Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 368, 2009 г.

Я. И. Белопольская

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

1. Введение

В этой работе мы рассмотрим вероятностный подход к решению нелинейных параболических уравнений, возникающих в финансовой математике при рассмотрении неидеальных рынков [1–4], т. е. рынков, на которых нужно учитывать наличие трансакционных издержек и неликвидности. Рассматриваемый здесь вероятностный подход основан на сведении задачи Коши для нелинейного параболического уравнения к некоторой стохастической задаче. Решая стохастическую задачу, мы конструируем одновременно и решение соответствующей параболической задачи, по крайней мере при некоторых дополнительных условиях.

Рассматриваемый ниже подход возник в работах Г. Маккина и М. Фрейдлина [5–7] и был развит в работах Ю. Л. Далецкого и Я. И. Белопольской [8, 9]. Этот подход основан на изучении диффузионных процессов, подчиняющихся стохастическим уравнениям с коэффициентами, зависящими от распределений этих процессов.

Хорошо известно, что решение $u(t,s), t \in [0,T], s \in R^1$, задачи Коши для линейного скалярного параболического уравнения

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t,s)u_{ss} + a(t,s)u_s = 0, \quad u(T,s) = \Phi(s), \tag{1.1}$$

может быть построено следующим образом. Рассмотрим стохастическое уравнение

$$dS(\theta) = a(\theta, S(\theta))d\theta + \sigma(\theta, S(\theta))dw(\theta), \quad S(t) = s, \tag{1.2}$$

Ключевые слова : стохастические уравнения, диффузионные процессы, нелинейные параболические уравнения и системы, цены производных ценных бумаг, трансакционные издержки, неликвидность.

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс и обозначим $S_{t,s}(\theta)$ его решение. Тогда функция

$$u(t,s) = E[\Phi(S_{t,s}(T))] \tag{1.3}$$

при определенных условиях гладкости коэффициентов $a(t,s), \sigma(t,s)$ и функции $\Phi(s)$ удовлетворяет задаче Коши (1.1).

Рассмотрим теперь задачу Коши для семилинейного скалярного параболического уравнения

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t,s,u(t,s))u_{ss} + a(t,s,u(t,s))u_s = 0, \quad u(T,s) = \Phi(s). \tag{1.4}$$

Как показано в упомянутых выше работах, решение задачи Коши (1.4) можно свести к решению стохастической задачи, описываемой системой уравнений

$$dS(\theta) = a(\theta, S(\theta), u(\theta, S(\theta)))d\theta + \sigma(\theta, S(\theta), u(\theta, S(\theta)))dw(\theta),$$
$$S(t) = s, \tag{1.5}$$
$$u(t,s) = E_{t,s}[\Phi(S(T))], \quad 0 \leqslant t \leqslant \theta \leqslant T. \tag{1.6}$$

Поскольку уравнение (1.6) представляет собой нелинейное функциональное уравнение, то при определенных условиях на параметры задачи (1.4) решение уравнения в частных производных сводится к решению нелинейного функционального уравнения (1.6), а соответствующее СДУ (1.5) при этом используется для получения априорных оценок.

Этот подход был обобщен на случай нелинейных параболических уравнений и систем в работах [10, 11]. При этом наряду с задачей Коши

$$v_t + F(t,s,v,v_s,v_{ss}) = 0, \quad v(T,s) = \Phi(s), \tag{1.7}$$

рассматривается ее дифференциальное продолжение и строятся вероятностные представления, аналогичные (1.6), не только для функции v, но и для ее производных v_s, v_{ss} и v_{sss}. При этом решение задачи (1.7) сводится к решению соответствующего функционального уравнения относительно вектор-функции $V = (v, v_s, v_{ss}, v_{sss})$.

Далее статья организована следующим образом. В параграфе 2 мы показываем как при учете трансакционных издержек и неликвидности возникают нелинейные параболические уравнения, описывающие безарбитражные цены производных ценных бумаг. Параграфы 3 и 4 посвящены построению решения задачи Коши для семилинейных и нелинейных параболических уравнений и систем и, в частности, уравнений, выведенных в параграфе 2.

2. Нелинейные параболические уравнения для цен опционов

Рынок производных ценных бумаг является одним из наиболее быстро растущих и наиболее динамичных сегментов современных финансовых рынков. Он дополняет рынок базовых финансовых инструментов и его функционирование создает новые возможности для перераспределения риска среди участников рынка. При этом сами производные могут приводить к возникновению дополнительных рисков, связанных, например, с риском дефолта партнера или с риском увеличения нестабильности рынка.

В рамках концепции идеального рынка предполагается, что все участники рынка действуют рационально и обладают одинаковой информацией, т.е. рынок информационно эффективен. При этом торговля финансовыми инструментами не связана с трансакционными издержками. Как следствие, рынок безарбитражен – невозможно получить безрисковый доход, одновременно покупая финансовый актив дешево и продавая его дорого. Более того, на идеальном рынке любое платежное обязательство можно хеджировать с помощью базовых активов и других платежных обязательств. В рамках этой концепции рынок производных ценных бумаг не влияет на текущие цены базовых активов. Наоборот, цены производных ценных бумаг могут быть явно получены как функции цен базовых активов.

Однако реальные финансовые рынки обладают трением, возникающим за счет трансакционных издержек, ограничений на объем торгуемых активов, неликвидности и т.д. При этом возникает обратная связь между ценами производных ценных бумаг на финансовом рынке и текущими ценами базовых активов.

Учет неликвидности активов или наличия трансакционных издержек как возникновения обратной связи в современных моделях финансовых рынков приводит к нелинейным уравнениям в частных производных, описывающим безарбитражные цены производных ценных бумаг или, эквивалентно, стоимость соответствующих хеджирующих портфелей. Как следствие, такое хеджирование приводит к нестабильности рынка.

Для того, чтобы проиллюстрировать эти механизмы, рассмотрим рынок, на котором присутствует d рисковых активов, называемых акциями, цены которых обозначим $S_j(\theta), j = 1, \ldots, d$, а также один безрисковый актив, называемый банковским счетом, цену которого (размер счета) обозначим $B(\theta)$.

Пусть динамика $B(\theta)$ задана с помощью линейного ОДУ

$$dB(\theta) = rB(\theta)d\theta, \quad B(t) = 1, \tag{2.1}$$

где безрисковая процентная ставка r – это заданная неслучайная константа.

Введем необходимые обозначения. Обозначим $C^k(R^d)$ пространство ограниченных скалярных дважды дифференцируемых функций, заданных на d-мерном евклидовом пространстве R^d, $C^{1,2}([0,T] \times R^d, R^{d_1}) = \mathbf{C}^{1,2}$ – пространство векторных функций $\phi(t,s)$, дифференцируемых по $t \in [0,T]$ и дважды дифференцируемых по $s \in R^d$ и $C^{1,2}([0,T] \times R^d, R^1) = C^{1,2}$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, d – натуральное число, и $w(t) \in R^d$ – стандартный P-винеровский процесс. P-динамику цен $S_j(t)d$ базовых активов зададим системой линейных СДУ

$$dS_j(t) = S_j(t)[\mu_j dt + \sigma_j \cdot dw(t)], \tag{2.2}$$

где $\mu_j \in R$, $\sigma_j \in R^d, j = 1, \ldots, d$, и $x \cdot y = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k y_k$ – скалярное произведение в R^d.

Пусть на рынке действуют большие трэйдеры и их стратегия непосредственно влияет на цены активов. Точнее говоря, пусть при заданном параметре ликвидности $\rho = (\rho_{jk})_{j,k=1}^d$ и заданном семимартингале $\gamma(\tau) \in R^d$, представляющем стратегию торговли соответствующего трэйдера, динамика цен базовых активов имеет вид

$$dB(\tau) = rB(\tau)d\tau, \quad B(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T, \tag{2.3}$$

$$dS(\tau) = S(\tau)[\mu d\tau + \sigma \cdot dw(\tau) + \rho \cdot d\gamma(\tau)],$$

$$S(t) = s \in R^d, \tag{2.4}$$

где $\gamma(\tau)$ обладает стохастическим дифференциалом вида

$$d\gamma(\tau) = \eta(\tau)d\tau + \zeta(\tau)dw(\tau),$$

и $s\mu$ обозначает вектор $(s\mu)_k = s_k\mu_k$, $k = 1, \ldots, d$. В координатном представлении уравнение (2.4) имеет вид

$$dS_k(\tau) = S_k(\tau)[[\mu_k + \sum_{j=1}^{d} \rho_{kj}\eta_j]d\tau$$
$$+ \sum_{j=1}^{d}[\sigma_{kj} + \sum_{l=1}^{d} \rho_{kl}\zeta_{lj}]dw_j(\tau)], \quad S_k(t) = s_k.$$

Экономическая интерпретация такого подхода состоит в следующем. Если большой трэйдер покупает (продает) $\gamma_k(\tau)$ акций k-го типа ($|\Delta\gamma_k(\tau)| > 0$), цена акций этого типа возрастает (падает) на величину $S_k(\tau)\sum_{j=1}^{d}\rho_{kj}\cdot\Delta\gamma_j(\tau)$. Степень воздействия стратегии на цены акций может зависеть от матрицы ρ.

Ниже мы будем обозначать цены базовых активов, возникшие в результате деятельности большого инвестора, использующего стратегию γ, символом S^γ и будем предполагать, что $\gamma(t) = \phi(t, S(t))$, где $\phi(t, s)$ – гладкая функция.

