти" все линейные функционалы $S_\theta$ почти нормально распределены. Такое заключение можно рассматривать как некоторый вариант центральной предельной теоремы без каких-либо существенных предположений о характере зависимости исходных случайных величин.

К настоящему времени появилось уже много работ, посвященных проблеме типичных распределений и в том числе уточнениям или обобщениям теоремы 1, а также ее различным вариациям; см., например, [1–3, 6, 8, 12–14, 16–17]. При этом ряд работ связан со сложными задачами из выпуклой геометрии. Здесь мы не делаем обзор полученных результатов, а отметим лишь следующее. По аналогии с задачами о скорости сходимости в центральной предельной теореме, одна из интереснейших тем – вопрос о степени концентрации $F_\theta$ вокруг типичного распределения $F$ в тех или иных вероятностных метриках. О степени концентрации может свидетельствовать, например, величина

$$\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) = \int\limits_{S^{n-1}} \kappa(F_\theta, F)\, d\sigma_{n-1}(\theta)$$

или аналогичное среднее расстояние для метрики Леви или Колмогорова. Интересен также вопрос о наиближайшем расстоянии $\inf_\theta \kappa(F_\theta, F)$.

В настоящей заметке доказывается следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Предположим, что для случайного вектора $X$ в $\mathbf{R}^n$ выполнено условие*

$$\mathbf{E}\, e^{|S_\theta|/\lambda} \le 2 \quad \forall\, \theta \in S^{n-1}$$

*с некоторым $\lambda > 0$. Тогда*

$$\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) \le C\lambda\, \frac{\log n}{\sqrt{n}},$$

*где $C$ – абсолютная постоянная.*

Используя свойство липшицевости функции $\theta \to \kappa(F_\theta, F)$, заключение теоремы может быть усилено в терминах больших уклонений.

**Следствие 1.** *В условиях теоремы 2 для всех $t > 0$*

$$\sigma_{n-1}\Big\{\kappa(F_\theta, F) \ge C\lambda\, \frac{\log n}{\sqrt{n}} + \lambda t\Big\} \le e^{-(n-1)\, t^2/2}.$$

Как будет видно из дальнейшего, более слабые моментные предположения относительно линейных функционалов $S_\theta$ тоже приводят к определенным, хотя и более слабым, асимптотическим оценкам для $\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F)$.

С другой стороны, при некоторых более сильных предположениях логарифмический член в утверждении теоремы 1 можно убрать. Именно, допустим $X$ имеет логарифмически вогнутую плотность, причем, все линейные функционалы $S_\theta$ удовлетворяют условиям

$$\mathbf{E} S_\theta = 0, \quad \mathbf{E}|S_\theta|^2 = 1,$$

что равносильно требованиям $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 = 1$, $\mathbf{E}X_iX_j = 0$ $(i \ne j)$. Заметим, что в таком случае условие $\mathbf{E}e^{|S_\theta|/C} \le 2$ выполняется автоматически в силу известной теоремы К. Борелля о логарифмически вогнутых мерах (см. [5, лемма 3.1]). Более того, как показано в [2, предложение 3.1], функции вида

$$u_x(\theta) = F_\theta(x) - F(x), \quad \theta \in S^{n-1},$$

являются липшицевыми на сфере, причем их липшицевы полунормы (в смысле расстояния, индуцированного из $\mathbf{R}^n$) допускают оценку

$$\|u_x\|_{\mathrm{Lip}} \le Ce^{-c|x|}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Используя свойство концентрации равномерного распределения на сфере, получаем

$$\int |u_x(\theta)|\, d\sigma_{n-1}(\theta) \le \frac{\|u_x\|_{\mathrm{Lip}}}{\sqrt{n}} \le \frac{Ce^{-c|x|}}{\sqrt{n}}$$

и после интегрирования по $x$ приходим к неравенству, которое вполне согласуется с известными результатами для независимых случайных величин:

$$\int\limits_{S^{n-1}} \kappa(F_\theta, F)\, d\sigma_{n-1}(\theta) \le \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

При этом, как и в следствии 1, при всех $t > 0$

$$\sigma_{n-1}\left\{\sqrt{n}\ \kappa(F_\theta, F) \ge t\right\} \le 2e^{-ct^2/2}$$

(латинскими буквами $C$, $c$ будем обозначать различные абсолютные положительные постоянные, которые могут меняться от места к месту).

