Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

В. Б. Хазанов

БАЛАНСОВОЕ СООТНОШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе приводятся известные балансовые соотношения для пучка постоянных матриц и для однопараметрической полиномиальной матрицы. Во втором разделе приводятся необходимые сведения о спектральных характеристиках многопараметрических полиномиальных матриц и их свойствах. В третьем разделе обосновывается предлагаемое обобщение балансового соотношения для многопараметрической полиномиальной матрицы.

1. Балансовое соотношение для однопараметрической полиномиальной матрицы

Из канонической формы Кронекера пучка комплексных $m \times n$ матриц $A - \lambda B$ ранга ρ вытекает известное балансовое соотношение

$$t_\sigma + t_{\mathrm{R}} + t_{\mathrm{L}} = \rho, \tag{1.1}$$

где

$$t_\sigma = t_{\sigma\mathrm{C}} + t_{\sigma\infty}, \quad t_{\mathrm{R}} = \sum_{i=1}^{u} t_{\mathrm{R}i}, \quad t_{\mathrm{L}} = \sum_{j=1}^{v} t_{\mathrm{L}j}.$$

Здесь t_σ – кратность полного спектра пучка, $t_{\sigma\mathrm{C}}$ и $t_{\sigma\infty}$ – кратности соответственно конечного и бесконечного спектров (которые совпадают со степенями характеристических полиномов пучков $A - \lambda B$ и $B - \mu A$), t_{R} и t_{L} – суммы соответственно правых $t_{\mathrm{R}i}$, $i = 1, \ldots, u$, и левых $t_{\mathrm{L}j}$, $j = 1, \ldots, v$, минииндексов пучка, $u := n - \rho$, $v := m - \rho$.

В работе автора [2] при использовании сопровождающего пучка матриц было получено обобщение соотношения (1.1) для полиноми-

Ключевые слова : матрица многопараметрическая, полиномиальная, степень, ранг, нуль-пространство, полиномиальные решения, минииндексы, спектр полный, конечный, регулярный, сингулярный.

альной матрицы $F(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s} F_k \lambda^k$ степени s ($s := \max\limits_{F_k \neq \mathbb{O}} k$) ранга ρ:

$$t_\sigma + t_{\mathrm{R}} + t_{\mathrm{L}} = \rho s. \tag{1.2}$$

2. Спектральные характеристики многопараметрической полиномиальной матрицы

Приведем здесь используемые в третьем разделе спектральные характеристики многопараметрической полиномиальной матрицы (которые согласуются с известными характеристиками однопараметрической полиномиальной матрицы) и их свойства (см., например, [3, 4]).

Рассмотрим q-параметрическую полиномиальную $m \times n$ матрицу

$$F(\boldsymbol{\lambda}) \equiv F(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_q} F_{k_1 \cdots k_q} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_q^{k_q} \equiv \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$$

степени s ($s := \max\limits_{F_{\mathbf{k}} \neq \mathbb{O}} |\mathbf{k}|$, $|\mathbf{k}| := \sum\limits_{j=1}^{q} k_j$) ранга ρ.

Полиномиальные векторы $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})$ и $\mathbf{y}(\boldsymbol{\lambda})$, удовлетворяющие уравнениям

$$F(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

$$\mathbf{y}^H(\boldsymbol{\lambda})F(\boldsymbol{\lambda}) = 0^H$$

при любых значениях $\boldsymbol{\lambda}$, называются соответственно правым и левым полиномиальными решениями матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Совокупности $\{\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})\}$ и $\{\mathbf{y}(\boldsymbol{\lambda})\}$ образуют соответственно правое $N_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv N_{\mathrm{c}}[F]$ и левое $N_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv N_{\mathrm{r}}[F]$ нуль-пространства размерностей $u := n - \rho$ и $v := m - \rho$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Матрицы $X(\boldsymbol{\lambda}) = [\mathbf{x}_1(\boldsymbol{\lambda}) \dots \mathbf{x}_u(\boldsymbol{\lambda})]$ и $Y(\boldsymbol{\lambda}) = [\mathbf{y}_1(\boldsymbol{\lambda}) \dots \mathbf{y}_v(\boldsymbol{\lambda})]$, столбцы которых образуют базисы $N_c[F]$ и $N_r[F]$, будем называть базисными матрицами этих нуль-пространств.

