Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ. 6

Введение

Работа относится к серии статей [1–5], посвященных обзору и разработке методов решения задач алгебры для двухпараметрических полиномиальных и рациональных матриц. В ней рассматриваются различные виды факторизаций двухпараметрических рациональных матриц, методы их вычисления и их применение к решению спектральных задач.

Статья состоит из пяти параграфов. В первом параграфе приводится классификация так называемых несократимых факторизаций рациональных матриц. Методы построения несократимых факторизаций (правой и левой MFD) рассмотрены во втором параграфе. В третьем и четвертом параграфах рассматриваются так называемые минимальные несократимые факторизации (по рангу и степени сомножителей). В пятом параграфе формулируются спектральные задачи для рациональных матриц и приводятся методы их решения.

Пусть $R(\lambda,\mu) = \{r_{ij}(\lambda,\mu)\}$ есть двухпараметрическая рациональная $m \times n$ матрица, элементами которой являются дробно-рациональные функции:

$$r_{ij}(\lambda,\mu) = \frac{f_{ij}(\lambda,\mu)}{g_{i,j}(\lambda,\mu)}, \quad i = 1,\dots m, \quad j = 1\dots n,$$

$f_{ij}(\lambda,\mu)$, $g_{ij}(\lambda,\mu)$ – скалярные полиномы от двух переменных. Обозначим через ρ ранг матрицы[1] $R : \rho \leqslant \min\{m,n\}$. Если $m = n$ и $\det R$ не равен тождественно нулю, то матрица R называется регулярной, в противном случае матрица R называется сингулярной.

Ключевые слова : матрицы двухпараметрические, полиномиальные, рациональные, особые точки, нуль-пространство, спектр регулярный, сингулярный.

[1]При записи двухпараметрических матриц для сокращения иногда будем опускать параметры.

§1. Классификация некоторых факторизаций рациональных матриц

1.1. Базовые факторизации. Рассмотрим факторизации R видов

$$R(\lambda, \mu) = K^{-1}(\lambda, \mu) D(\lambda, \mu) \tag{1.1}$$

и

$$R(\lambda, \mu) = D(\lambda, \mu) K^{-1}(\lambda, \mu), \tag{1.2}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(a) K и D суть двухпараметрические полиномиальные матрицы соответствующих размеров;

(b) K есть регулярная матрица.

Факторизации (1.1) и (1.2) будем называть базовыми. В дальнейшем изложении они будут использованы как вспомогательные и будут служить основой для построения других факторизаций рациональных матриц.

Если исходная рациональная матрица R не задана в виде (1.1) или (1.2), то базовая факторизация матрицы может быть построена, например, следующим образом. Регулярная матрица K выбирается в виде

$$K = kI_m \quad \text{или} \quad K = \operatorname{diag}\{k_1, \dots, k_m\}$$

для факторизации (1.1) и в виде

$$K = kI_n \quad \text{или} \quad K = \operatorname{diag}\{\overline{k}_1, \dots, \overline{k}_n\}$$

для факторизации (1.2). Здесь k – скалярный полином, являющийся наименьшим общим кратным (НОК) знаменателей всех элементов матрицы $R; k_i, i = 1, \dots, m$ $(\overline{k}_j, j = 1, \dots, n)$ суть НОК знаменателей элементов i-ой строки (j-го столбца) матрицы R. Элементы соответствующей полиномиальной матрицы D вычисляются из очевидных соображений (см., например, [4]).

1.2. Несократимые факторизации. К несократимым факторизациям рациональной $m \times n$ матрицы R ранга ρ относятся следующие факторизации.

1. Факторизация вида

$$R = ST^{-1} \tag{1.3}$$

(правая MFD[2]), удовлетворяющая следующим условиям:

(a) S, T суть двухпараметрические полиномиальные $m \times n$ и $n \times n$ матрицы;

(b) T – регулярная матрица;

(c) $M := [S,\, T]^B$ – двухпараметрическая полиномиальная $(m+n) \times n$ матрица, не имеющая конечного регулярного спектра.