Пусть $\mathcal{X} = \Phi(S^\gamma(T))$ – некоторое платежное обязательство. Для вывода уравнения, описывающего его безарбитражную цену, рассмотрим самофинансируемый портфель $\gamma(t)$, состоящий из $h_S(t)$ акций и производной ценной бумаги. Капитал $V(\tau) = h_S(\tau)\cdot S^\gamma(\tau) + F(\tau, S^\gamma(\tau))$ этого портфеля имеет стохастический дифференциал вида

$$dV(\tau) = h_S(\tau)\cdot dS^\gamma(\tau) + dF(\tau, S^\gamma(\tau)).$$

Нам будет удобно выразить динамику капитала $V(\tau)$ в терминах относительного портфеля

$$u_S = \frac{h_S S^\gamma}{V}, \quad u_F = \frac{F}{V},$$

что приведет к соотношению

$$dV = V\left[u_S\frac{dS^\gamma}{S^\gamma} + u_F\frac{dF}{V}\right].$$

Подберем u_S, u_F так, чтобы портфель стал безрисковым, т.е. чтобы динамика его капитала имела вид

$$dV(\tau) = k(\tau)V(\tau)d\tau,$$

и выберем $k(\tau) = r$, что гарантирует его безарбитражность. Воспользуемся далее соотношением (2.4) и формулой Ито, чтобы переписать выражение для dV в виде

$$dV(\tau) = V(\tau)\Big\{u_S\cdot[[\mu+\rho\eta]d\tau + [\sigma+\rho\zeta]dw(\tau)] + u_F\cdot[\alpha_F d\tau + \sigma_F\cdot dw(\tau)]\Big\}, \quad (2.5)$$

где

$$\alpha_F = \frac{F_\tau + S^\gamma[\mu + \rho\eta] \cdot \nabla F + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} S^\gamma[\sigma + \rho\zeta]^* \nabla^2 u S^\gamma[\sigma + \rho\zeta]}{F},$$
$$\sigma_F = \frac{S^\gamma[\sigma + \rho\zeta]\nabla F}{F}.$$

Для того, чтобы портфель стал безрисковым, нужно чтобы имело место равенство

$$u_F\sigma_F + u_S[\sigma + \rho\zeta] = 0,$$

из которого с использованием соотношения $u_S + u_F = 1$ можно вывести, что

$$u_S = -\frac{\sigma_F}{\sigma + \rho\zeta - \sigma_F} = -\frac{S^\gamma \nabla F}{F - S^\gamma \cdot \nabla F},$$
$$u_F = \frac{\sigma + \rho\zeta}{\sigma + \rho\zeta - \sigma_F} = \frac{F}{F - S^\gamma \cdot \nabla F}. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.5) и используя условие безарбитражности, мы получим равенство

$$-\frac{\sigma_F}{\sigma + \rho\zeta - \sigma_F}[\mu + \rho \operatorname{Tr} \zeta^* \zeta] + \frac{\sigma_S}{\sigma + \rho\zeta - \sigma_F}\alpha_F = r. \tag{2.7}$$

Наконец из (2.7), используя выражения для α_F, σ_F, после несложных алгебраических преобразований мы получим уравнение

$$F_t + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(s(\sigma + \rho\zeta))^* \nabla^2 F s(\sigma + \rho\zeta) + rs\nabla F - rF = 0. \tag{2.8}$$

Для того, чтобы получить замкнутое уравнение для цены $F(t, s)$ платежного обязательства $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$, рассмотрим относительный портфель (u_0, u_S), состоящий из банковского счета и базовых активов, $u_0(\tau) + u_S(\tau) = 1$ для любого $\tau \in [t, T]$, и реплицирующий $\mathcal{X}$. Капитал $V(\tau)$ этого портфеля удовлетворяет уравнению

$$dV(\tau) = V(\tau)[u_0(\tau)r + u_S(\tau)[\mu + \rho\eta]d\tau + V(\tau)u_S(\tau)[\sigma + \rho\zeta] \cdot dw(\tau).$$

Если капитал портфеля $V(\tau) = F(\tau, S(\tau))$, то в силу формулы Ито, мы имеем

$$dV(\tau) = dF(\tau, S^\gamma(\tau)) = F\alpha_F d\tau + FS^\gamma \frac{[\sigma + \rho\zeta]\nabla F}{F} dw(\tau).$$

Сопоставляя полученные выражения для dV, мы видим, что $u_S(t) = \frac{S^\gamma(t)\nabla F(t,S^\gamma(t))}{F(t,S^\gamma(t))}$ и, следовательно, $h_S(t) = \nabla F(t, S^\gamma(t))$. При этом процесс $h_S(t)$ имеет стохастический дифференциал вида

$$dh_S(\tau) = \eta(\tau)d\tau + \zeta(\tau)dw(\tau),$$

где

$$\zeta = S^\gamma(\sigma + \rho\zeta)\nabla^2 F,$$

откуда

$$\zeta = [I - S^\gamma\rho\zeta]^{-1}S^\gamma\sigma.$$

Мы не приводим здесь громоздкое выражение для $\eta(t)$, поскольку, как видно из (2.8), оно не влияет на справедливую цену $F(t,s)$ платежного обязательства $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$.

В результате уравнение для $F(t,s)$ приобретает вид

$$F_t + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q(s)^*\nabla^2 F Q(s) + rs\nabla F - rF = 0, \tag{2.9}$$

где $Q(s) = s(\sigma + \rho(I - s\rho\zeta)^{-1}s\sigma$, и для отыскания справедливой цены нужно решить задачу Коши для уравнения (2.9) с условием

$$F(T,s) = \Phi(s). \tag{2.10}$$

Таким образом мы показали, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть динамика рынка задается системой уравнений* (2.1), (2.2) *и контрактная функция* $\Phi \in C^2(R^d)$. *Тогда справедливая цена* $F(t,s)$ T*-платежного обязательства* $\mathcal{X} = \Phi(S^\gamma(T))$ *удовлетворяет задаче Коши* (2.9), (2.10).

Замечание. При $\rho = 0$ уравнение (2.9) переходит в стандартное (многомерное) уравнение Блэка–Шоулса

$$u_t + \frac{1}{2}s_i\sigma_{ik}\nabla_i\nabla_j u s_j\sigma_{jk} + rs_k\nabla_k u - ru = 0.$$

Здесь и ниже мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам, если не оговорено обратное.

При $d = 1$ уравнение (2.9) сводится к уравнению

$$u_t + \frac{s^2\sigma^2}{2}\frac{u_{ss}}{(1-\rho s u_{ss})^2} + rsu_s - ru = 0, \tag{2.11}$$

рассмотренному в работах [1–3].

Таким образом, на рынке, на котором присутствует большой трэйдер, стратегия которого может повлиять на динамику цен базовых активов, справедливые цены производных ценных бумаг описываются нелинейным параболическим уравнением.

Покажем, что при учете трансакционных издержек справедливые цены производных ценных бумаг также описываются некоторым нелинейным параболическим уравнением.

Пусть динамика рынка задается уравнениями (2.1) и

$$dS_j(\tau) = S_j(\tau)[\mu_j d\tau + \sigma_j \cdot dw(\tau)], \quad S_j(t) = s_j, \tag{2.12}$$

причем суммирование по j не подразумевается.

Пусть $\gamma(t)$ – самофинансируемый портфель, состоящий из d базовых активов и рассматриваемой производной ценой бумаги, цена которой $u(t,s)$. Если γ – семимартингал, то $[\gamma]_t$ обозначает его квадратичную характеристику. В частности, если $\gamma(t) = \phi(\tau, S(\tau))$, где $\phi(t,s)$ – функция, дважды дифференцируемая по s, то $[\gamma]_t = \int\limits_0^t \|\sigma S(\tau)[\nabla\phi(\tau, S(\tau))\|^2 d\tau$.

Динамика капитала такого портфеля без учета трансакционных издержек имеет вид

$$dV(\tau) = \gamma(\tau) \cdot dS(\tau). \tag{2.13}$$

Для учета трансакционных издержек предположим, что капитал $V(t)$ рассматриваемого портфеля обладает динамикой вида

$$\begin{aligned} dV(\tau) &= \gamma(\tau) \cdot dS(\tau) + dF(\tau, S(\tau)) - \rho \cdot S(\tau) d[\gamma]_\tau \\ &= rV(\tau)d\tau + \sum_k S_k(\tau)\gamma_k(\tau)[\mu_k - r]d\tau \\ &+ \sum_k \gamma_k(\tau)S_k(\tau)\sigma_k \cdot dw(\tau) + dF(\tau, S(\tau)) - \rho \cdot S(\tau) d[\gamma]_\tau. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что для того, чтобы портфель стал безрисковым, нужно обеспечить равенство

$$\gamma(\tau) = \nabla F(\tau, S(\tau)) = \phi(\tau, S(\tau)) \quad \text{п.в.}$$

При этом $d[\gamma]_\tau = \|S(t)\sigma\nabla^2 F(\tau, S(\tau))\|^2 d\tau$.

Пусть $F(\tau, s) \in R^1$ – функция, класса $C^{1,2}$ и $V(t) = F(t, s)$. В силу формулы Ито

$$\begin{aligned} dF(\tau, S(\tau)) &= \sum_k \nabla_k F(\tau, S(\tau)) S_k(\tau)\sigma_k \cdot dw(\tau) \\ &+ [F_\tau(\tau, S(\tau)) + r\sum_k \nabla_k F(\tau, S(\tau)) S_k(\tau) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k,j,l=1}^{d} \sigma_{kl} S_k(\tau) F_{s_k s_j}(\tau, S(\tau))\sigma_{jl} S_j(\tau)]d\tau. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Покажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть динамика рынка задается уравнениями* (2.1), (2.12) *и контрактная функция* Φ *принадлежит пространству* $C^2(R^d)$. *Тогда справедливая цена* $\Pi(t, \mathcal{X})$ *платежного обязательства* $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$, *определяемая как стоимость* $V(t) = \gamma(t)S(t)$ *хеджирующего портфеля* $\gamma(t)$ *с учетом трансакционных издержек, задается функцией* $F(t, s)$, *удовлетворяющей уравнению*

$$F_t + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[s\sigma + \rho\nabla^2 F]^*\nabla^2 F[s\sigma + \rho\nabla^2 F]] + rs \cdot \nabla F - rF = 0 \tag{2.16}$$

и условию

$$F(T, s) = \Phi(s). \tag{2.17}$$

При этом $\gamma(t) = \nabla u(t, S(t))$.