Конечный спектр $\sigma_{\mathrm{C}}[F]$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ определяется как совокупность решений системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\rho \\ j_1 \dots j_\rho \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\rho \leqslant m, \\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_\rho \leqslant n. \end{matrix} \tag{2.1}$$

Левые части уравнений системы (2.1) представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Конечный спектр $\sigma_{\mathrm{C}}[F]$ представляет собой совокупность $(q-k)$-мерных решений, $k \geq 1$, q-мерного аффинного пространства $\mathbb{C}^q$. Регулярная часть $\sigma_{\mathrm{Cr}}[F]$ конечного спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ из $(q-1)$-мерных решений соответствует нулям ее характеристического полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \varphi[F]$, который определяется как наибольший общий делитель миноров из (2.1). Остальные $(q-k)$-мерные решения при $k>1$ определяют сингулярную часть $\sigma_{\mathrm{Cs}}[F]$ конечного спектра матрицы. В работе [3] доказано, что сингулярная часть спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ обладает следующим свойством: $\sigma_{\mathrm{Cs}}[F] = \sigma_{\mathrm{Cs}}[X] \cup \sigma_{\mathrm{Cs}}[Y]$. Таким образом, если матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ имеет непустой сингулярный спектр, то хотя бы одна из базисных матриц $X(\boldsymbol{\lambda})$, $Y(\boldsymbol{\lambda})$ также будет иметь непустой сингулярный спектр.

Рассмотрение точек с бесконечными координатами достигается переходом от q-мерного аффинного пространства $\mathbb{C}^q$, точки которого определяются q-координатами: $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, к q-мерному проективному пространству $\mathbb{C}\Pi^q$, точки которого определяются набором из $(q+1)$-й однородных одновременно не равных нулю координат: $\boldsymbol{\bar\lambda} = (\bar\lambda_0 : \bar\lambda_1 : \dots : \bar\lambda_q)$. Переход от полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) := F(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ к полиномиальной матрице $F^{\pi}(\boldsymbol{\bar\lambda}) := F^{\pi}(\bar\lambda_0, \bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_q)$ осуществляется по формуле

$$F^{\pi}(\boldsymbol{\bar\lambda}) := \bar\lambda_0^s F\left(\frac{\bar\lambda_1}{\bar\lambda_0}, \dots, \frac{\bar\lambda_q}{\bar\lambda_0}\right).$$

Элементы матрицы F^{π} являются однородными многочленами степени s. Спектр матрицы F^{π} определяется как совокупность решений системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F^{\pi}\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\rho \\ j_1 \dots j_\rho \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < \dots < i_\rho \leqslant m, \\ 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho \leqslant n, \end{matrix} \tag{2.2}$$

левые части которых являются однородными алгебраическими многочленами степени ρs.

Совокупность $(q-k)$-мерных решений q-мерного проективного пространства $\mathbb{C}\Pi^q$ системы (2.2) естественно рассматривать как полный (конечный и бесконечный) спектр $\sigma[F]$ матрицы F. Конечная часть спектра, определяемая системой (2.2), совпадает с конечным спектром, определяемым системой (2.1). Как и прежде, регулярная часть $\sigma_{\mathrm{r}}[F^{\pi}]$ полного спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ из $(q-1)$-мерных решений соответствует нулям ее характеристического полинома $\phi(\boldsymbol{\bar\lambda}) \equiv$

$\phi[F^\pi]$, который определяется как наибольший общий делитель миноров из (2.2). Остальные $(q-k)$-мерные решения при $k>1$ определяют сингулярную часть $\sigma_{\rm s}[F^\pi]$ полного спектра матрицы.