2. Факторизация вида

$$R = T^{-1}S \tag{1.4}$$

(левая MFD), удовлетворяющая следующим условиям:

(a) T и S суть двухпараметрические полиномиальные $m \times m$ и $m \times n$ матрицы;

(b) T – регулярная матрица;

(c) $N := [S,\, T]$ – двухпараметрическая полиномиальная $m \times (n+m)$ матрица, не имеющая конечного регулярного спектра.

3. Факторизация вида

$$R = ST^{-1}V, \tag{1.5}$$

удовлетворяющая следующим условиям:

(a) S, T, V суть двухпараметрические полиномиальные матрицы размеров $m \times q$, $q \times q$, $q \times n$ $(q \geqslant \rho)$;

(b) T – регулярная матрица;

(c) двухпараметрические полиномиальные матрицы $M := [S,\, T]^B$ и $N := [T,\, V]$ размеров $(m+q) \times q$ и $q \times (q+n)$ соответственно не имеют конечных регулярных спектров.

Замечание. Рассмотренные выше базовые факторизации (1.1) и (1.2), как правило, не являются несократимыми факторизациями.

Несократимая факторизация рациональной $m \times n$ матрицы R ранга ρ называется минимальной по размерам входящих в нее матриц-сомножителей, если все они имеют полный ранг ρ.

Несократимые факторизации (1.3)–(1.5) называются минимальными по степени, если степени соответствующих полиномиальных матриц M и N являются минимальными.

[2]MFD – Matrix Fraction Description.

Несократимая факторизация рациональной матрицы называется минимальной, если она минимальна как по размерам, так и по степени.

Для одной и той же матрицы R несократимые факторизации могут отличаться выбором матриц-сомножителей. В частности, они могут отличаться размерами и степенями. Имеет место следующее утверждение.[3]

Теорема. *Конечный спектр матрицы T и объединение конечных спектров матриц S и V в несократимых факторизациях вида* (1.5) *рациональной матрицы R являются инвариантами этой матрицы.*

§2. Методы построения несократимых факторизаций

Ниже рассматриваются методы построения несократимых факторизаций (1.3) и (1.4) в предположении их существования.

2.1. Метод построения факторизации (1.3). Выполняются следующие операции.

(1) Матрица $R(\lambda, \mu)$ записывается в виде базовой факторизации (1.1) как
$$R(\lambda, \mu) = K^{-1}(\lambda, \mu) D(\lambda, \mu). \tag{2.1}$$

(2) Формируется вспомогательная матрица
$$C(\lambda, \mu) = [K(\lambda, \mu), D(\lambda, \mu)].$$

(3) К матрице $C(\lambda, \mu)$ применяется метод ΔW-2 факторизации и находится разложение вида
$$C(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu), \mathbb{O}]. \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times n$ матрица; $W(\lambda, \mu)$ – унимодулярная по λ матрица порядка $m + n$, последние n столбцов которой образуют базис нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $C(\lambda, \mu)$. Матрицу, образованную этими столбцами, обозначим через $W_0(\lambda, \mu)$. Будем предполагать, что $W_0(\lambda, \mu)$ не имеет конечного регулярного спектра. Последнее условие не умаляет общности, так как оно всегда

[3] Доказательство утверждения см. в [1].

может быть удовлетворено, если воспользоваться методом исчерпывания.[4]

(4) Матрица $W_0(\lambda, \mu)$ записывается в блочном виде

$$W_0(\lambda, \mu) = [W_1(\lambda, \mu), W_2(\lambda, \mu)]^B,$$

где W_1 и W_2 – блоки размеров $m \times n$ и $n \times n$ соответственно.

Теперь в качестве матриц S и T для несократимой факторизации (2.1) берутся матрицы

$$S(\lambda, \mu) := -W_1(\lambda, \mu), \qquad T(\lambda, \mu) := W_2(\lambda, \mu). \tag{2.3}$$

Для обоснования метода следует установить, что при таком выборе T и S справедливо представление $R(\lambda, \mu)$ в виде факторизации (1.3) и выполняются свойства (a)–(c).

Приведем обоснование рассмотренного алгоритма.