Доказательство. В модели рынка, описанной в теореме 2.2, предполагается, что динамика базовых активов носит классический характер, а учет трансакционных издержек происходит в процессе торговли при определении рыночной цены хеджирующего самофинансируемого портфеля с учетом трансакционных издержек.

Как и при доказательстве теоремы 2.1 введем в рассмотрение относительный портфель u_S, u_F и обозначим $\sigma_F = \frac{s\sigma\nabla F}{F}$. Выбрав

$u_S = \frac{\sigma_F}{\sigma - \sigma_F}, u_F = -\frac{\sigma_F}{\sigma - \sigma_F}$, мы получим

$$\begin{aligned} dV(\tau) &= V(\tau)u_S(\tau)\cdot \mu S(\tau)d\tau \\ &\quad + V(\tau)\Big[u_F(\tau)\big[F_\tau + \mu S(\tau)\nabla F + \frac{1}{2}S(\tau)\sigma\nabla^2 F\sigma S(\tau)\big] \\ &\quad - \rho S(\tau)\|\sigma S(\tau)\nabla^2 F(\tau, S(\tau))\|^2\Big]d\tau. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Подставляя в (2.18) выражения для u_S, u_F и σ_F, мы получим замкнутое уравнение относительно F:

$$F_t + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[s(\sigma[I + \rho\nabla^2 F]]^*\nabla^2 F[s\sigma[I + \rho\nabla^2 F]] + rs\cdot\nabla F - rF = 0.$$

В результате мы доказали, что безарбитражная цена $F(t,s)$ производной ценной бумаги с платежным обязательством $\mathcal{X} = \Phi(S(T))$ может быть найдена как решение задачи Коши (2.16), (2.17).

Таким образом мы видим, что учет неликвидности и трансакционных издержек приводит к необходимости решать задачу Коши для существенно нелинейных параболических уравнений.

3. Диффузионные процессы, ассоциированные с нелинейными уравнениями и системами

В этом параграфе мы построим решение задачи Коши для семилинейных параболических уравнений и систем, редуцировав решение этой задачи к решению соответствующих стохастических задач.

Введем необходимые обозначения. Пусть $L(R^d)$ – множество всех $d\times d$ вещественных матриц. Обозначим $\|x\| = (\sum\limits_{k=1}^{d}|x_k|)^{\frac{1}{2}}$ норму в R^d и для $A\in L(R^d)$ пусть $|A| = (\sum\limits_{j,k=1}^{d}A_{jk}^2)^{\frac{1}{2}}$ обозначает норму в пространстве $L(R^d)$.

Рассмотрим задачу Коши для семилинейного параболического уравнения

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t} + a(t,s,f)\cdot\nabla f + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}A^*(t,s,f)f''A(t,s,f) = 0, \\ f(T,s) = f_0(s). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $a(t,s,f) \in R^d$, $A(t,s,f) \in L(R^d)$, $x \in R^d$, $f \in R^1$, $\operatorname{Tr} A^* f'' A = A_{ki}\nabla_i \nabla_j f A_{jk}$.

В дальнейшем мы используем символы C, K, L для обозначения абсолютных констант (если константа зависит от некоторого параметра f, то мы будем писать C_f, K_f).

Будем говорить, что выполнено условие **C3.1**, если существуют константы $C_0, C_1, L_{f,f_1}, K_0, K_1$ такие, что

$$\|a(t,s,f)\|^2 \leqslant C_0 + C_1|f|^{2m}, \qquad \sigma^2(A(t,s,f))\| \leqslant C_0 + C_1|f|^{2m},$$

$$\|a(t,s,f) - a(t,s_1,f_1)\|^2 + |A(t,s,f) - A(t,s,f_1)|^2 \\ \leqslant L\|s - s_1\|^2 + L_{(f,f_1)}|f - f_1|^2.$$

Здесь m – натуральное число, $f, f_1 \in R^1$, $|A| = \sum\limits_{k=1}^{d} \|Ae_k\|^2$, $\{e_k\}_{k=1}^d$ – ортонормированный базис в R^d, $L_{(f,f_1)}$ зависит от максимума sup-норм функций $f(x)$ и $f_1(x)$ и

$$\sup_s |f_0(s)| \leqslant K_0, \quad \sup_s \|\nabla f_0(s)\| \leqslant K_0^1.$$

В дальнейшем мы будем обозначать $\|f\|_\infty = \sup_s |f(s)|$.

Для того, чтобы построить решение задачи Коши (3.1), рассмотрим стохастическую систему вида

$$dS(\tau) = a(\tau, S(\tau), f(\tau, S(\tau)))d\tau + A(\tau, S(\tau), \\ f(\tau, S(\tau)))dw(\tau), \quad S(t) = s, \tag{3.2}$$

$$f(t,s) = E[f_0(S_{t,s}(T))]. \tag{3.3}$$

Система соотношений (3.2), (3.3) замкнута и, как показано в [8], при выполнении условий **C3.1** ее решение можно построить с помощью метода последовательных приближений.

При этом справедливо следующее утверждение

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* **C3.1**. *Тогда существует такой интервал* $[\tau, T]$, *зависящий от функции* f_0 *и коэффициентов уравнения, что для всех* $\theta \in [\tau, T]$ *существует единственное решение системы* (3.2), (3.3).

Доказательство этой теоремы основано на том, что, как уже упоминалось во введении, (3.3) представляет собой нелинейное функциональное уравнение вида

$$f(t,s) = \Psi(t,s,f), \tag{3.4}$$

где $\Psi(t,s,\cdot)$ – отображение, действующее в пространстве $B = C([0,T]\times R^d)$ непрерывных ограниченных вещественных функций, заданных на $[0,T]\times R^d$. Если доказать, что Ψ – это сжимающее отображение, то из теоремы о сжимающих отображениях будет вытекать существование и единственность решения f уравнения (3.4), а следовательно и (3.3). Далее, если показать, что решение $f(t,s)$ уравнения (3.3) удовлетворяет условию Липшица, то из классических результатов теории СДУ будет следовать существование и единственность решения (3.2).

Вернемся теперь к задаче Коши (3.1). Если мы сможем доказать, что (возможно, при некоторых дополнительных условиях) построенная выше функция $f(t,s)$ обладает нужным запасом гладкости, то, применяя стандартную технику, можно показать, что $f(t,s)$ является классическим решением задачи Коши (3.1).

Действительно, пусть $f(t)\in C^2$. Тогда, поскольку, в силу классических результатов теории стохастических дифференциальных уравнений, решение $S_{t,s}(\theta)$ уравнения (3.2) – марковский процесс, то он порождает пару эволюционных семейств $U(t,T)$ и $V(T,t)$, действующих в пространстве $M(R^d)$ измеримых ограниченных функций следующим образом

$$U(t,T)f(s) = \int\limits_{R^d} f(y)P(t,s,T,dy),$$

$$V(T,t)\nu(dy) = \int\limits_{R^d} P(t,s,T,dy)\nu(ds).$$

Сужение генератора этого марковского процесса и генератора соответствующего эволюционного семейства $U^f(t,T)\phi(s) = E\phi(S^f_{t,s}(T))$ на пространство C^2-гладких функций имеет вид

$$\mathcal{A}^f(t)\phi(s) = \big\langle a(t,s,f(t,s)),\nabla\phi\big\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A^*(t,s,f(t,s))\nabla^2\phi A(t,s,f(t,s)). \quad (3.5)$$

При этом функция $f(t,s) = U^f(t,T)f_0(s) = E[f_0(S^f_{t,s}(T))]$ удовлетворяет задаче Коши (3.1).

Сформулируем условия на коэффициенты и начальные данные в (3.1), которые гарантируют требуемую гладкость функции $f(t,s)$, определенной системой (3.2), (3.3).

Мы будем говорить, что выполнено условие **C3.2**, если выполнено условие **C 3.1**, коэффициенты $a^v(t,s) = a(t,s,v(t,s)) \in R^d, A^v(t,s) = A(t,s,v(t,s)) \in L(R^d)$ непрерывны по t и дважды дифференцируемы по s и, кроме того, функция $v(t) \in C^2$.

Если условие **C3.2** выполнено, то можно доказать, что процесс $S_{t,s}(\theta)$, удовлетворяющий СДУ

$$dS(\theta) = a^v(\theta, S(\theta))d\theta + A^v(\theta, S(\theta))dw(\theta), \quad S(t) = s,$$

дважды дифференцируем по начальным данным, и случайные процессы $\eta(\theta) = \nabla S_{t,s}(\theta)$, $\kappa(\theta) = \nabla^2 S_{t,s}(\theta)$ определены в среднем квадратичном.

При этом процесс $\eta(\theta)$ удовлетворяет линейному СДУ

$$d\eta(\theta) = [D_s a + D_v a \nabla v]\eta(\theta)d\theta + [D_s A + D_v A \nabla v]\eta(\theta)dw(\theta), \qquad \eta(t) = I, \quad (3.6)$$

коэффициенты которого зависят от процесса $S_{t,s}(\theta)$.