Обозначим через $t_\sigma^F := \deg\phi[F^\pi]$ степень характеристического полинома $\phi[F^\pi]$, которую, как и в однопараметрическом случае, будем называть кратностью полного регулярного спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Пусть $X(\boldsymbol{\lambda})$ и $Y(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальные $n\times u$ и $m\times v$ матрицы, столбцы которых образуют минимальные базисы[1] правого и левого нуль-пространств матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ соответственно: $\operatorname{span} X(\boldsymbol{\lambda}) = N_{\rm c}[F]$, $\operatorname{span} Y(\boldsymbol{\lambda}) = N_{\rm r}[F]$, $u = n-\rho$, $v = m-\rho$. Обозначим также через $t_{\rm R}^X = \sum\limits_{i=1}^{u} t_{{\rm R}i}^X$ и $t_{\rm L}^Y = \sum\limits_{j=1}^{v} t_{{\rm L}j}^y$ – суммы степеней (мининдексов) $t_{{\rm R}i}^X, i=1,\dots,u$, и $t_{{\rm L}j}^Y$, $j=1,\dots,v$, столбцов этих матриц, а через t_σ^X and t_σ^Y – кратности их полных регулярных спектров[2].

3. Балансовое соотношение для многопараметрической полиномиальной матрицы

Покажем, что в многопараметрическом случае обобщение балансного соотношения (2.2) имеет вид

$$t_\sigma^F + t_{\rm R}^X + t_{\rm L}^Y = \rho s + t_\sigma^X + t_\sigma^Y. \tag{3.1}$$

Выполним замены спектральных параметров $\lambda_j = \alpha_j\lambda + \beta_j$, выбирая числа α_j, β_j, $j=1,\dots,q$, таким образом, чтобы однопараметрические полиномиальные матрицы

$$\widehat{F}(\lambda) := F(\alpha_1\lambda+\beta_1,\dots,\alpha_q\lambda+\beta_q),$$

$$\widehat{X}(\lambda) := X(\alpha_1\lambda+\beta_1,\dots,\alpha_q\lambda+\beta_q),$$

$$\widehat{Y}(\lambda) := Y(\alpha_1\lambda+\beta_1,\dots,\alpha_q\lambda+\beta_q)$$

обладали следующими свойствами:

$$\operatorname{rank}\widehat{F} = \rho, \quad t_\sigma^{\widehat{F}} = t_\sigma^F, \quad \deg\widehat{F} = s; \tag{3.2}$$

[1] В работе [5] приводится конструктивное обоснование существования так называемого минимального базиса подпространства, для которого сумма степеней базисных векторов является минимальной.

[2] В статье [4] было показано, что если минимальная базисная полиномиальная матрица имеет непустой сингулярный спектр, то она может иметь также и регулярный спектр.

$$\operatorname{rank}\widehat{X} = u, \quad t_\sigma^{\widehat{X}} = t_\sigma^X, \quad t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}} = t_{\mathrm{R}}^X; \tag{3.3}$$

$$\operatorname{rank}\widehat{Y} = v, \quad t_\sigma^{\widehat{Y}} = t_\sigma^Y, \quad t_{\mathrm{L}}^{\widehat{Y}} = t_{\mathrm{L}}^Y. \tag{3.4}$$

Здесь $t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}} = \sum\limits_{i=1}^{u} t_{\mathrm{R}i}^{\widehat{X}}$, $t_{\mathrm{L}}^{\widehat{Y}} = \sum\limits_{j=1}^{v} t_{\mathrm{L}j}^{\widehat{Y}}$ – суммы степеней столбцов матриц $\widehat{X}(\lambda)$, $\widehat{Y}(\lambda)$, а $t_\sigma^{\widehat{X}}$, $t_\sigma^{\widehat{Y}}$ – кратности их полных спектров соответственно.