Учитывая, что столбцы матрицы $W_0(\lambda, \mu)$ образуют базис правого нуль-пространства $C(\lambda, \mu)$, имеем

$$C(\lambda, \mu) W_0(\lambda, \mu) = \mathbb{O}, \tag{2.4}$$

или, в развернутом виде,

$$K(\lambda, \mu) W_1(\lambda, \mu) + D(\lambda, \mu) W_2(\lambda, \mu) = \mathbb{O}, \tag{2.5}$$

где, по условию, $K(\lambda, \mu)$ – регулярная полиномиальня матрица, $D(\lambda, \mu)$ – полиномиальная $m \times n$ матрица.

Сначала установим справедливость свойства (b), т.е. регулярность матрицы $W_2(\lambda, \mu)$.

Допустим противное и предположим, что столбцы матрицы $Y(\lambda, \mu)$ образуют базис нетривиального правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $W_2(\lambda, \mu)$, так что

$$W_2(\lambda, \mu) Y(\lambda, \mu) = \mathbb{O}, \qquad Y(\lambda, \mu) \not\equiv \mathbb{O}.$$

[4] В условиях существования несократимой факторизации регулярный и сингулярный спектры матрицы C не имеют общих точек, так что существует минимальный базис нуль-пространства $N_c[C]$. Алгоритм построения минимального базиса представлен в [7].

Тогда из (2.5) следует, что

$$K(\lambda,\mu)\,W_1(\lambda,\mu)\,Y(\lambda,\mu)=\mathbb{O}. \tag{2.6}$$

Далее, так как матрица $W_0(\lambda,\mu)$ имеет полный столбцовый ранг, то с учетом сказанного имеем

$$W_0(\lambda,\mu)\,Y(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} W_1(\lambda,\mu)\,Y(\lambda,\mu) \\ \mathbb{O} \end{bmatrix}\neq\mathbb{O}.$$

Следовательно, матрица

$$Z(\lambda,\mu):=W_1(\lambda,\mu)Y(\lambda,\mu)\not\equiv\mathbb{O}$$

удовлетворяет равенству

$$K(\lambda,\mu)\,Z(\lambda,\mu)=\mathbb{O},$$

что противоречит регулярности матрицы $K(\lambda,\mu)$. Полученное противоречие доказывает регулярность матрицы $W_2(\lambda,\mu)$.

Далее, учитывая регулярность матриц $K(\lambda,\mu)$ и $W_2(\lambda,\mu)$, из (2.5) находим

$$-W_1(\lambda,\mu)W_2^{-1}(\lambda,\mu)=K^{-1}(\lambda,\mu)\,D(\lambda,\mu)=R(\lambda,\mu),$$

что доказывает справедливость равенства (1.3) при выборе $T(\lambda,\mu)$ и $S(\lambda,\mu)$ в виде (2.3). Справедливость свойств (a) и (b) установлена.

Справедливость свойства (c) следует из того факта, что, в силу равенств (2.3), матрица $[-S(\lambda,\mu),\,T(\lambda,\mu)]^B$ совпадает с матрицей $W_0(\lambda,\mu)$, которая, по построению, не имеет конечного регулярного спектра. Этим обоснование алгоритма завершается.

2.2. Метод построения факторизации (1.4). Для построения несократимой факторизации (1.4) матрицы $R(\lambda,\mu)$ достаточно применить метод п. 2.1 к матрице $R_1(\lambda,\mu):=R^T(\lambda,\mu)$. После выполнения шагов (1)–(4) вышеупомянутого метода будет получено разложение

$$R_1(\lambda,\mu)=-W_1(\lambda,\mu)W_2^{-1}(\lambda,\mu).$$

В искомом разложении (1.4) $R(\lambda,\mu)=T^{-1}(\lambda,\mu)\,S(\lambda,\mu)$ следует положить

$$T(\lambda,\mu):=W_2^T(\lambda,\mu),\quad S(\lambda,\mu):=-W_1^T(\lambda,\mu).$$

§3. Минимальная несократимая факторизация рациональной матрицы полного ранга и метод ее построения

Пусть $R(\lambda,\mu)$ – рациональная $m\times n$ матрица полного столбцового ранга n. Рассмотрим факторизацию $R(\lambda,\mu)$ вида

$$R(\lambda,\mu)=S(\lambda,\mu)\,T^{-1}(\lambda,\mu), \tag{3.1}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

(a) $S(\lambda,\mu)$ и $T(\lambda,\mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные $m\times n$ и $n\times n$ матрицы;

(b) $T(\lambda,\mu)$ – регулярная матрица;

(c) двухпараметрическая полиномиальная $(m+n)\times n$ матрица $M(\lambda,\mu)=[S(\lambda,\mu),\,T(\lambda,\mu)]^B$ не имеет регулярного спектра.