Если дополнить систему соотношений (3.2), (3.3), (3.6) соотношением

$$f_1(t,s) = \nabla f(t,s) = E[\langle \nabla f_0(S_{t,s}(T)), \eta(T)\rangle], \quad (3.7)$$

то мы получим снова замкнутую систему соотношений. Далее, если задать процесс $\kappa(\theta)$ как решение СДУ

$$\begin{aligned} d\kappa = {} & [\nabla a + D_v a \nabla v]\kappa d\theta + [\nabla A + D_v A \nabla v]\kappa dw(\theta) + [\nabla^2 a(\eta,\eta) \\ & + 2D_v \nabla a(\nabla v, \eta, \eta) + D_v a \nabla^2 v(\eta,\eta)]d\theta + [\nabla^2 A(\eta,\eta) \\ & + 2D_v \nabla A(\nabla v, \eta, \eta) + D_v A \nabla^2 v(\eta,\eta)]dw(\theta), \quad \kappa(t) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

а функцию $f_2(t,s)$ соотношением

$$f_2(t,s) = E[\nabla^2 f_0(S_{t,s}(T))(\eta(T), \eta(T)) + \nabla f_0(S_{t,s}(T))\kappa(T)], \quad (3.9)$$

то и система (3.2), (3.3), (3.6)–(3.9) также будет представлять собой замкнутую систему.

В работе [9] было доказано, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* **C3.2**. *Тогда существует такой интервал* $[\tau_1, T]$, *что для всех* $t \in [\tau_1, T]$ *существует единственное классическое решение задачи Коши* (3.1).

Рассмотрим далее систему СДУ, ассоциированную с решением задачи Коши для системы семилинейных уравнений вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial u^m}{\partial t} + a_j(s, u(t,s))\frac{\partial u^m}{\partial s_j} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(s, u(t,s))u^m_{ss}A(s, u(t,s)) \\ +B^m_{jq}(s, u(t,s))\frac{\partial u^q}{\partial s_j} + c^m_q(s, u(t,s))u^q + G^m = 0, \\ u^m(T,s) = u^m_0(s). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь $m = 1, \dots d_1$, функции $a(s,v) \in R^d$, $A(s,v) \in L(R^d)$ определены так же как и в предыдущем параграфе и, кроме того, заданы функции $c(s,v) \in L(R^{d_1})$, $C(s,v) \in L(R^d, L(R^{d_1})), s \in R^d, v \in R^{d_1}$, где $L(X,Y)$ – пространство ограниченных линейных отображений, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y и $G(t,s,v) \in R^{d_1}, t \in [0,T]$.

Обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в R^{d_1} и сохраним обозначение $\|v\|_\infty$ для sup-нормы векторной функции.

Мы будем говорить, что выполнено условие **C3.3**, если выполнено условие **C3.1** и справедливы неравенства

$$\begin{gathered} 2\langle c(s,v)h, h\rangle \leqslant [\rho_0 + \rho\|v\|^2]\|h\|^2, \qquad |C(s,v)h| \leqslant \rho[1 + \|v\|^2]\|h\|^2, \\ 2\langle [c(s,v) - c(s,v_1)]h, h\rangle + |[C(s,v) - C(s,v_1)]h|^2 \\ \leqslant K(r)\|v - v_1\|^2]\|h\|^2 \end{gathered}$$

где $\rho, K(r), K_v(t), L_v(t) > 0$ и ρ_0 – константы, $r = \max(\|v\|, \|v_1\|)$, а функция $v(t,s)$ подчиняется оценкам

$$\|v(t)\|_\infty \leqslant K_v(t) < \infty, \quad \|v(t,s) - v(t,s_1)\| \leqslant L_v(t)\|s - s_1\|.$$

Далее будем говорить, что выполнено условие **C3.4**, если выполнено условие **C3.2** и коэффициенты $c^v(t,s) = c(s, v(t,s)) \in L(R^{d_1}), C^v(t,s) = C(s, v(t,s)) \in L(R^d, L(R^{d_1}))$ непрерывны по t и дважды дифференцируемы по s и, кроме того, функция $v(t) \in \mathbf{C}^2$.

Наша цель – свести решение задачи Коши к решению некоторой стохастической задачи, а затем сформулировать условия, при которых решение этой стохастической задачи определяет классическое решение задачи Коши (3.10).

Предположим вначале, что $G \equiv 0$ и рассмотрим систему СДУ

$$dS = a(S(\theta), u(\theta, S(\theta)))d\theta + A(S(\theta), u(\theta, S(\theta)))dw(\theta),\ S(t) = s, \tag{3.11}$$

$$d\eta(\theta) = c(S(\theta), u(\theta, S(\theta)))\eta(\theta)d\theta + C(S(\theta), u(\theta, S(\theta)))(\eta(\theta), dw(\theta)),$$

$$\eta(t) = h, \tag{3.12}$$

$$\langle h, u(t,s)\rangle = E\langle \eta_{t,h}(T), u_0(S_{t,s}(T)\rangle. \tag{3.13}$$

Как и выше мы будем искать решение замкнутой системы (3.11)–(3.13) с помощью метода последовательных приближений.

Пусть

$$u^0(t,s) = u_0(s), \quad S^0(\theta) = s, \tag{3.14}$$

$$dS^k(\theta) = a(S^k(\theta), u^k(\theta, S^k(\theta)))d\theta + A(S^k(\theta), u^k(\theta, S^k(\theta)))dw(\theta), \tag{3.15}$$

$$d\eta^k(\theta) = c(S^k(\theta), u^k(S^k(\theta))\eta^k(\theta)d\theta + C(S^k(\theta), u^k(\theta, S^k(\theta)))$$

$$(\eta^k(\theta), dw(\theta)), \tag{3.16}$$

$$S^k(t) = s, \quad \eta^k(t) = h,$$

$$\langle h, u^{k+1}(t,s)\rangle = E\langle \eta^k_{t,h}(T), u_0(S^k_{t,s}(T))\rangle. \tag{3.17}$$

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Арцелла–Асколи, нужно доказать равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность семейства векторнозначных функций $u^k(s,x)$.

Для доказательства равномерной ограниченности семейства $u^k(t,s)$ или, эквивалентно, равномерной по s ограниченности функции $n^k(t,z) = \langle h, u^k(t,s)\rangle$ на множестве $\|h\| = 1$ нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Рассмотрим случайные процессы $S_{t,s}(\tau), \eta_{t,h}(\tau)$, удовлетворяющие СДУ

$$dS(\tau) = a^v(S(\tau))d\tau + A^v(S(\tau))dw, \quad S(t) = s, \tag{3.18}$$

$$d\eta(\tau) = c^v(S(\tau))\eta(\tau)d\tau + C^v(S(\tau))(\eta(\tau), dw), \quad \eta(t) = h, \tag{3.19}$$

и функцию

$$\langle h, g(t,s)\rangle = E\langle \eta_{t,h}(T), u_0(S_{t,s}(T))\rangle \tag{3.20}$$

Обозначим $\mathcal{N}$ множество вида $\mathcal{N} = \{n : n(T,z) = \langle h, g(T,s)\rangle\}$, где $g \in C_b([0,T]\times R^d, R^{d_1})$ – липшицевы ограниченные функции, $z = (s,h)$.

Нетрудно показать, что соотношение (3.20) порождает отображение Θ, действующее в $\mathcal{N}$ по правилу

$$[\Theta n_0](t,z) = n(t,z) = \langle h, g(t,s)\rangle = E\langle \eta_{t,h}(T), u_0(S_{t,s}(T))\rangle,$$
$$n_0(z) = \langle h, u_0(s)\rangle.$$

Ниже нам понадобится ряд свойств решения линейного уравнения (3.19).

Лемма 3.3. *Пусть выполняется условие* **C3.3**. *Тогда процесс* $\eta(t)$, *удовлетворяющий* (3.19), *допускает представление* $\eta(\theta) = Z(\theta,t)h$, *где*

$$Z(\theta,t)h = \exp\Bigg\{\int_t^\theta [c^v(S(\tau)) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} C^v(S(\tau))((C^v))^*(S(\tau))]d\tau + \int_t^\theta C^v(S(\tau))dw(\tau))\Bigg\}h, \tag{3.21}$$

и подчиняется оценке

$$E\|\eta(\theta)\|^2 = E\|Z(\theta,t)h\|^2 \leqslant \|h\|^2 e^{\int_t^\theta [\rho_0+\rho+2\rho K_v(\tau)]d\tau}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Применяя формулу Ито, мы получим

$$E\|\eta(\theta)\|^2 = \|h\|^2 + 2\int_t^\theta E\langle c(S(\tau), v(\tau, S(\tau)))\eta(\tau), \eta(\tau)\rangle d\tau + \int_s^t E|C(S(\tau), v(\tau, S(\tau)))\eta(\tau)|^2 d\tau,$$

откуда, в силу леммы Гронуолла с учетом оценок коэффициентов в **C3.3**, вытекает требуемая оценка.

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия* **C3.3**, *тогда функция* $g(t,s)$ *вида* (3.20) *подчиняется оценке*

$$\|g(t,s)\|^2 \leqslant K_0^2 e^{\int_t^T [\rho_0+\rho+2\rho K_v(\tau)]d\tau}.$$

Доказательство леммы немедленно вытекает из соотношения (3.20) и оценки (3.22).

Лемма 3.5. *Пусть выполнено условие* **C3.3** *и* $\sup\limits_s \|u_0(s)\| \leqslant K_0$. *Тогда функция* $g(t,s)$ *заданная соотношениями* (3.18)–(3.20) *удовлетворяет оценке*

$$\|g(\tau)\|^2_{\Theta_1} \leqslant \beta(\tau),$$

если

$$\|v(\tau)\|^2_{\Theta_1} \leqslant \beta(\tau)$$

для всех $0 \leqslant t_1 \leqslant \tau \leqslant T$, *где*

$$\beta(T-t) = \frac{[\rho_0+\rho]K_0^2 e^{[\rho_0+\rho](T-t)}}{\rho_0+\rho+2\rho K_0^2 - 2\rho K_0^2 e^{[\rho_0+\rho](T-t)}}. \tag{3.23}$$

Если $\rho_0+\rho+2\rho K_0^2 > 0$, *то* $\kappa_1 = |T-t_1|$ *удовлетворяет неравенству*

$$\kappa_1 < \frac{1}{2\rho_0+\rho}\ln\frac{\rho_0+\rho+2\rho K_0^2}{2\rho K_0^2}. \tag{3.24}$$

Если же $\rho_0+\rho+2\rho K_0^2 < 0$, *то функция* $\beta(T-t)$ *ограничена на любом интервале* $[t_1,T]$, *где* $0 \leqslant t_1 \leqslant T$.