Приведенное рассуждение существенно опирается на свойство логарифмической вогнутости распределения исходного случайного вектора. Чтобы охватить общий случай при моментных предположениях (хотя и с возможным ухудшением в оценках для степени концентрации), нам понадобится следующая известная лемма, которую можно получить, применяя изопериметрическую теорему и логарифмическое неравенство Соболева на сфере.

**Лемма 1.** *Для любой непрерывно дифференцируемой функции* $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *с нулевым средним по отношению к мере* $\sigma_{n-1}$

$$\int |u|\, d\sigma_{n-1} \le \frac{\pi}{\sqrt{2n}} \int |\nabla u|\, d\sigma_{n-1}.$$

*Более того, если* $\|u\|_{\mathrm{Lip}} \le 1$, *то для всех* $t > 0$,

$$\sigma_{n-1}\{u \ge t\} \le e^{-(n-1)\,t^2/2}.$$

Некоторые замечания относительно асимптотического поведения наилучшей постоянной в первом неравенстве (по размерности) и свойстве концентрации на сфере даны в конце настоящей заметки.

Сначала поясним, как будет применяться лемма 1. Для упрощения обозначений далее будем писать $\mathbf{E}_\theta\, u(\theta)$ вместо интеграла $\int u\, d\sigma_{n-1}$.

С любой непрерывно дифференцируемой функцией $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, имеющей ограниченную производную $f'$, свяжем функцию

$$u(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dF_\theta - \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dF = \mathbf{E} f(S_\theta) - \mathbf{E} f(S),$$

где $S$ – воображаемая случайная величина с функцией распределения $F$. Тогда $\mathbf{E}_\theta\, u = 0$, и как непосредственно вытекает из определения случайных величин $S_\theta$,

$$\langle \nabla u(\theta), \theta' \rangle = \mathbf{E}\, S_{\theta'}\, f'(S_\theta)$$

для любых единичных векторов $\theta$ и $\theta'$. Если есть моментное предположение типа

$$(\mathbf{E}\, |S_\theta|^p)^{1/p} \le M_p \quad \forall\, \theta \in S^{n-1}$$

с некоторым фиксированным $p > 1$ и конечной постоянной $M_p$, то в силу неравенства Гельдера,

$$|\langle \nabla u(\theta), \theta' \rangle| \,\le\, M_p\, (\mathbf{E}\, |f'(S_\theta)|^q)^{1/q}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

В виду произвольности $\theta'$, имеем

$$|\nabla u(\theta)| \,\le\, M_p\, (\mathbf{E}\, |f'(S_\theta)|^q)^{1/q}.$$

Интегрируя это неравенство по сфере и применяя лемму 1 (а также неравенство Маркова), приходим к оценке

$$\mathbf{E}_\theta \bigg| \int_{-\infty}^{+\infty} f\, d(F_\theta - F) \bigg| \le \frac{3M_p}{\sqrt{n}} \bigg( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'|^q\, dF \bigg)^{1/q}.$$

Можно теперь проинтегрировать по частям с тем, чтобы переписать первый интеграл в терминах производной $f'$. Тогда получим

$$\mathbf{E}_\theta \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,(F_\theta(x) - F(x))\,dx \right| \le \frac{3M_p}{\sqrt{n}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'|^q\,dF \right)^{1/q}.$$

Здесь $f'$ может быть любой в классе всех ограниченных непрерывных функций на числовой прямой. Приближая такими функциями произвольную ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию, получаем следующее утверждение как предварительный шаг в доказательстве теоремы 2.