Факторизация (3.1) является минимальной несократимой факторизацией матрицы $R(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга.

Заметим, что минимальная факторизация (3.1) отличается от несократимой факторизации (1.3) только условием (c). Выполнение условия (c) для минимальной факторизации влечет выполнение условия (c) для несократимой факторизации матрицы $R(\lambda,\mu)$.

Для вычисление минимальной факторизации матрицы $R(\lambda,\mu)$ требуется выполнить следующие операции.

(1) Матрица $R(\lambda,\mu)$ записывается в виде базовой факторизации

$$R(\lambda,\mu)=K^{-1}(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu).$$

(2) Формируется вспомогательная матрица

$$C(\lambda,\mu):=[K(\lambda,\mu),\,D(\lambda,\mu)].$$

(3) Находится матрица $W(\lambda,\mu)$, реализующая ΔW-2 факторизацию матрицы $C(\lambda,\mu)$:

$$C(\lambda,\mu)\,W(\lambda,\mu)=[\Delta(\lambda,\mu),\,\mathbb{O}].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m\times n$ матрица, $W(\lambda,\mu)$ – регулярная матрица, унимодулярная по λ.

(4) Базис нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $C(\lambda, \mu)$, образованный из последних n столбцов матрицы $W(\lambda, \mu)$, перестраивается в базис, не содержащий конечного и бесконечного регулярного спектра (он по-прежнему обозначается через $W_0(\lambda, \mu)$).

(5) Матрица $W_0(\lambda, \mu)$ записывается в блочном виде

$$W_0(\lambda, \mu) = \left[W_1(\lambda, \mu, W_2(\lambda, \mu)\right]^B$$

с блоками W_1 и W_2 размеров $m \times n$ и $n \times n$ соответственно.

В качестве матриц S и T минимальной факторизации $R(\lambda, \mu)$ берутся матрицы

$$S(\lambda, \mu) := -W_1(\lambda, \mu), \qquad T(\lambda, \mu) = W_2(\lambda, \mu). \tag{3.2}$$

Заметим, что построение минимальной факторизации отличается от построения несократимой факторизации только шагом (4), на котором строится минимальный базис нуль-пространства $N_c[C]$.

Обоснование метода построения минимальной факторизации проводится по тому же плану, что и обоснование методов несократимой факторизации из §2.

Построение минимальной факторизации (1.4) матрицы $R(\lambda, \mu)$ полного строчного ранга осуществляется применением вышеописанного метода к матрице $R^T(\lambda, \mu)$.

§4. Минимальная несократимая факторизация рациональной матрицы произвольного ранга

4.1 Определение минимальной несократимой факторизации. Рассмотрим факторизацию двухпараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \mu)$ ранга ρ вида

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)T^{-1}(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu), \tag{4.1}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

(a) $S(\lambda, \mu)$, $T(\lambda, \mu)$ и $V(\lambda, \mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные матрицы размеров $m \times \rho$, $\rho \times \rho$ и $\rho \times n$ соответственно, имеющие ранг ρ, совпадающий с рангом исходной рациональной матрицы $R(\lambda, \mu)$;

(b) $T(\lambda, \mu)$ – регулярная матрица;

(c) двухпараметрическая полиномиальная $(m + \rho) \times \rho$ матрица $M(\lambda, \mu) = [S(\lambda, \mu),\, T(\lambda, \mu)]^B$ не имеет регулярного спектра;

(d) двухпараметрическая полиномиальная $\rho \times (\rho + n)$ матрица $N(\lambda, \mu) = [T(\lambda, \mu),\, V(\lambda, \mu)]$ не имеет конечного регулярного спектра.