Доказательство. Выберем в качестве функции γ решение уравнения

$$\beta(T-\tau) = K_0^2 e^{\int_\tau^T [\rho_0+\rho+2\rho\beta(T-\tau)]d\tau} \tag{3.25}$$

и заметим, что β удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -[\rho_0+\rho+2\rho\beta]\beta, \quad \beta(0) = K_0^2,$$

и допускает явное представление

$$\beta(T-t) = \frac{[\rho_0+\rho]K_0^2 e^{[\rho_0+\rho](T-t)}}{\rho_0+\rho+2\rho K_0^2 - 2\rho K_0^2 e^{[\rho_0+\rho](T-t)}}. \tag{3.26}$$

Очевидно, что функция β ограничена на интервале $\Delta_1 = [T_1, T]$, где

$$|T - T_1| < \frac{1}{\rho_0 + \rho} \ln(1 + \frac{\rho_0 + \rho}{2\rho K_0^2}), \tag{3.27}$$

и удовлетворяет всем условиям леммы.

Для того, чтобы доказать, что существует интервал $\Delta_3 = [T_3, T]$, на котором аналогичная оценка справедлива для константы Липшица функции $g(t,s)$ вида (3.20), мы докажем ограниченность градиента функции $g(t,s)$.

Будем говорить, что выполнено условие **C3.4** если выполнено **C3.3** и существуют положительные константы N и G, зависящие от времени t и функции v, для которых справедливы оценки

$$\|D_y a(s, v(t,s))\|^2 + \sigma^2(D_y A(s, v(t,s))) \leqslant N_{(v, D_s v)}(t)\|y\|^2$$
$$\|D_y[c(v(t,s)h]\|^2 + \sigma^2(D_y[C(v)t,s)h]) \leqslant G_{(v, D_s v)}(t)\|h\|^2\|y\|^2,$$

где $D_y a(s, v(t,s)) = D_s a(s, v(t,s))y$ – производная по аргументу s функции $a(s, v(t,s))$ по направлению $y \in R^d$.

Для того, чтобы доказать, что функции $u^k(t,s)$ (равномерно по k) липшицевы по s, мы покажем, что семейство $D_y u^k(t,s)$ вида

$$\langle h, D_y u^{k+1}(t,s)\rangle = E\langle \beta^k(T), u_0(S^k(T))\rangle + \langle \eta^k(T), \nabla u_0(S^k(T))\alpha^k(T)\rangle \tag{3.28}$$

равномерно ограничено по s. Здесь $S^k(\theta), \eta^k(\theta)$ заданы соотношениями (3.15), (3.16), тогда как $\alpha^k(\theta)$, $\beta^k(\theta)$ представляют собой последовательные приближения к решениям уравнений

$$\begin{aligned}\alpha(\theta) = y + \int_t^\theta & [D_s a(S(\tau), u(\tau, S(\tau))) \\ & + D_u a(S(\tau), u(\tau, S(\tau)))D_s u(\tau, S(\tau))]\alpha(\tau)d\tau \\ + \int_t^\theta & [D_s A(S(\tau), u(\tau, S(\tau))) \\ & + D_u A(S(\tau), u(\tau, S(\tau)))D_s u(\tau, S(\tau))]\alpha(\tau)dw(\tau),\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\beta(\theta) = &\int_t^\theta c(S(\tau), u(\tau, S(\tau)))\beta(\tau)d\tau \\ &+ \int_t^\theta C(S(\tau), u(\tau, S(\tau)))\beta(\tau)dw(\tau) \\ &+ \int_t^\theta [D_s c(S(\tau), u(\tau, S(\tau))) \\ &+ D_u c(S(\tau), u(\tau, S(\tau)))D_s u(\tau, S(\tau))](\alpha(\tau), \eta(\tau))d\tau \\ &+ \int_t^\theta [D_s C(S(\tau), u(\tau, S(\tau))) \\ &+ D_u C(S(\tau), u(\tau, S(\tau)))D_s u(\tau, S(\tau))](\alpha(\tau), \eta(\tau), dw(\tau)),\end{aligned} \tag{3.30}$$

где $D_s a(s,u), D_u a(s,u)$ обозначают соответствующие частные производные.

Рассмотрим линейную систему, состоящую из уравнения

$$\langle h, D_y g(t,s)\rangle = E\langle \beta(T), u_0(S(T))\rangle + \langle \eta(T), D_s u_0(S(T))\alpha(T)\rangle, \tag{3.31}$$

а также уравнений (3.18)–(3.20) и уравнений

$$\begin{aligned}\alpha(\theta) = y + &\int_t^\theta [D_s a(S(\tau, v(\tau, S(\tau)) \\ &+ D_v a(S(\tau, v(\tau, S(\tau))D_s v(\tau, S(\tau))]\alpha(\tau)d\tau \\ &+ \int_t^\theta [D_s A(S(\tau, v(\tau, S(\tau)) \\ &+ D_v A(S(\tau, v(\tau, S(\tau))D_s v(\tau, S(\tau))]\alpha(\tau)dw(\tau),\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\beta(\theta) = &\int_t^\theta c(S(\tau), v(\tau, S(\tau))\beta(\tau)d\tau \\ &+ \int_t^\theta C(S(\tau), v(\tau, S(\tau))\beta(\tau)dw(\tau) \\ &+ \int_t^\theta [D_s c(S(\tau, v(\tau, S(\tau)) \\ &+ D_v c(S(\tau, v(\tau, S(\tau))D_s v(\tau, S(\tau))](\alpha(\tau), \eta(\tau))d\tau \\ &+ \int_t^\theta [D_s C(S(\tau, v(\tau, S(\tau)) \\ &+ D_v C(S(\tau, v(\tau, S(\tau)))D_s v(\tau, S(\tau))](\alpha(\tau), \eta(\tau), dw(\tau))\end{aligned} \tag{3.33}$$

и отметим, что это – замкнутая система.

Покажем, что система (3.18)–(3.20), (3.31)–(3.33) обладает той же структурой, что и исходная система (3.18)–(3.20), поскольку уравнения (3.19), (3.32), (3.33) можно рассматривать как линейное стохастическое уравнение относительно процесса $\zeta(t) = (\beta(t), \alpha(t) \times \eta(t))$ со значениями в пространстве $Y = R^{d_1} \oplus (R^d \times R^{d_1})$. Обозначим

$$G \oplus H = G \otimes I + I \otimes H$$

тензорную сумму операторов, так что

$$(G \oplus H)(h, y) = Gh \otimes y + h \otimes Hy.$$

Пусть $\widehat{D_s c}, \widehat{D_s C}w$ обозначает линейный оператор, действующий из $R^d \times R^{d_1}$ в R^{d_1} по правилу $\widehat{D_s c}(\alpha \otimes \eta) = D_s c(\alpha, \eta)$, и $\widehat{D_s C}(\alpha \otimes \eta)w = D_s C(\alpha, \eta, w)$. Используя эти обозначения, систему (3.19), (3.32), (3.33) можно представить в виде линейного уравнения

$$d\zeta = q(S(\theta), V(\theta, S(\theta))\zeta(\theta)d\theta + Q(S(\theta), V(\theta, S(\theta))(\zeta(\theta), dw), \quad \zeta(0) = \gamma, \tag{3.34}$$

где $V = (v, D_s v)$,

$$q\begin{pmatrix}\beta \\ \alpha \otimes \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \widehat{D_s c} \\ 0 & D_s a \oplus c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta \\ \alpha \otimes \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta + D_s c(\alpha, \eta) \\ D_s a\alpha \otimes h + \alpha \otimes c\eta\end{pmatrix},$$

$$Q\left(\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\otimes\eta\end{pmatrix},w\right)=\left(\begin{pmatrix}C & \widehat{D_sC}\\ 0 & D_sA\oplus C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\otimes\eta\end{pmatrix},w\right)$$
$$=\begin{pmatrix}C(\beta,w)+D_sC(\alpha,\eta,w)\\ D_sA(\alpha,w)\otimes\eta+\alpha\otimes C(\eta,w)\end{pmatrix}.$$

Если q и Q удовлетворяют **C3.3** в соответствующих нормах и $G(t,s)=(g(t,s),D_sg(t,s))$, то можно воспользоваться леммой 3.4, применив ее к функции

$$\langle\gamma,G(t,s)\rangle_Y=E\langle\zeta(T),G_0(S(T))\rangle_Y. \tag{3.35}$$

Здесь

$$\left\langle\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\otimes\eta\end{pmatrix},G(t,s)\right\rangle_Y=\langle\beta,g(t,s)\rangle_{R^{d_1}}+\langle\eta,D_sg(t,s)\alpha\rangle_{R_{d_1}}.$$

Это позволяет доказать, что существует такой интервал $\Delta_3=[T_3,T]$, что функция $D_yg(t,s)$ ограничена для всех $0\leqslant T_3\leqslant t\leqslant T$, если ограничена функция $D_yv(t,s)$.

