Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

М. Н. Яковлев

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА РИТЦА В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ЛИДСТОУНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу минимизации квадратичного функционала

$$J(u) \equiv \int\limits_0^1 \left[u''(t)\right]^2 dt + \int\limits_0^1 q(t)u^2(t)dt - 2\int\limits_0^1 f(t)u(t)\,dt. \tag{1}$$

Пусть

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t), \tag{2}$$

$$0 \leqslant q_1(t)t^2(1-t)^2 \in L(0,1), \tag{3}$$

$$0 \geqslant q_2(t)t^2(1-t)^2 \in L(0,1), \quad \frac{1}{3}\int\limits_0^1 t^2(1-t)^2 q_2(t)\,dt = d_1, \tag{4}$$

$$q_3(t) \in C[0,1], \quad |\,q_3(t)\,| \leqslant d_2, \tag{5}$$

$$C = 1 + d_1 - \frac{d_2}{\pi^4} > 0. \tag{6}$$

Лемма 1. *Функция Грина оператора* $\frac{d^4u}{dt^4}(t)$ *при краевых условиях* $u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0$ *имеет вид*

$$6g(t,s) = \begin{cases} t(s-1)[t^2+s^2-2s] & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(t-s)[s^2+t^2-2t] & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{7}$$

и верно равенство

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\right)^2 ds = g(t,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{8}$$

Положим

$$W^2_{2,0}(0,1) \equiv \left\{u(t) \in W^2_2(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\right\}. \tag{9}$$

Ключевые слова : сингулярная краевая задача Лидстоуна, вычислимая оценка погрешности метода Ритца.

Лемма 2. *Пусть* $u(t) \in W^2_{2,0}(0,1)$. *Тогда*

$$u^2(t) \leqslant g(t,t) \int\limits_0^1 \left[u''(t)\right]^2 dt = \frac{1}{3} t^2 (1-t)^2 \int\limits_0^1 \left[u''(t)\right]^2 dt, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^1 \left[u'(t)\right]^2 dt \leqslant \left(\int\limits_0^1 u^2(t)\, dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^1 \left[u''(t)\right]^2 dt \right)^{1/2}, \tag{11}$$

$$u^2(t) \leqslant \left(\int\limits_0^1 \left[u''(t)\right]^2 dt \right)^{1/4} \left(\int\limits_0^1 u^2(t)\, dt \right)^{3/4}, \tag{12}$$

$$u^2(t) \leqslant \left(\int\limits_0^1 \left[u(t)\right]^2 dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^1 \left[u'(t)\right]^2 dt \right)^{1/2}. \tag{12'}$$

Доказательства леммы 1 и оценки (10) аналогичны доказательствам лемм 1–3 работы [2].

Оценка (11) получается методом интегрирования по частям. Оценка (12′) установлена в работе [4], а оценка (12) следует из (12′) и (11).

Теорема 1. *Пусть определенная на промежутке* $(0,1)$ *вещественная функция* $f(t)$ *такова, что*

$$f(t)t(1-t) \in L(0,1) \tag{13}$$

и пусть выполнены соотношения (2)–(6). *Тогда*

(1) *в пространстве* $W^2_{2,0}(0,1)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t)$, *на которой функционал*

$$J(u) = \int\limits_0^1 \left[u''(t)\right]^2 dt + \int\limits_0^1 q(t) u^2(t) dt - 2 \int\limits_0^1 f(t) u(t)\, dt$$

достигает минимума;

(2) *для всех* $v(t) \in W^2_{2,0}(0,1)$ *уравнение*

$$\int\limits_0^1 u''(t)\, v''(t)\, dt + \int\limits_0^1 q(t)\, u(t)\, v(t) dt = \int\limits_0^1 f(t)\, u(t)\, v(t)\, dt \tag{14}$$

относительно $u(t) \in W^2_{2,0}(0,1)$ *имеет одно и только одно решение, и этим решением является функция* $u_0(t) \in W^2_{2,0}(0,1)$, *на которой функционал* $J(u)$ *достигает минимума;*