Возможность такого выбора вытекает из следующих рассуждений. Рассмотрим вначале некоторый скалярный полином $\widehat{f}(\lambda)$, получаемый из полинома

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) = \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_q} f_{k_1 \ldots k_q} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_q^{k_q} \equiv \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$$

степени s после вышеуказанной замены параметров. Для того, чтобы степень полинома $\widehat{f}(\lambda)$ также была равна s, надо, чтобы отличным от нуля был соответствующий коэффициент $\widehat{f}_s = \sum\limits_{|\mathbf{k}|=s} f_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}} \equiv \sum\limits_{k_1+\cdots+k_q=s} f_{k_1\ldots k_q} \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_q^{k_q}$. Это требование означает исключение из $2q$-мерного аффинного пространства параметров α_j, β_j, $j = 1, \ldots, q$, точек гиперповерхности, определяемой уравнением

$$\sum_{k_1+\ldots+k_q=s} f_{k_1\cdots k_q} \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_q^{k_q} = 0. \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь условия (3.2), (3.3) и (3.4). Последнее условие в (3.2) будет выполнено, если хотя бы один из mn элементов старшего матричного коэффициента матрицы $\widehat{F}(\lambda)$ отличен от нуля. Это означает исключение из указанного $2q$-мерного аффинного пространства точек одной из mn возможных гиперповерхностей, определяемой уравнением вида (3.5). Последние условия в (3.3) и (3.4) означают равенства степеней столбцов матриц $X(\boldsymbol{\lambda})$, $Y(\boldsymbol{\lambda})$ и $\widehat{X}(\lambda)$, $\widehat{Y}(\lambda)$ соответственно. Для каждого из u столбцов матрицы $\widehat{X}(\lambda)$ это означает исключение одной из n соответствующих гиперповерхностей. Аналогично, для каждого из v столбцов матрицы $\widehat{Y}(\lambda)$ это означает исключение одной из m соответствующих гиперповерхностей. Нетрудно убедиться, что каждое из оставшихся условий в (3.2), (3.3) и (3.4) также будет приводить к необходимости исключения определенного числа гиперповерхностей из $2q$-мерного аффинного пространства параметров α_j, β_j, $j = 1, \dots, q$. В отличие от рассмотренных выше случаев левые части уравнений, определяющих эти гиперповерхности, будут иметь более сложный вид и зависеть, в общем случае, от всех $2q$ параметров. Поскольку число таких ограничений является конечным (конкретное их число не является существенным), то возможность указанного выше выбора параметров становится очевидной.[3]

Выполним теперь ∇V-1 факторизацию (см., например, [1]) матрицы $\widehat{X}(\lambda)$:

$$\widehat{X}(\lambda) = \widetilde{X}(\lambda) P(\lambda),$$

так что столбцы $n \times u$ матрицы $\widetilde{X}(\lambda)$ образуют минимальный базис правого нуль-пространства $N_{\mathrm{c}}[\widehat{F}]$ матрицы $\widehat{F}(\lambda)$, а $\det P(\lambda) = \varphi[\widehat{X}]$, причем $\deg \varphi[\widehat{X}] \equiv t_{\sigma \mathrm{C}}^{\widehat{X}}$. Покажем, что

$$t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}} = t_{\mathrm{R}}^{\widetilde{X}} + t_{\sigma}^{\widehat{X}}. \tag{3.6}$$

Для миноров матрицы $\widehat{X}(\lambda)$ имеем

$$\widehat{X}\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_u \\ 1, \dots, u \end{pmatrix} = \varphi[\widehat{X}]\, \widetilde{X}\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_u \\ 1, \dots, u \end{pmatrix}, \quad 1 \le i_1 < \dots < i_u \le n.$$

Так как столбцы матрицы $\widetilde{X}(\lambda)$ образуют минимальный базис, его старшие векторные коэффициенты линейно независимы [6]; следовательно, найдется такой минор этой матрицы, для которого выполнено соотношение

$$\deg \widetilde{X}\begin{pmatrix} k_1, \dots, k_u \\ 1, \dots, u \end{pmatrix} = t_{\mathrm{R}}^{\widetilde{X}} \equiv \sum_{i=1}^{u} t_{\mathrm{R}i}^{\widetilde{X}},$$

так что

$$\deg \widehat{X}\begin{pmatrix} k_1, \dots, k_u \\ 1, \dots, u \end{pmatrix} = t_{\sigma \mathrm{C}}^{\widehat{X}} + t_{\mathrm{R}}^{\widetilde{X}}.$$

[3]Автор предполагает, что некоторые из условий в (3.3), (3.4) могут вытекать из условий (3.2) и свойств матриц $X(\boldsymbol{\lambda})$, $Y(\boldsymbol{\lambda})$, однако обосновать это ему не удалось.