Покажем, наконец, что последовательные приближения $u^k(s,x)$, $D_su^k(t,s)$ функции $u(t,s)$ и ее градиента сходятся равномерно на интервале $\Delta_4=\Delta_2\cap\Delta_3$, и справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть выполнено условие* **C3.4**. *Тогда существует интервал Δ_4 и ограниченная на этом интервале функция $\gamma(t)$ такие, что для всех $t,\theta\in\Delta_4$ функция $G(t,s)$, заданная соотношениями (3.34), (3.35), удовлетворяет оценке*

$$\|G(t)\|^2_{\bar\Theta_1}\leqslant\gamma(t),$$

если

$$\|V(t)\|^2_{\bar\Theta_1}\leqslant\gamma(t).$$

Доказательство. Доказательство леммы немедленно вытекает из леммы 3.5, если применить ее к функции $G(t,s)=(g(t,s),\nabla g(t,s))$ вида (3.37) и процессу $\zeta(\theta)$, удовлетворяющему уравнению (3.34).

Теорема 3.7. *Пусть выполнено условие* **C3.4**. *Тогда существует интервал такой* Δ, *что для всех* $t, \theta \in \Delta_4$ *существует решение* $(S(\theta), \eta(\theta), u(t,s))$ *системы* (3.11)–(3.13). *При этом градиент функции* $u(t,s)$ *ограничен, процесс* $S(\theta) \in R^d$ *обладает марковским свойством и процесс* $\eta(\theta) \in R^{d_1}$ *определяет операторный функционал от процесса* $S(\theta)$.

Доказательство. Используя леммы 3.4–3.6, мы получим, что последовательность функций $u^k(t,s)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на интервале $\Delta = \Delta_3 \cap \Delta_4$, где интервалы Δ_3 и Δ_4 определены в леммах 3.4 и 3.5. Покажем наконец, что семейство $u_k(t,\cdot)$ сходится к $u(t,\cdot)$ равномерно по t на интервале Δ. Используя оценки

$$\|g(t,s)\|^2 \leqslant K_0^2 e^{\int_s^T [\rho_0+\rho+2\rho\beta(\tau)]d\tau},$$

$$\|G(t,s)\|^2 \leqslant C_0^2 e^{\int_s^T [R_0+\rho+2R\gamma(\tau)]d\tau},$$

где константы R_0, R зависят от ρ_0, ρ и констант в условии **C3.4**, нетрудно проверить, что

$$\sup_{t\in\Delta} \|g(t,s)\|^2 \leqslant K_0^2 e^{\int_t^T [\rho_0+\rho+2\rho\beta(\tau)]d\tau},$$

$$\sup \|G(t,z)\|^2 \leqslant C_0^2 e^{\int_t^T [R_0+\rho+2R\gamma(\tau)]d\tau}.$$

Применяя эти оценки к функциям $u^k(t,s)$ $\nabla u^k(t,s)$, мы получим, что справедливы оценки вида

$$\sup_{t\in\Delta} \sup_{s\in R^d} \|u^k(t,s) - u^{k-1}(t,s)\|^2 \leqslant \frac{[K_0^2]^k |T-\tau|^k C^k}{k!} \|u^1 - u_0\|^2.$$

При этом для заданных констант K_0 C и длины $|T-\tau|$ интервала Δ всегда можно найти такое число N, что для всех $k > N$ справедлива оценка

$$\frac{[K_0^2]^k |T-\tau|^k C^k}{k!} < 1.$$

Из ограниченности функции u_0 и оценки (3.22) вытекает, что отображение Θ действует в $\mathcal{N}$ и порождает отображение $\mathcal{V}$ пространстве $\mathcal{T}$ измеримых ограниченных функций из $[0,T]\times R^d$ в R^{d_1} по формуле

$$\begin{aligned}\langle h, u(t,s)\rangle &= E\langle Z(t,T)h, u_0(S_{t,s}(T)\rangle \\ &= \langle h, EZ^*(t,T)u_0(S_{t,s}(T)\rangle = \langle h, \mathcal{V}u_0(s)\rangle,\end{aligned}$$

где отображение $Z^*(t,T)$ – двойственное отображение к отображению $Z(T,t)$, заданному соотношением (3.21).

Таким образом, мы показали, что отображение $\mathcal{V}^k$ является сжимающим отображением в $\mathcal{T}$ и, следовательно, отображение $\mathcal{V}$ также является сжимающим.

В заключение заметим, что если начальная функция и коэффициенты уравнений (3.10) дважды дифференцируемы по пространственной переменной s и непрерывны по t, то можно показать, что функция $u(t,s)\in R^{d_1}$, возможно определенная на меньшем интервале $[\tau,T]\subset[T_4,T]$, является классическим решением системы (3.10).

В результате мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.8. *Пусть выполнено условие* **C3.4** *для функций a, A, c, C и их производных. Тогда существует единственное классическое решение $u(t,s)$ уравнения* (3.10), *и соотношение* (3.13) *определяет вероятностное представление решения $u(t,s)$, $t\in[\tau,T]$, $s\in R^d$, задачи Коши* (3.10) *при $G^m=0$. Длина интервала $[\tau,T]$, на котором определено это решение, зависит от коэффициентов a, A, c, C и начальных данных u_0.*

Более детальное доказательство последнего утверждения содержится в [9]. В частности, там показано, что если $G^m = G^m(t,s)$ отлично от нуля, то уравнение (3.13) приобретает вид

$$\langle h, u(t,s)\rangle = E\langle \eta_{t,h}(T), u_0(S_{t,s}(T))\rangle + \int\limits_t^T E\langle \eta_{t,h}(\tau), G^m(\tau, S_{t,s}(\tau))\rangle d\tau$$

и в этом случае также можно доказать справедливость всех необходимых оценок, т.е доказать аналоги лемм 3.4–3.6 и теоремы 3.7.

4. Диффузионные процессы, ассоциированные с системами квазилинейных и полностью нелинейных уравнений

В этом параграфе мы покажем, как свести квазилинейное или сильно нелинейное уравнение к семилинейному с помощью построения дифференциальных продолжений, что позволит применить описанный в предыдущем параграфе подход к построению решения задачи Коши для квазилинейных и сильно нелинейных уравнений и систем.

Мы начнем этот параграф с рассмотрения стохастического подхода к решению задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(t,s,f,\nabla f)\cdot\nabla f + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(t,s,f,\nabla f)\nabla^2 f A(t,s,f,\nabla f) = 0,$$
$$f(T,s) = f_0(s). \tag{4.1}$$

Как и в предыдущем параграфе, наша цель состоит в том, чтобы свести решение этой задачи Коши к решению соответствующей системы СДУ и выяснению условий, при которых решение стохастической системы приводит к вероятностному представлению классического (сильного) решения задачи (4.1).

Для того, чтобы воспользоваться результатами предыдущего параграфа, мы вначале сведем рассматриваемую задачу (4.1) к некоторой системе семилинейных уравнений с помощью формального дифференцирования (4.1) по переменной $s \in R^d$.

Предположим, что коэффициенты $a(t,s,f,p), A(t,s,f,p)$ дважды дифференцируемы по аргументам (s,f,p) и непрерывны по t. Мы будем также предполагать, что функция $f_0(s)$ дважды дифференцируема и говорить при этом, что выполнено условие **C 4.1**.

Наряду с задачей Коши (4.1) рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} + a(t,s,f,v),\nabla v + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(t,s,f,v)\nabla^2 v A(t,s,f,v)\\
&\quad + [\nabla a(t,s,f,v) + D_f a(t,s,f,v)v + D_v a(s,f,v)\nabla v]v\\
&\quad + \operatorname{Tr}[\nabla A^*(t,s,f,v) + D_f A^*(t,s,f,v)v\\
&\quad + D_v A^*(t,s,f,v)\nabla v]\nabla v A(t,s,f,v) = 0,\\
&v(T,s) = v_0(s) = \nabla f_0(s).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Эту задачу называют первым дифференциальным продолжением задачи (4.1).

Заметим, что система уравнений (4.1), (4.2) еще не принадлежит к классу параболических систем, рассмотренных выше, поскольку последнее слагаемое в левой части уравнения (4.2) содержит квадрат градиента функции v. Это указывает на то, что нам понадобится второе дифференциальное продолжение уравнения (4.1).

Перепишем для наглядности уравнение (4.1), его первое и второе дифференциальные продолжения в координатном виде. При этом для сложной функции $a(t,s,v(t,s),p(t,s))$ мы будем использовать обозначения $\nabla_k a = \frac{\partial a}{\partial s_k}$ для полной производной по s и $D_s a, D_f a, D_p a$ для соответствующих частных производных. Напомним, что, если не оговорено противное, то по повторяющимся индексам производится суммирование.

В результате параболическое уравнение (4.1) и его два первых дифференциальных продолжения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a_k(t,s,f,v)\nabla_k f + \frac{1}{2}A_{ik}(t,s,f,v)\nabla_i\nabla_j f A_{jk}(t,s,f,v) = 0, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_m}{\partial t} + a_k\nabla_k v_m + \frac{1}{2}A_{jk}\nabla_j\nabla_i v_m A_{ik} + [\nabla a_k]_m v_k \\ + [\nabla A_{jk}]_m \nabla_i v_j A_{ik} = 0,\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ml}}{\partial t} + a_k\nabla_k g_{ml} + \frac{1}{2}A_{jk}\nabla_j\nabla_i g_{ml} A_{ik} \\ + C^i_{mq}A_{ki}\nabla_k g_{ql} + c_{mq}g_{ql} = 0,\end{aligned} \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned}C^i_{mq}A_{ki}\nabla_k g_{ql} &= [\nabla A_{jk}]_m \nabla_i g_{jl} A_{ik} + [\nabla[\nabla A_{jk}]_m]_l \nabla_i v_j A_{ik}, \\ c_{lq}g_{qm} &= [\nabla[a_k]]_l g_{km} + [\nabla A_{jk}]_m g_{ij}[\nabla A_{ik}]_l.\end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, система (4.3)–(4.5) представляет собой систему семилинейных параболических уравнений (ее коэффициенты зависят только от неизвестных функций $f \in R^1, v \in R^d, g \in R^d \times R^d$). При этом мы можем воспользоваться результатами предыдущего параграфа и свести решение задачи Коши к решению стохастической системы следующего вида

$$dS(\theta) = a(\theta, S(\theta), V(\theta, S(\theta)))d\theta + A(\theta, S(\theta), V(\theta, S(\theta)))dw(\theta),$$
$$S(t) = s \in R^d, \tag{4.6}$$
$$d\eta(\theta) = c(\theta, S(\theta), V(\theta, S(\theta)))\eta(\theta)d\theta + C(\theta, S(\theta),$$
$$V(\theta, S(\theta)))(\eta(\theta), dw(\theta)), \tag{4.7}$$
$$\eta(t) = h \in R^{d_1} = R^1 \times R^d \times R^{d\times d}, \quad d_1 = 1 + d + d^2.$$
$$\langle h, V(t,s)\rangle = E\langle \eta_{t,h}(T), V_0(S_{t,s}(T))\rangle = \langle h, E[Z^*(t,T)u_0(S_{t,s}(T))]\rangle, \tag{4.8}$$

где $S_{t,s}(\theta)$ удовлетворяет (4.6), $\eta_{t,h}(T) = Z(T,t)h$ и вектор-функция $V \in R^{d_1}$ имеет компоненты $V = (f, v, g)$.