Факторизация (4.1) матрицы $R(\lambda, \mu)$, удовлетворяющая условиям (a)–(d), является минимальной факторизацией.

4.2. Метод построения минимальной несократимой факторизации. Для построения факторизации (4.1) выполняются следующие операции.

(1) Матрица $R(\lambda, \mu)$ записывается в виде базовой факторизации (1.1),

$$R(\lambda, \mu) = K^{-1}(\lambda, \mu) D(\lambda, \mu), \tag{4.2}$$

где $K(\lambda, \mu)$ – регулярная двухпараметрическая полиномиальная $m \times m$ матрица, а $D(\lambda, \mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ.

(2) К матрице $D(\lambda, \mu)$ применяется метод ΔW-2 факторизации,

$$D(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = [\Delta(\lambda, \mu), \mathbb{O}]. \tag{4.3}$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n - \rho)$ матрица; $W(\lambda, \mu)$ – унимодулярная по λ матрица, так что $\det W(\lambda, \mu) = \varphi(\mu)$ есть полином, корни[5] $\mu_1, \ldots, \mu_q$ которого определяются в процессе реализации разложения (4.3); $\Delta(\lambda, \mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m \times \rho$ матрица ранга ρ, регулярный спектр которой состоит из объединения конечного регулярного спектра матрицы $D(\lambda, \mu)$ и спектра матрицы $W(\lambda, \mu)$.

(3) На базе ΔW-2 разложения (4.3) двухпараметрической матрицы $D(\lambda, \mu)$ строится ∇V-2 разложение вида

$$D(\lambda, \mu) = \nabla(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu), \tag{4.4}$$

где $\nabla(\lambda, \mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга, регулярный спектр которой совпадает с

[5]В дальнейшем предполагается, что $\mu_1, \ldots, \mu_q$ являются простыми корнями полинома $\varphi(\mu)$.

конечным регулярным спектром матрицы $D(\lambda,\mu)$. Таким образом, в отличие от матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$ из разложения (4.3), регулярный спектр матрицы $\nabla(\lambda,\mu)$ не содержит точек вида $(\lambda,\mu_i,)$, $i = 1\dots q$. Двухпараметрическая полиномиальная $\rho\times n$ матрица $V(\lambda,\mu)$ ранга ρ не имеет конечного регулярного спектра.

Метод построения разложения (4.4) описан в [2]. Здесь мы приводим основные этапы его реализации.

(3i) С помощью метода следов Д.К. Фаддеева вычисляется рациональная регулярная матрица $W^{-1}(\lambda,\mu)$ в виде

$$W^{-1}(\lambda,\mu) = \frac{1}{\varphi(\mu)}\,B(\lambda,\mu), \tag{4.5}$$

где $B(\lambda,\mu)$ есть регулярная $n\times n$ матрица, союзная для регулярной матрицы $W(\lambda,\mu)$ из разложения (4.3). С учетом (4.5) равенство (4.3) принимает вид

$$D(\lambda,\mu) = \Delta(\lambda,\mu)B_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)}, \tag{4.6}$$

где $B_{\rho n}(\lambda,\mu)$ есть $\rho\times n$ матрица, составленная из первых ρ строк матрицы $B(\lambda,\mu)$.

(3ii) Вычисляются двухпараметрические полиномиальные матрицы $\nabla(\lambda,\mu)$ из (4.4) и $C_{\rho n}(\lambda,\mu)$ размеров $m\times\rho$ и $\rho\times n$ соответственно:

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda,\mu) &= \Delta(\lambda,\mu)P^{-1}(\lambda,\mu), \\ C_{\rho n}(\lambda,\mu) &= P(\lambda,\mu)B_{\rho n}(\lambda,\mu). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь $P^{-1}(\lambda,\mu) = \prod\limits_{k=1}^{q} W_k(\lambda)T_k^{-1}(\mu)$, $P(\lambda,\mu) = \prod\limits_{k=q}^{1} T_k(\mu)W_k^{-1}(\lambda)$, где $T_k(\mu) = \text{block diag}\{I_{\rho-1},(\mu-\mu_k)\}$, $W_k(\lambda)$ и $W_k^{-1}(\lambda)$ – унимодулярные $\rho\times\rho$ матрицы. Вычисление матриц $\nabla(\lambda,\mu)$ и вспомогательной матрицы $C_{\rho n}(\lambda,\mu)$ проводится параллельно за q шагов, где q – число собственных значений $\mu=\mu_i$, $i=1\dots q$, подлежащих исчерпыванию.