**Лемма 3.** *Предположим, что для случайного вектора $X$ в $\mathbf{R}^n$ выполнено условие*

$$(\mathbf{E}\,|S_\theta|^p)^{1/p} \le M_p \quad \forall\,\theta \in S^{n-1}$$

*с некоторой постоянной $M_p$, где $p > 1$ – фиксировано. Тогда для любой ограниченной измеримой функции $f$ на вещественной прямой*

$$\mathbf{E}_\theta \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(F_\theta(x) - F(x))\,dx \right| \le \frac{3M_p}{\sqrt{n}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^q\,dF(x) \right)^{1/q},$$

*где $q = \frac{p}{p-1}$ – сопряженная степень.*

В частности, для любых вещественных $a < b$ получаем оценку

$$\mathbf{E}_\theta \left| \int_a^b (F_\theta(x) - F(x))\,dx \right| \le \frac{3M_p}{\sqrt{n}}\,(F(b) - F(a))^{1/q}.$$

Выражение в левой части этого неравенства напоминает среднее расстояние Канторовича–Рубинштейна $\mathbf{E}_\theta\,\kappa(F_\theta, F)$, и оно действительно стало бы таким, если бы было возможным занести знак модуля под знак интеграла. Для достижения этой цели (хотя и с некоторыми потерями) полезным будет одно наблюдение.

**Лемма 4.** *Пусть $F$ и $G$ – произвольные функции распределения. Для любых $a < b$ и любого натурального числа $N$*

$$\int_a^b |F(x) - G(x)|\,dx \le \sum_{k=1}^N \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} (F(x) - G(x))\,dx \right| + \frac{2(b-a)}{N},$$

где $a_k = a + (b - a)\frac{k}{N}$.

**Доказательство.** Обозначим через $I$ совокупность таких индексов $k = 1, \dots, N$, что в $k$-ом интервале $\Delta_k = (a_{k-1}, a_k)$ функция $\varphi(x) = F(x) - G(x)$ не меняет знак. Остальные индексы образуют некоторое подмножество $J \subset \{1, \dots, N\}$. Тогда для всех $k \in I$

$$\int\limits_{\Delta_k} |F(x) - G(x)|\, dx = \left| \int\limits_{\Delta_k} (F(x) - G(x))\, dx \right|.$$

Если же $k \in J$, то, очевидно,

$$\sup_{x \in \Delta_k} |\varphi(x)| \le \sup_{x,y \in \Delta_k} (\varphi(x) - \varphi(y)) \le F(\Delta_k) + G(\Delta_k),$$

причем, на последнем шаге $F$ и $G$ рассматриваются как вероятностные меры. В этом случае

$$\int\limits_{\Delta_k} |F(x) - G(x)|\, dx \le (F(\Delta_k) + G(\Delta_k))|\Delta_k|, \quad |\Delta_k| = \frac{b-a}{N}.$$

Комбинируя обе оценки, заключаем, что интеграл $\int\limits_a^b |F(x) - G(x)|\, dx$ не превосходит

$$\sum_{k \in I} \left| \int\limits_{\Delta_k} (F(x) - G(x))\, dx \right| + \sum_{k \in J} (F(\Delta_k) + G(\Delta_k))|\Delta_k|$$
$$\le \sum_{k=1}^{N} \left| \int\limits_{\Delta_k} (F(x) - G(x))\, dx \right| + \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^{N} (F(\Delta_k) + G(\Delta_k)).$$

Лемма доказана.

Лемма 4 может быть использована в условиях леммы 3 для оценивания расстояния Канторовича–Рубинштейна. Пусть для определенности $M_p = 1$, что не умаляет общности в виду однородности $\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F)$ по $X$. Применяя лемму 3 с теми же интервалами $\Delta_k = (a_{k-1}, a_k)$, получаем

$$\mathbf{E}_\theta \left| \int\limits_{\Delta_k} (F_\theta(x) - F(x))\, dx \right| \le \frac{3}{\sqrt{n}}\, F(\Delta_k)^{1/q},$$

и, следовательно, по лемме 4

$$\mathbf{E}_\theta \int\limits_a^b |F_\theta(x) - F(x)|\,dx \le \frac{2(b-a)}{N} + \frac{3}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^N F(\Delta_k)^{1/q}.$$

В силу неравенства Гельдера, последняя сумма не превосходит

$$N^{1/p} \left( \sum_{k=1}^N F(\Delta_k) \right)^{1/q} \le N^{1/p},$$

и мы приходим к оценке

$$\mathbf{E}_\theta \int\limits_a^b |F_\theta(x) - F(x)|\,dx \le \frac{2(b-a)}{N} + \frac{3N^{1/p}}{\sqrt{n}}.$$