Если функции $a(t,s,V), A(t,s,V), c(t,s,V), C(t,s,V)$ удовлетворяют условиям предыдущих параграфов, **C2.1–C2.2**, **C3.1** и $f_0 \in C^2(R^d)$ (мы будем говорить при этом, что выполнено условие **C4.2**), то справедливы все результаты параграфов 2 и 3. В частности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* **C 4.2**. *Тогда существует такой интервал* $[T_1, T]$, *что для* $t \in [T_1, T]$ *существует единственное решение системы* (4.6)–(4.8). *При этом* $V(t,s) = E[Z^*(T,t)V_0(S_{t,s}(T))]$.

Рассмотрим далее задачу Коши для системы полностью нелинейных параболических уравнений

$$u_t + F(s, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad u(T,s) = u_0(s). \tag{4.9}$$

Здесь $s \in R^d, F(s,u,p,q) \in R^{d_1}$, $u \in R^{d_1}$, $p \in L(R^d, R^{d_1})$, $q \in L(R^d, L(R^d, R^{d_1}))$. Мы будем также предполагать, что функция $F(s,u,p,q)$ обладает следующим свойством $F_l(s,u,p,q) \equiv F_l(s,u,p,q_l)$, $l = 1, \dots, d_1$.

Используя технику дифференциального продолжения, точнее, формально дифференцируя соотношение (4.9) по пространственной переменной три раза, можно свести полностью нелинейное уравнение вида (4.9) к системе квазилинейных уравнений относительно новой векторной функции $V = (u, \nabla u, \nabla^2 u, \nabla^3 u)$, компоненты которой мы будем обозначать $(V^1, \dots, V^4)$.

Ниже мы будем предполагать, что $F(s,u,p,q)$ – трижды дифференцируемая функция по всем аргументам, $F_{lij} = \frac{\partial F_l}{\partial q^l_{ij}} \geqslant 0$ и существует такая матрица A, что $F_{lij} = \sum_{k=1}^d A_{ki}A_{jk}$.

Дифференциальное продолжение уравнения (4.9) порядка 3 – это система уравнений относительно функций $V^1 = u$, $V^2_j = \nabla_j u$, $V^3_{jk} = \nabla_k V^2_j$, $V^4_{jkm} = \nabla_m V^3_{jk}$, которая возникает при формальном дифференцировании уравнения (4.9) по пространственной переменной

$$\begin{aligned} V^2_t + F_s + \nabla_{V^1} F \cdot V^2 + \nabla_{V^2} F V^3 + \nabla_{V^3} F V^2_{ss} \\ + \sum_{k=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d} \Phi^2_{jk}(s, V^1, V^2, V^3, V^4) \nabla_j V^k \\ + \sum_{k=1}^{4} \Psi^2_k(s, V^1, V^2, V^3, V^4) V^k + G^2(s) = 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} V^3_t + \nabla_{V^1} F \cdot V^3 + \nabla_{V_2} F V^4 + \nabla_{V^3} F V^3_{ss} \\ + \sum_{k=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d} \Phi^3_{jk}(s, V^1, V^2, V^3, V^4) \nabla_j V^k \\ + \sum_{k=1}^{d_1} \Psi^3_k(s, V^1, V^2, V^3, V^4) V^k + G^3(s) = 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} V^4_t + \nabla_{V^1} F \cdot V^4 + \nabla_{V_2} F \nabla V^4 + \nabla_{V^3} F V^4_{ss} \\ + \sum_{k=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d} \Phi^4_{jk}(s, V^1, V^2, V^3, V^4) \nabla_j V^k \\ + \sum_{k=1}^{d_1} \Psi^4_k(s, V^1, V^2, V^3, V^4) V^k + G^4(s) = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

При этом уравнение (4.9) перепишем в виде

$$V^1_t + F(s, V^1, V^2, V^3) + \nabla_{V^3} F V^1_{ss} - \nabla_{V^3} F V^3 = 0. \tag{4.13}$$

Проанализировав полученные уравнения, можно заметить, что система (4.10)–(4.13) представляет собой систему следующего вида

$$\frac{\partial V^m}{\partial t} + a_j \frac{\partial V^q}{\partial s_j} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A^* V^m_{ss} A + B^m_{jq} \frac{\partial V^q}{\partial s_j} + c^m_q V^q + G^m = 0, \tag{4.14}$$

где $V = (u, \nabla u, \nabla^2 u, \nabla^3 u)$ – вектор со значениями а пространстве R^{d_1}, $d_1 = 1 + d + d^2 + d^3$.

В дальнейшем мы будем считать, что выполняются следующие условия: $(\nabla_{V^3}F)_{jk} = \frac{\partial F}{\partial q_{jk}} \geqslant 0$, $q_{jk} = \nabla_j \nabla_k u$ и существует такая матрица $A : R^d \to R^d$, что $A^*A = \nabla_{V^3}F$.

Система (4.15) представляет собой систему параболических уравнений специального типа – это система, диагональная по членам старшего порядка и недиагональная по членам первого и нулевого порядка.

Построим случайные процессы, ассоциированные с системой (4.14), предположив для простоты, что $d = 1$, $d_1 = 4$. Пусть $(S(\tau), \eta(\tau))$ – случайные процессы, удовлетворяющие СДУ

$$\begin{aligned} dS(\tau) &= a(S(\tau), V(\tau, S(\tau)))d\tau \\ &\quad + A(S(\tau), V(\tau, S(\tau)))dw(\tau), \quad S(t) = s \in R^1_+, \qquad (4.15) \\ d\eta(\tau) &= c(S(\tau), V(\tau, S(\tau)))\eta(\tau)d\tau \qquad (4.16) \\ &\quad + C(S(\tau), V(\tau, S(\tau)))\eta(\tau)dw(\tau)), \quad \eta(t) = h \in R^4, \end{aligned}$$

и вектор-функция $V(t, s) \in R^4$ задается соотношением

$$\langle h, V(t, s)\rangle = E_{t,s,h}\langle \eta(T), v(S(T))\rangle, \qquad (4.17)$$

где $V(T, s) = v(s)$. Здесь $t \in [0, T], s \in R^1_+$, $v \in R^4$, $a(s, v)$, $A(s, v) \in R^1$, а коэффициенты $c(s, V) \in L(R^4), C(s, V) \in L(R^4)$ представляют собой соответственно линейные ограниченные операторы в R^4.

Будем говорить, что выполнено условие **C4.3** если коэффициенты системы (4.14), задаваемые функцией F и ее производными, удовлетворяют условиям параграфов 2 и 3, а функция $v \in C^3(R^d)$.

При этом из предыдущих параграфов вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* **C4.2**. *Тогда существует такой интервал* $[T_1, T]$, *что для всех* $t \in [T_1, T]$ *существует единственное классическое решение* $V(t, s)$ *системы* (4.14) *и, как следствие, существует единственное классическое решение задачи Коши* (4.9), *совпадающее с компонентой* $V^1(t, s)$ *вектор-функции* $V(t, s)$.

В заключение покажем, что при некоторых дополнительных условиях нелинейные уравнения, полученные в первом параграфе, можно исследовать с помощью описанного в этой работе подхода.

Примеры. Покажем как предложенная схема выглядит для уравнений (2.7) и (2.15) в случае $d = 1$.

1. Рассмотрим уравнение (2.7) и продифференцируем его три раза по s. При этом мы получим следующую систему уравнений для функций $V^1 = u, V^2 = u_s, V^3 = u_{ss}, V^4 = u_{sss}$.

$$V^1_\tau + \sigma^2[\frac{1}{2}s^2 + \rho s^3 V^1_{ss}]V^1_{ss} = 0, \tag{4.18}$$

$$V^2_\tau + \sigma^2[\frac{1}{2}s^2 + 2\rho s^3 V^3]V^2_{ss} + \sigma^2[s + 6\rho s^2 V^3]V^2_s = 0, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} &V^3_\tau + \sigma^2[\frac{1}{2}s^2 + 2\rho s^3 V^3]V^3_{ss} + 2\sigma^2\{s + 6\rho s^2 V^3)V^3_s \\ &\quad + 2\sigma^2(\rho s^3 V^4 + 3\rho s^2 V^3)V^3_s + \sigma^2(1 + 6s\rho V^3)V^3 = 0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &V^4_\tau + \sigma^2[\frac{1}{2}s^2 + 2\rho s^3 V^3]V^4_{ss} + 3\sigma^2[s + 3\rho s^2 V^3]V^4_s \\ &\quad + 3\sigma^2\{3\rho s^2 V^3 + 2\rho s^3 V^4\}V^4_s + 2\sigma^2\rho s^3 V^4 V^4_s \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{4} c^4_k(s, V^3, V^4)V^k = 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{4} c^4_k V^k = \sigma^2[3(1 + 6\rho s^2 V^4)V^4 + 6[\rho V^3 + 3\rho s[s+1]V^4]V^3]$.