Очевидно, что для всех миноров матрицы $\widehat{X}(\lambda)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &\deg \widehat{X}\binom{i_1,\dots,i_u}{1,\dots,u} \le t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}}, \\ &\deg \widehat{X}\binom{i_1,\dots,i_u}{1,\dots,u} \le t_{\sigma\mathrm{C}}^{\widehat{X}} + t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}}, \end{aligned} \qquad 1 \le i_1 < \ldots < i_u \le n.$$

Если $\deg \widehat{X}\binom{k_1,\dots,k_u}{1,\dots,u} = t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}}$, то $t_{\sigma\infty}^{\widehat{X}} = 0$ и $t_{\sigma}^{\widehat{X}} = t_{\sigma\mathrm{C}}^{\widehat{X}}$; если $\deg \widehat{X}\binom{k_1,\dots,k_u}{1,\dots,u} < t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}}$, то $t_{\sigma\infty}^{\widehat{X}} = t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}} - \deg \widehat{X}\binom{k_1,\dots,k_u}{1,\dots,u}$ и $t_{\sigma}^{\widehat{X}} = t_{\sigma\mathrm{C}}^{\widehat{X}} + t_{\sigma\infty}^{\widehat{X}}$. В любом случае мы приходим к подтверждению справедливости соотношения (3.6).

Аналогичные рассуждения для матрицы $\widehat{Y}(\lambda)$ и матрицы $\widetilde{Y}(\lambda)$, столбцы которой образуют минимальный базис левого нуль-пространства матрицы $\widehat{F}(\lambda)$, приводят к соотношению

$$t_{\mathrm{L}}^{\widehat{Y}} = t_{\mathrm{L}}^{\widetilde{Y}} + t_{\sigma}^{\widehat{Y}}, \tag{3.7}$$

аналогичному (3.6).

Из соотношения вида (1.2) для матрицы $\widehat{F}(\lambda)$,

$$t_{\sigma}^{\widehat{F}} + t_{\mathrm{R}}^{\widetilde{X}} + t_{\mathrm{L}}^{\widetilde{Y}} = \rho s,$$

с учетом (3.6) и (3.7) получаем соотношение

$$t_{\sigma}^{\widehat{F}} + t_{\mathrm{R}}^{\widehat{X}} + t_{\mathrm{L}}^{\widehat{Y}} = \rho s + t_{\sigma}^{\widehat{X}} + t_{\sigma}^{\widehat{Y}},$$

которое, в свою очередь, с учетом предположений (3.2), (3.3), (3.4) о свойства матриц $\widehat{F}(\lambda)$, $\widehat{X}(\lambda)$, $\widehat{Y}(\lambda)$, приводит к соотношению (3.1).

Литература

1. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры.* Часть 1. *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Пб., 2004.
2. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах λ-матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **111** (1981), 180–194.
3. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.

4. В. Б. Хазанов, *О некоторых свойствах полиномиальных базисов подпространств над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 177–191.
5. В. Б. Хазанов, *Результантный подход к вычислению векторных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 182–214.
6. G. D. Forney, *Minimal bases of rational vector spaces with applications to multivariable linear systems.* — SIAM J. Control **13**, No. 3 (1975), 182–214.

Khazanov V. B. Balance relation for the spectral characteristics of a multiparameter polynomial matrix.

The known balance relation interrelating the spectrum multiplicities and the sums of mini-indices of a one-parameter polynomial matrix with its degree and rank is generalized to the case of a multiparameter polynomial matrix.

Санкт-Петербургский государственный
морской технический университет,
Лоцманская ул. 3, 190008 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: khazanovvb@mail.ru

Поступило 6 октября 2009 г.