В частности, полагая $a = -b$, $b > 0$, имеем

$$\mathbf{E}_\theta \int\limits_{-b}^b |F_\theta(x) - F(x)|\,dx \le \frac{4b}{N} + \frac{3N^{1/p}}{\sqrt{n}}.$$

Чтобы распространить интеграл на всю числовую прямую, воспользуемся предположением $M_p = 1$, которое по неравенству Чебышева дает оценку $F_\theta\{x : |x| \ge t\} \le t^{-p}$ при $t > 0$ и аналогично для $F$ после усреднения по $\theta$. Отсюда

$$\int\limits_{\{|x| \ge b\}} |F_\theta(x) - F(x)|\,dx \le \int\limits_{\{|x| \ge b\}} |x|^{-p}\,dx = \frac{2b^{1-p}}{p-1}.$$

Комбинируя обе оценки, получаем неравенство

$$\mathbf{E}_\theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F_\theta(x) - F(x)|\,dx \le \frac{2b^{1-p}}{p-1} + \frac{4b}{N} + \frac{3N^{1/p}}{\sqrt{n}},$$

справедливое при всех вещественных $b > 0$ и всех натуральных $N$. Нетрудно проверить, что правая часть неравенства минимизируется на значении $b = (\frac{N}{2})^{1/p}$ и при этом

$$\frac{2b^{1-p}}{p-1} + \frac{4b}{N} = \frac{4N^{(1-p)/p}}{2^{1/p}\,(p-1)} + \frac{4N^{(1-p)/p}}{2^{1/p}} = q\,2^{1+1/q}\,N^{-1/q}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) \le q\, 2^{1+1/q}\, N^{-1/q} + \frac{3N^{1/p}}{\sqrt{n}}.$$

Теперь нужно оптимизировать правую часть полученного неравенства по всем натуральным $N$. Рассмотрим функцию вещественной переменной $x > 0$

$$\psi(x) = \alpha x^{-1/q} + \beta x^{1/p}, \quad \alpha = q\, 2^{1+1/q}, \quad \beta = \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

Точкой минимума $\psi$ является

$$x_0 = \frac{\alpha}{\beta}\, \frac{p}{q} = \frac{1}{3}\, 2^{1+1/q}\, p\sqrt{n}.$$

Заметим, что $x_0 > \frac{2}{3}\sqrt{n} > \frac{2}{3}$. Поэтому, полагая $N = [x_0] + 1$, имеем $x_0 < N \le 2x_0$. Для этого значения

$$\psi(N) \le \alpha\, x_0^{-1/q} + \beta\, (2x_0)^{1/p} = C_p\, n^{-1/(2q)},$$

где

$$C_p = 2^{\frac{1}{p}(1+\frac{1}{q})} \left[ q \left(\frac{3}{p}\right)^{1/q} + 3 \left(\frac{2p}{3}\right)^{1/p} \right].$$

Чтобы заменить это выражение более простым, воспользуемся очевидными оценками

$$\frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p}\left(2 - \frac{1}{p}\right) \le 1 \quad \text{и} \quad 3\left(\frac{2p}{3}\right)^{1/p} \le 3\, e^{2/(3e)} < 4.$$

Нетрудно убедиться, что $(\frac{3}{p})^{1/q} < 2$. Следовательно, $C_p < 2\,(2q + 4) < 12\,q$, и, таким образом,

$$\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) \le 12\, q\, n^{-1/(2q)}.$$

В итоге приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.** *Предположим, что для случайного вектора $X$ в $\mathbf{R}^n$ выполнено условие*

$$(\mathbf{E}\,|S_\theta|^p)^{1/p} \le M_p \quad \forall\,\theta \in S^{n-1}$$

*с некоторой постоянной $M_p$, где $p > 1$ – фиксировано. Тогда*

$$\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) \le 12\, M_p\, \frac{p}{p-1}\, n^{-\frac{p-1}{2p}}.$$

Например, при $p = 2$ получаем, что $\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) \le 24\, M_2\, n^{-1/4}$. Как следствие, для любого $\delta > 0$

$$\sigma_{n-1}\left\{\theta \in S^{n-1} : \kappa(F_\theta, F) \ge M_2 \delta\right\} \le \frac{24\, n^{-1/4}}{\delta}.$$

Выражение в правой части не превосходит $\delta$ как только $n \ge 24^4/\delta^8$.