(3) *верна оценка*

$$\int_0^1 |u_0''(t)|^2\,dt \leqslant \frac{1}{3C^2}\Bigg(\int_0^1 |f(t)|t(1-t)dt\Bigg)^2; \tag{15}$$

(4) *если*

$$f(t) \in C(0,1), \quad q(t) \in C(0,1),$$

то $u_0(t)$ *является решением краевой задачи*

$$u^{(4)}(t) + q(t)\,u(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{16}$$

$$u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0; \tag{17}$$

(5) *если*

$$f(t) \in C(0,1) \cap L_2(0,1), \quad q(t) \in C(0,1), \quad q(t)t(1-t) \in L_2(0,1),$$

то

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[u^{(4)}(t)\right]^2 dt &\leqslant 2\int_0^1 f^2(t)\,dt \\ &\quad + \frac{2}{9c^2}\int_0^1 q^2(t)t^2(1-t)^2dt\Bigg(\int_0^1 |f(t)|t(1-t)dt\Bigg)^2 \\ &\equiv D \leqslant 2\left[1 + \frac{1}{270c^2}\int_0^1 q^2(t)\,t^2(1-t)^2dt\right]\int_0^1 f^2(t)\,dt.\end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательствам, приведенным в работах [1] и [3].

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) A *– линейный самосопряженный положительно-определенный оператор в гильбертовом пространстве* H *с областью определения* $D_A \subset H$*;*

(2) *оператор* A^{-1} *вполне непрерывен;*

(3) $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$ *– собственные значения, а* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ *– соответствующие им собственные функции.*

Тогда для любого $u \in D_A$ *имеют место оценки*

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)\varphi_k \right\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left(A\left[u - \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)\varphi_k \right], u - \sum_{k=1}^{n} (u, \varphi_k)\varphi_k \right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|Au\|^2. \tag{19}$$

Следствие. *Пусть*

$$\overline{W} \equiv \left\{ u(t) \in W_2^4(0,1), u(o) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0 \right\}; \tag{20}$$

и пусть $u(t) \in \overline{W}$*. Тогда*

$$\int_0^1 \left[u(t) - 2\sum_{k=1}^{N} \sin k\pi t \int_0^1 u(t) \sin k\pi t \, dt \right]^2 dt$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi^4 (N+1)^4} \int_0^1 \left\{ \left[u(t) - 2\sum_{k=1}^{N} \sin k\pi t \int_0^1 u(t) \sin k\pi t \, dt \right]'' \right\}^2 dt \tag{21}$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi^8 (N+1)^8} \int_0^1 [u^{(4)}(t)]^2 \, dt.$$

Пусть

$$\overline{u}_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} \sin k\pi t$$

– функция, полученная методом Ритца при минимизации функционала $J(u)$. Обозначим через $u_N(t)$ отрезок ряда Фурье функции $u_0(t)$,

$$u_N(t) = 2\sum_{k=1}^{N} \sin k\pi t \int_0^1 u_0(t) \sin k\pi t \, dt.$$

Поскольку $J(\overline{u}_N) \leqslant J(u_N)$, имеем

$$\begin{aligned}
J(\overline{u}_N) &= \int_0^1 \left[u_0''(t) - \overline{u}_N''(t)\right]^2 dt + \int_0^1 q(t)\left[u_0(t) - \overline{u}_N(t)\right]^2 dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left[u_0''(t) - u_N''(t)\right]^2 dt + \int_0^1 q(t)\left[u_0(t) - u_N(t)\right]^2 dt \\
&\leqslant \left[1 + \frac{1}{3}\int_0^1 |q(t)| t^2 (1-t)^2\, dt\right] \int_0^1 \left[u_0''(t) - u_N''(t)\right]^2 dt \\
&\leqslant \frac{1}{\pi^4(1+N)^4}\left[1 + \frac{1}{3}\int_0^1 |q(t)| t^2 (1-t)^2\, dt\right]\left[2\int_0^1 f^2(t) dt \right. \\
&\left. + \frac{2}{9c^2}\int_0^1 q^2(t) t^2 (1-t)^2\, dt \left(\int_0^1 |f(t)| t(1-t)\, dt\right)^2\right]. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Пусть $z_0(t)$ – единственная функция из $W^2_{2,0}(0,1)$, на которой функционал

$$\int_0^1 \left[z''(t)\right]^2 dt + \int_0^1 q(t) z^2(t) dt - 2\int_0^1 z(t)\left[u_0(t) - \overline{u}_N(t)\right]^2 dt$$