Анализируя полученные выражения и полагая

$$\frac{1}{2}A^2(s, V) = \sigma^2\Big[\frac{1}{2}s^2 + 2\rho s^3 V^3\Big],$$

мы можем выделить нужную структуру в системе (4.18)–(4.21). С этой целью заметим, что

$$A(s, V)A_s(s, V) = \sigma^2[s + 6\rho s^2 V^3 + 2\rho s^3 V^4]$$

и перепишем систему (4.18)–(4.21) в виде

$$\begin{aligned} &V^4_\tau + \frac{1}{2}A^2 V^4_{ss} + 2\sigma^2\rho s^3 V^4 V^4_s \\ &\quad + \sum_{k=1}^{4} C^4_k(s, V^3, V^4)A(s, V^3, V^4)V^k_s \\ &\quad + \sum_{k=1}^{4} c^4_k(s, V^3, V^4)V^k = 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$V^3_\tau + \frac{1}{2}A^2 V^3_{ss} + 2\sigma^2\rho s^3 V^4 V^3_s \tag{4.23}$$
$$+ \sum_{k=1}^{4} C^3_k(s,V^3,V^4)A(s,V^3,V^4)V^k_s + \sum_{k=1}^{4} c^3_k(s,V^3,V^4)V^k = 0,$$

$$V^2_\tau + \frac{1}{2}A^2 v^2_{ss} + 2\sigma^2\rho s^3 V^4 V^2_s \tag{4.24}$$
$$+ \sum_{k=1}^{4} C^2_k(s,V^3,V^4)A(s,V^3,V^4)V^k_s + \sum_{k=1}^{4} c^2_k(s,V^3,V^4)V^k = 0,$$
$$V^1_\tau + \frac{1}{2}A^2 v^1_{ss} + 2\sigma^2\rho s^3 V^4 V^1_s \tag{4.25}$$
$$+ \sum_{k=1}^{4} C^1_k(s,V^3,V^4)A(s,V^3,V^4)V^k_s + \sum_{k=1}^{4} c^1_k(s,V^3,V^4)V^k = 0.$$

Здесь

$$\sum_{k=1}^{4} c^1(s,V^3,V^4)V^k = -2\sigma^2\rho s^3 V^4 V^2 - \sigma^2\rho s^3 (V^3)^2,$$
$$C^1_k = 0,\ k = 1,\dots,4,$$

$$\sum_{k=1}^{4} c^2_k(s,V^3,V^4)V^k = -4\sigma^2\rho s^3 V^4)V^3,$$
$$C^2_k = 0, \quad k = 1,3,4, \quad C_{22}A = \sigma^2[s + 6\rho s^2 V^3 + 2\rho s^3 V^4],$$
$$C^3_4(s,V^3,V^4)A(s,V^3,V^4) = 2\sigma^2[s + 6\rho s^2 V^3 + 2\rho s^3 V^4],$$
$$\sum_{k=1}^{4} c^3_k(s,V^3,V^4)V^k = -4\sigma^2\rho s^3 (V^4)^2 + \sigma^2[1 + 6\rho s V^3]V^3,$$
$$\sum_{k=1}^{4} c^4_k(s,V^3,V^4)V^k = \sigma^2[6\rho(V^3)^2 + 6[5\rho s + \rho s^2]V^3V^4 + 3[1 + 3\rho s^2 V^4]V^4],$$
$$C^4_k(s,V^3,V^4)A(s,V^3,V^4) = 0,\ k = 1,2,3,$$
$$C^4_4(s,V^3,V^4)A(s,V^3,V^4) = 3\sigma^2[s + 6\rho s^2 V^3 + 2\rho s^3 V^4].$$

Замечание. Отметим, что коэффициенты

$$a(s,V) = 3\sigma^2[s + 3\rho s^2 V^3]$$

и

$$A(s,V) = \sigma[\frac{1}{2}s^2 + 2\rho s^3 V^3]^{\frac{1}{2}}$$

растут по s быстрее, чем линейная функция, что свидетельствует о том, что решение $S(\theta)$ соответствующего стохастического уравнения существует лишь локально на интервале возможно меньшем, чем описанный выше, и применение описанной выше техники требует дополнительного исследования, связанного с изучением момента взрыва этого решения или изучением длины этого интервала. Однако до момента взрыва все описанные выше рассмотрения корректны.

2. Рассмотрим уравнение (2.15), которое в одномерном случае имеет вид

$$u_t + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{u_{ss}}{(1-\rho s u_{ss})^2} = 0, \quad u(T,s) = \Phi(s), \tag{4.26}$$

и покажем, что это уравнение при дополнительных условиях принадлежит к описанному выше классу.

Рассмотрим дифференциальное продолжение уравнения (4.26), введя новые функции $V^1 = u, V^2 = u_s, V^3 = u_{ss}, V^4 = u_{sss}$. При этом мы получим следующую систему уравнений

$$V_t^2 + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{1+\rho s V^3}{(1-\rho s V^3)^3}V_{ss}^2 + \frac{\sigma^2 s}{(1-\rho s V^3)^3}V_s^2 = 0 \tag{4.27}$$

$$V_t^3 + \mathcal{A}V^3 + \sigma^2\frac{s + \rho s^3 V^4 + \rho s^2[1+\rho s V^3][V^3 + sV^4]}{(1-\rho s V^3)^4}V_s^3 + \frac{\sigma^2[V^3 + sV^4]}{(1-\rho s V^3)^4} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} &V_t^4 + \mathcal{A}V^4 \\ &+\frac{s + \rho s^2 + \rho s^2 V^3[2 + \rho s V^3[s+1] + \rho s^2] + \rho s^3 V^4[3 + \frac{V^3}{2} + \rho s V^3 + \frac{s}{2}]}{(1-\rho s V^3)^4}V_s^4 \\ &+\frac{4\rho s + \rho s^2 + 5\rho^2 s + \rho s^3 + 2}{(1-\rho s V^3)^5}V^4 + \frac{3\rho^3 s^4 + 3\rho^2 s^3 - 4\rho^3 s^4 V^3 - 2\rho s}{(1-\rho s V^3)^5}V^3 V^4 \\ &+\frac{G^4}{(1-\rho s V^3)^5}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

где

$$G^4 = (V^3)^2(3\rho^3 s^3 - 3\rho^2 s^2 + \rho^3 s^3 V^3) + V^3(4\rho + 5\rho^2 s^2 + \rho s[s+1]) + 2s + 1.$$

Введем обозначение

$$\mathcal{A}u = \frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{(1 - \rho^2 s^2 (V^3)^2)}{(1 - \rho s V^3)^4} u,$$

и заметим, что $\mathcal{A}$ является положительно определенным, если $|\rho s V^3| \leqslant 1$.

Таким образом, если мы ищем решения в классе функций, удовлетворяющих условию $|1 - \rho^2 s^2 (V^3)^2| > 0$, то оператор $\mathcal{A}$ является положительно определенным, система (4.26)-(4.29) имеет описанную выше структуру, и для нее справедливы описанные выше результаты.

Отметим в заключение, что вероятностный подход к решению задачи Коши для сильно нелинейных уравнений и систем, развитый в этой работе, позволяет рассматривать вырождающиеся задачи, возникающие в финансовой математике.

Работа выполнена при поддержке гранта DFG 436 RUS 113/823 и гранта НШ 638.2008.1.

Литература

1. U. Cetin, R. Jarrow, P. Protter, *Liquidity risk and arbitrage pricing theory*, Finance and Stochastics, **8** (2004) 311–341.
2. U. Cetin, R. Jarrow, P. Protter, M. Warachka, *Pricing options in an extended Black-Scholes economy with illiquidity: theory and empirical evidence*, The Review of Financial Studies, **19** (2006), 493–529.
3. L. A. Bordag R. Frey, *Nonlinear option pricing models for illiquid market: scaling properties and explicit solutions.*
4. R. Frey, A. Stremme, *Market volatility and feedback effects from dynamic hedging.* Math. Finance **7** (1997) 351–374.
5. H. McKean, *A class of Markov processes associated with nolinear parabolic equations.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **59** No. 6 (1966), 1907–1911.
6. M. Freidlin, *Quasilinear parabolic equations and measures in functional spaces.* — Funct. Anal. and Appl. **1**, No. 3 (1967), 237–240.
7. M. Freidlin, *Functional integration and partial differential equations.* Princeton Univ. Press (1985).
8. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для систем квазилинейных уравнений с помощью марковских процессов.* — Изв. ВУЗ Математика. No. 12 (1978), 6–17.
9. Ya. I. Belopolskaya and Yu. L. Dalecky, *Stochastic equations and differential geometry.* Kluwer (1990).

10. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Марковские процессы ассоциированные с нелинейными параболическими системами.* ДАН СССР **250**, No. 3(1980), 268–271.
11. Ya. Belopolskaya, *Probability approach to solution of nonlinear parabolic equations.* Problems of Math. Anal. **13** (1992), 21–35.

Belopolskaya Ya. I. Probabilistic approach to solution of nonlinear PDEs arising in financial mathematics.

We apply a probabilistic approach that allows to solve the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations and systems developed in our previous papers to problems arising in financial mathematics while constructing arbitrage-free option prices on non-ideal markets.

С.Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
190005, С.-Петербург 2-я Красноармейская 4
E-mail: yanabeus@yahoo.com, yana@yb1569.spb.edu

Поступило 5 ноября 2009 г.