**Следствие 2.** *В теореме* 1 *можно положить* $n_\delta = [\,24^4\, \delta^{-8}] + 1$.

Остается сделать последний шаг для вывода теоремы 2.

**Доказательство теоремы 2.** Можно положить $\lambda = 1$. В этом случае, применяя элементарное неравенство $t^p \le p^p e^{-p}\, e^t$, справедливое при всех $t \ge 0$ и $p > 1$, имеем

$$\mathbf{E}\,|S_\theta|^p \le p^p\, e^{-p}\, \mathbf{E}\, e^{|S_\theta|} \le 2\, p^p\, e^{-p},$$

так что $M_p < 2p/e$. В силу теоремы 3,

$$\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) \le 12\, \frac{2p}{e}\, \frac{p}{p-1}\, \; n^{\frac{1}{2p}}\, \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Положим $p = 1 + \frac{1}{2}\log n$ $(n \ge 2)$. Тогда $n^{\frac{1}{2p}} < e$, и становится очевидным, что коэффициент перед $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ограничен выражением $C \log n$ с некоторой абсолютной постоянной $C$. Теорема 2 доказана.

**Доказательство следствия 1.** Как и в доказательстве теоремы 2, пусть $\lambda = 1$. Достаточно проверить, что функция

$$u(\theta) = \kappa(F_\theta, F) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_\theta(x) - F(x)|\, dx$$

имеет ограниченную липшицеву полунорму на единичной сфере. Согласно теореме Канторовича–Рубинштейна (см., например, [7, с. 330]), имеет место представление

$$u(\theta) = \sup \Big[ \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dF_\theta - \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dF \Big] = \sup\, [\mathbf{E}\, f(S_\theta) - \mathbf{E}\, f(S)],$$

где $S$ – случайная величина, имеющая распределение $F$, причем супремум берется по всем функциям $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с липшицевой полунормой $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$. Отсюда

$$u(\theta) - u(\theta') \,\leq\, \sup\, \big[\mathbf{E}\, f(S_\theta) - \mathbf{E}\, f(S_{\theta'})\big]$$

для любой пары единичных векторов $\theta, \theta'$. Но

$$|\mathbf{E}\, f(S_\theta) - \mathbf{E}\, f(S_{\theta'})| \leq \mathbf{E}\, |S_\theta - S_{\theta'}| = \mathbf{E}\, |\langle X, \theta - \theta'\rangle| \leq M_1\, \|\theta - \theta'\|,$$

где $M_1 = \sup\limits_{\theta \in S^{n-1}} \mathbf{E}\, |S_\theta|$. Следовательно, $\|u\|_{\mathrm{Lip}} \leq M_1$. По условию теоремы $\mathbf{E}\, e^{|S_\theta|} \leq 2$, поэтому $\mathbf{E}\, |S_\theta| \leq e^{-1}\ \mathbf{E}\, e^{|S_\theta|} < 1$. Таким образом, $\|u\|_{\mathrm{Lip}} < 1$.

Остается применить второе неравенство из леммы 1 к функции $u - \mathbf{E}_\theta u$ и воспользоваться оценкой для $\mathbf{E}_\theta u$ в соответствии с теоремой 2.

**Замечания.** 1) Если в теореме 2 предполагать, что линейные функционалы $S_\theta$ субгауссовские равномерно по $\theta$, то есть, $\mathbf{E}\, e^{S_\theta^2/\lambda^2} \leq 2$, то утверждение может быть усилено до

$$\mathbf{E}_\theta\, \kappa(F_\theta, F) \leq C\lambda\, \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство – то же самое с той лишь разницей, что теорема 3 должна применяться с параметром $p$ порядка $\sqrt{\log n}$.