Рассмотрим выполнение типичного (первого) шага.

(α) Для $\nabla_0(\lambda,\mu) := \Delta(\lambda,\mu)$ и фиксированного $\mu=\mu_1$ вычисляется матрица $D_1(\lambda) := \nabla_0(\lambda,\mu_1)$ и находится унимодулярная матрица $W_1(\lambda)$, реализующая ΔW-1 разложение однопараметрической полиномиальной матрицы $D_1(\lambda)$.

(β) Вычисляется унимодулярная матрица $W_1^{-1}(\lambda)$, обратная к матрице $W_1(\lambda)$.

(γ) Вычисляются следующие двухпараметрические полиномиальные матрицы:

$$\Delta_1(\lambda,\mu) = \nabla_0(\lambda,\mu)W_1(\lambda),$$

$$B^{(1)}(\lambda,\mu) := W_1^{-1}(\lambda)B^{(0)}(\lambda,\mu), \quad B^{(0)}(\lambda) := B_{\rho n}(\lambda,\mu),$$

$$\nabla_1(\lambda,\mu) = \Delta_1(\lambda,\mu)d_1^{-1}(\mu) = \Delta_1(\lambda,\mu)\text{block diag}\{I_{\rho-1},\, (\mu-\mu_1)^{-1}\},$$

$$C^{(1)}(\lambda,\mu) = d_1(\mu)B^{(1)}(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} (\mu-\mu_1)B_{\rho-1}^{(1)}(\lambda,\mu) \\ b_\rho^{(1)}(\lambda,\mu) \end{bmatrix}.$$

Здесь $B_{\rho-1}^{(1)}(\lambda,\mu)$ и $b_\rho^{(1)}(\lambda,\mu)$ – блоки матрицы $B^{(1)}(\lambda,\mu)$, образованные соответственно из ее первых $\rho-1$ строк и последней строки.

Операции (α)–(γ) повторяются для $\mu=\mu_2$ с матрицами $\nabla_1(\lambda,\mu)$ и $C^{(1)}(\lambda,\mu)$. Процесс заканчивается на шаге q, когда будут вычислены матрицы вида (4.7)

$$\nabla_q(\lambda,\mu) \equiv \nabla(\lambda,\mu) \quad \text{и} \quad C^{(q)}(\lambda,\mu) \equiv C_{\rho n}(\lambda,\mu).$$

(3iii) Равенство (4.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} D(\lambda,\mu) &= \nabla(\lambda,\mu)P(\lambda,\mu)B_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)} \\ &= \nabla(\lambda,\mu)C_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)} = \nabla(\lambda,\mu)R_1(\lambda,\mu), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $R_1(\lambda,\mu) = C_{\rho n}(\lambda,\mu)\frac{1}{\varphi(\mu)}$ – рациональная матрица полного строчного ранга ρ.

(3iv) С помощью метода из §3 находится минимальная факторизация матрицы $R_1^T(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга,

$$R_1^T(\lambda,\mu) = \frac{1}{\varphi(\mu)}C_{\rho n}^T(\lambda,\mu) = S_1(\lambda,\mu)T_1^{-1}(\lambda,\mu), \tag{4.9}$$

так что

$$D(\lambda,\mu) = \nabla(\lambda,\mu)T_1^{-T}(\lambda,\mu)S_1^T(\lambda,\mu), \tag{4.10}$$

Полагая $V(\lambda,\mu) := T_1^{-T}(\lambda,\mu)S_1^T(\lambda,\mu)$, получим разложение вида (4.4) для матрицы $D(\lambda,\mu)$.