достигает минимума в пространстве $W^2_{2,0}(0,1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[u_0(t) - \overline{u}_N(t)\right]^2 dt = &\int_0^1 [z_0''(t) - \overline{z}_N''(t)][u_0''(t) - \overline{u}_N''(t)] dt \\
&+ \int_0^1 q(t)[u_0(t) - \overline{u}_N(t)]\left[z_0(t) - \overline{z}_N(t)\right] dt.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\int\limits_0^1 \left[u_0(t) - \overline{u}_N(t)\right]^2 dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^4(\overline{1+N})^4}\left(1 + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 |q(t)|\, t^2(1-t)^2\, dt\right) D^{1/2}$$

$$\times \left(2 + \frac{1}{135c^2}\int\limits_0^1 q^2(t)t^2(1-t)dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^1 \left[u_0(t) - \overline{u}_N(t)\right]^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\equiv \frac{M}{\pi^4(1+N)^4}\left(\int\limits_0^1 \left[u_0(t) - u_N(t)\right]^2 dt\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \left[u_0(t) - \overline{u}_N(t)\right]^2 dt \leqslant \frac{M^2}{\pi^8(1+N)^8}. \tag{23}$$

Используя лемму 3, окончательно получим следующую теорему.

Теорема 3. *Для погрешности метода Ритца $u_0(t) - \overline{u}_N(t)$ имеют место следующие оценки:*

$$\int\limits_0^1 \left[u_0(t) - \overline{u}_N(t)\right]^2 dt \leqslant \frac{M^2}{\pi^8(1+N)^8}, \tag{24}$$

$$\int\limits_0^1 \left[u_0''(t) - \overline{u}_N''(t)\right]^2 dt \leqslant \frac{1}{c\pi^4(1+N)^4}\left(1 + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 |q(t)|t^2(1-t)^2 dt\right)$$

$$\times 2\left[\int\limits_0^1 |f^2(t)|\, dt + \frac{1}{9c^2}\int\limits_0^1 q^2(t)t^2(1-t)^2\, dt\left(\int\limits_0^1 |f(t)|t(1-t)\, dt\right)^2\right]$$

$$\equiv \frac{Q}{\pi^4(1+N)^4}, \tag{25}$$

$$\int_0^1 \left[u_0'(t) - \overline{u}_N'(t)\right]^2 dt \leqslant \frac{MQ^{1/2}}{\pi^6(1+N)^6} \tag{26}$$

и

$$|u_0(t) - \overline{u}_N(t)|^2 \leqslant \frac{M^{3/2}Q^{1/4}}{\pi^7(1+N)^7} \tag{27}$$

в случае, если

$$f(t) \in C(0,1) \cap L_2(0,1), \quad q(t) \in C(0,1), \quad q(t)t(1-t) \in L_2(0,1).$$

Замечание. Условие $q(t)t(1-t) \in L_2(0,1)$, очевидно, допускает применение полученные оценок к некоторым сингулярным краевым задачам.

Литература

1. М. Н. Яковлев, *Разрешимость сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка* $2m$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 174–188.
2. М. Н. Яковлев, *Первая краевая задача для сингулярного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **334** (2006), 233–245.
3. М. Н. Яковлев, *Метод конечных элементов для сингулярных краевых задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 149–159.

Yakovlev M. N. A bound for the error of the Ritz method in the case of the Lidstone problem for a singular differential equation of fourth order.

For the Lidstone boundary-value problem

$$u^{(4)} + q(t)\,u = f(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0$$

conditions of solvability are obtained for nonintegrable functions $q(t)$ and $f(t)$, and a computable error bound for the Ritz method is established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 25 сентября 2009 г.