2) Как следует из теоремы 3, условие $(\mathbf{E}\, |S_\theta|^2)^{1/2} \leq \lambda$ в теореме 1 может быть ослаблено до $(\mathbf{E}\, |S_\theta|^p)^{1/p} \leq \lambda$ при любом фиксированном $p > 1$. Однако, не ясно, достаточно ли предполагать ограниченность первых абсолютных моментов, то есть, $\mathbf{E}\, |S_\theta| \leq \lambda$. Главным аргументом против утверждения теоремы 1 в таком общем случае служит тот факт, что семейство всех вероятностных распределений на числовой прямой с ограниченным абсолютным моментом перестает быть компактным в метрике Канторовича–Рубинштейна (будучи компактным в топологии слабой сходимости). Поэтому, вполне естественно рассматривать задачу о степени концентрации вокруг типичного распределения в других стандартных метриках, отвечающим за слабую сходимость. Например, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть случайный вектор $X$ в $\mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию $\mathbf{E}\,|S_\theta| \le \lambda$ при всех $\theta \in S^{n-1}$ с некоторой постоянной $\lambda$. Тогда*

$$\mathbf{E}_\theta\, L(F_\theta, F) \le \, C_\lambda\, \frac{\log n}{n^{1/4}},$$

*где $C_\lambda$ зависит от $\lambda$.*

Здесь $L(F_\theta, F)$ – расстояние Леви, определяемое как минимально возможное значение $h \in [0,1]$, при котором для всех $x \in \mathbf{R}$

$$F(x-h) - h \le F_\theta(x) \le F(x+h) + h.$$

**Доказательство.** Воспользуемся неравенством Золотарева [18]

$$L(F_\theta, F) \le \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{|f_\theta(t) - f(t)|}{t}\, dt + 2e\, \frac{\log T}{T}, \quad T > 1.3,$$

связывающим расстояние Леви между распределениями $F_\theta$ и $F$ с их характеристическими функциями

$$f_\theta(t) = \mathbf{E} e^{itS_\theta}, \quad f(t) = \mathbf{E} e^{itS} = \mathbf{E}_\theta f_\theta(t).$$

Здесь $S$ – случайная величина, распределенная согласно $F$ (такое соотношение справедливо для любой пары вероятностных распределений на прямой).

При любом фиксированном $t > 0$ (комплекснозначная) функция

$$u_t(\theta) = f_\theta(t) - f(t) = \mathbf{E}\,(e^{itS_\theta} - e^{itS}), \quad \theta \in \mathbf{R}^n,$$

определена и непрерывно дифференцируема на всем пространстве, причем $\langle \nabla u_t(\theta), \theta' \rangle = it\, \mathbf{E}\, S_{\theta'}\, e^{itS_\theta}$ для любых единичных векторов $\theta$ и $\theta'$. Отсюда

$$|\langle \nabla u_t(\theta), \theta' \rangle| \le t\, \mathbf{E}\, |S_{\theta'}| \le \lambda t,$$

и, в силу произвольности $\theta'$, $|\nabla u_t(\theta)| \le \lambda t$ на всей единичной сфере. Таким образом, $u_t$ липшицева и, кроме того, $\|u_t\|_{\rm Lip} \le \lambda t$. Применяя изопериметрическую теорему на сфере, получаем

$$\mathbf{E}_\theta\, |f_\theta(t) - f(t)| = \mathbf{E}_\theta |u_t| \le \frac{2\|u_t\|_{\rm Lip}}{\sqrt{n}} \le \frac{2\lambda t}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, усредняя неравенство Золотарева по $\theta$, имеем

$$\mathbf{E}_\theta\, L(F_\theta, F) \le \frac{2\lambda T}{\pi\sqrt{n}} + 2e\,\frac{\log T}{T}$$

при всех $T > 1.3$. Остается оптимизоровать правую часть по $T$ (достаточно взять $T$ порядка $n^{1/4}$).

**Замечания к лемме 1.** Как следует из общей теории неравенств типа Соболева (см., например, [10, 4]), наилучшая постоянная в неравенстве

$$c_n\, \mathbf{E}_\theta\, |u - \mathbf{E}_\theta u| \le \mathbf{E}_\theta |\nabla u|$$

достигается в асимптотическом смысле на индикаторных функциях $u = 1_A$ измеримых подмножеств $A \subset S^{n-1}$. Для таких функций рассматриваемое интегро-дифференциальное неравенство превращается в неравенство изопериметрического типа

$$\sigma_{n-1}^+(A) \ge 2c_n\, t(1-t), \quad t = \sigma_{n-1}(A),$$

где

$$\sigma_{n-1}^+(A) = \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\, \left[\frac{1}{\varepsilon}\,\sigma_{n-1}\left\{w \in S^{n-1} \setminus A : \exists v \in A,\ |v - w| < \varepsilon\right\}\right]$$

обозначает периметр $A$ в смысле меры $\sigma_{n-1}$. Минимизируя по $A$, получаем эквивалентное соотношение

$$I(t) \ge 2c_n\, t(1-t), \quad 0 < t < 1,$$

в терминах изопериметрической функции $I(t) = \inf\{\sigma_{n-1}^+(A) : \sigma_{n-1}(A) = t\}$, откуда

$$c_n = \inf_{0<t<1} \frac{I(t)}{2t(1-t)}.$$

Эта формула сохраняет силу в довольно абстрактной ситуации, а именно – для произвольных метрических пространств.

В случае сферы, согласно изопериметрической теореме Леви–Шмидта, при любом фиксированном $t \in (0,1)$ периметр $\sigma_{n-1}^+(A)$ в классе множеств с фиксированной мерой $\sigma_{n-1}(A) = t$ минимизируется на шарах сферы, и, следовательно, можно получить явное аналитическое описание соответствующей изопериметрической функции $I(t)$. Более того, известно, что функция $t(1-t)/I(t)$ вогнута (см. [4, теорема 1.9]), откуда сразу вытекает, что $c_n = 2I(1/2)$. Так как $I(1/2)$ – периметр полусферы, у которой граница представляет собой сферу размерности $n-2$, и учитывая, что $(n-1)$-мерная площадь сферы $S^{n-1}$ описывается формулой $s_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, заключаем, что

$$c_n = \frac{2s_{n-2}}{s_{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

В частности, $c_2 = 2/\pi$. Нетрудно видеть, применяя формулу Стирлинга, что $c_n\sqrt{n} \to \sqrt{2/\pi}$ при $n \to \infty$. Поэтому, наилучшая (безразмерная) константа в неравенстве вида

$$\mathbf{E}_\theta\,|u - \mathbf{E}_\theta u| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\,\mathbf{E}_\theta|\nabla u|$$

не меньше, чем $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Как показывает несложный (хотя и рутинный) анализ формулы для $c_n$, величина $c_n/\sqrt{n}$ минимальна при $n = 2$, что соответствует оптимальному значению $C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Если дополнительно известно, что $|\nabla u(\theta)| \le 1$, то есть, $\|u\|_{\mathrm{Lip}} \le 1$, то по лемме 1

$$\mathbf{E}_\theta\,|u - \mathbf{E}_\theta\,u| \le \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Здесь, однако, константа $C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ не оптимальна, и можно положить $C = 1$. Действительно, по теореме Леви–Шмидта распределение любой липшицевой функции $u$ относительно меры $\sigma_{n-1}$ представляет собой образ распределения функции $u_1(\theta) = \theta_1$ относительно той же меры при действии некоторого неубывающего отображения $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с липшицевой полунормой $\|\Psi\|_{\mathrm{Lip}} \le 1$. Отсюда легко заключить, что для дисперсий в смысле меры $\sigma_{n-1}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(u) &= \frac{1}{2}\iint |\Psi(u_1(\theta)) - \Psi(u_1(\theta'))|^2\,d\sigma_{n-1}(\theta)\,d\sigma_{n-1}(\theta')\\ &\le \frac{1}{2}\iint |u_1(\theta) - u_1(\theta')|^2\,d\sigma_{n-1}(\theta)\,d\sigma_{n-1}(\theta') = \mathrm{Var}\,(u_1) = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{E}_\theta\,|u - \mathbf{E}_\theta u| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$. Это неравенство использовалось в замечании о логарифмически вогнутых вероятностных распределениях, а также в доказательстве теоремы 4 (с удвоенной константой ввиду комплекснозначности функции $u$).

Изопериметрическая теорема позволяет также оценивать $\sigma_{n-1}$-меру для больших уклонений. В частности, при том же предположении $\|u\|_{\mathrm{Lip}} \le 1$ для всех $t > 0$ имеем

$$\sigma_{n-1}\{u - m(u) \ge t\} \le \sigma_{n-1}\{u_1 \ge t\},$$

где $m(u)$ – медиана (или одна из медиан) для $u$ в смысле $\sigma_{n-1}$. Правая часть этого неравенства оценивается выражением $e^{-(n-1)\,t^2/2}$, как и в лемме 1. Однако, чтобы без потерь перейти от медианы к математическому ожиданию, лучше воспользоваться логарифмическим неравенством Соболева

$$\mathbf{E}_\theta\, u^2 \log u^2 - \mathbf{E}_\theta\, u^2\, \log\, \mathbf{E}_\theta\, u^2 \le 2C_n\, \mathbf{E}_\theta |\nabla u|^2,$$

в котором предполагается, что $u$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Хорошо известно (см., например, [9]), что для функций с $\|u\|_{\mathrm{Lip}} \le 1$ такое интегро-дифференциальное неравенство гарантирует субгауссовость хвостов соответствующих распределений, а именно, имеет место оценка

$$\sigma_{n-1}\{u - \mathbf{E}_\theta\, u \ge t\} \le e^{-t^2/2C_n}, \quad t > 0.$$

Наконец, как установлено в [11], наилучшей константой в логарифмическом неравенстве Соболева для меры $\sigma_{n-1}$ является значение $C_n = 1/(n-1)$.

## Литература


1. M. Antilla, K. Ball, I. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies.* — Trans. Amer. Math. Soc. **355**, No. 12 (2003), 4723–4735.
2. S. G. Bobkov, *On concentration of distributions of random weighted sums.* — Ann. Probab. **31**, No. 1 (2003), 195–215.
3. S. G. Bobkov, *Concentration of distributions of the weighted sums with Bernoullian coefficients.* — Geometric Aspects of Functional Analysis, 27–36, Lect. Notes Math. **1807**, Springer, Berlin (2003).
4. S. G. Bobkov, C. Houdré, *Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities.* — Mem. Amer. Math. Soc. **129**, No. 616 (1997), viii+111 pp.

5. C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces.* — Ark. Mat. **12** (1974), 239–252.
6. P. Diaconis, D. Freedman. *Asymptotics of graphical projection pursuit.* — Ann. Stat. **12**, No. 3 (1984), 793–815.
7. R. M. Dudley, *Real analysis and probability.* The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Pacific Grove, CA, 1989.
8. B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets.* — Invent. Math. **168**, No. 1 (2007), 91–131.
9. M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities.* — Séminaire de Probabilités, XXXIII, 120–216, Lect. Notes Math. **1709**, Springer, Berlin, 1999.
10. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
11. C. E. Mueller, F. B. Weissler, *Hypercontractivity for the heat semigroup for ultraspherical polynomials and on the n-sphere.* — J. Funct. Anal. **48**, No. 2 (1982), 252–283.
12. С. В. Нагаев, *О распределениях линейных функционалов в конечномерных пространствах высокой размерности.* — Докл. Акад. Наук СССР **263**, No. 2 (1982), 295–296.
13. S. Sodin, *Tail-sensitive Gaussian asymptotics for marginals of concentrated measures in high dimension.* — Geometric Aspects of functional analysis, 271–295, Lect. Notes Math. **1910**, Springer, Berlin, 2007.
14. А. В. Судаков, В. Н. Судаков, *Эмпирические распределения и равномерные по размерности оценки разброса в задаче о типичных распределениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 258–262.
15. В. Н. Судаков, *Типичные распределения линейных функционалов на пространствах высокой размерности.* — Докл. Акад. Наук СССР **243**, No. 6 (1978), 1402–1405.
16. В. Н. Судаков, *О распределениях случайно выбранных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **165** (1994), 153–160.
17. H. von Weizsäcker, *Sudakov's typical marginals, random linear functionals and a conditional central limit theorem.* — Probab. Theory Rel. Fields **107** (1997), 313–324.
18. В. М. Золотарев, *Оценки близости распределений в метрике Леви.* — Труды МИАН СССР **112** (1971), 224–231.

Bobkov S. G. On a theorem of V. N. Sudakov on typical distributions.

The rate of approximation with respect to the Kantorovich-Rubinstein distance is considered in a theorem of V. N. Sudakov on typical distributions is considered.

School of Mathematics
University of Minnesota
127 Vincent Hall, 206 Church St.S.E.
Minneapolis, MN 55455 USA
*E-mail*: bobko001@umn.edu

Поступило 20 сентября 2009 г.