(4) К рациональной $m \times \rho$ матрице

$$R_{m\rho}(\lambda, \mu) := K^{-1}(\lambda, \mu)\nabla(\lambda, \mu)$$

полного столбцового ранга ρ применяется метод минимальной факторизации из §3. Тогда

$$R_{m\rho}(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)T_{\rho\rho}^{-1}(\lambda, \mu), \tag{4.11}$$

где $S(\lambda, \mu)$ и $T(\lambda, \mu)$ имеют размеры $m \times \rho$ и $\rho \times \rho$, а матрица $T(\lambda, \mu)$ регулярная. С учетом равенств (4.2), (4.4) и (4.10), матрица $R(\lambda, \mu)$ будет представлена в виде

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)T^{-1}(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu). \tag{4.12}$$

Докажем, что (4.12) есть минимальная факторизация. Действительно, свойства (a)–(c) вытекают из аналогичных свойств минимальной факторизации (4.11) матрицы $R_{m\rho}(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга. Полнота ранга матрицы $V(\lambda, \mu)$ следует из построения последней. Справедливость свойства (d), т.е. отсутствие конечного регулярного спектра у матрицы $N(\lambda, \mu) = [T(\lambda, \mu),\ V(\lambda, \mu)]$, вытекает из свойств матрицы $V(\lambda, \mu)$, которая не имеет конечного регулярного спектра по построению (см. метод ∇V-2 в п. 4.2). Этим завершается обоснование метода построения минимальной факторизации.

Замечания. 1. Минимальная факторизация (3.1) рациональной матрицы $R(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга является частным случаем минимальной факторизации (4.1) матрицы $R(\lambda, \mu)$ произвольного ранга ρ и получается при $V(\lambda, \mu) = I$. Выполнение условия (d), т.е. отсутствие конечного спектра у матрицы $N = [T,\ I]$, в этом случае очевидно.

2. Минимальная факторизация (3.1) матрицы $R(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга является частным случаем несократимой факторизации (2.1) матрицы произвольного ранга. Они отличаются условием (c), выполнение которого для минимальной факторизации влечет его выполнение и для несократимой факторизации.

§5. Спектральные характеристики рациональной матрицы и методы их вычисления

5.1. Определение особых точек. Пусть R есть двухпараметрическая рациональная $m \times n$ матрица ранга ρ. Рассмотрим следующую совокупность рациональных функций:

$$R\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix} = \frac{\eta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}}{\theta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}}, \tag{5.1}$$
$$1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant n, \quad k = 1, \dots, \rho.$$

Здесь $R\left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{smallmatrix}\right)$ – минор порядка k, составленный из элементов матрицы R, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$; через $\bar{i}$ и $\bar{j}$ обозначены мультииндексы $\bar{i} = (i_1, \dots, i_k)$ и $\bar{j} = (j_1, \dots, j_k)$; $\eta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$ и $\theta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$ – попарно взаимно простые полиномы от двух переменных. Обозначим через Ψ НОК всех знаменателей $\theta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$ из совокупности (5.1), так что

$$\Psi = \theta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} \omega^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}},$$

где $\omega^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$ – взаимно простые полиномы для всех $\bar{i} = (i_1 \dots i_k)$, $\bar{j} = (j_1, \dots, j_k)$, $k = 1, \dots, \rho$. Введем обозначение $\varepsilon^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} = \eta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} \omega^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$. Тогда функции (5.1) принимают вид

$$R\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}}{\Psi}, \tag{5.2}$$

$$1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant n, \quad k = 1, \dots \rho.$$

Очевидно, что система нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} = 0, & 1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m; \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant n, \\ \Psi = 0, & k = 1, \dots, \rho, \end{cases} \tag{5.3}$$

не имеет конечных одномерных решений.

Дадим теперь определение конечных особых точек двухпараметрической рациональной матрицы, согласующееся с известным определением конечных особых точек (нулей и полюсов) однопараметрической рациональной матрицы, которое обычно дается с использованием канонической формы Смита–МакМилана [6].

Конечными полюсами и нулями рациональной матрицы R назовем соответственно корни алгебраического уравнения

$$\Psi = 0 \tag{5.4}$$

и корни системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\varepsilon_{\bar{i}\bar{j}}^{(\rho)} = 0, \quad \bar{i} = (i_1 \dots i_\rho), \quad \bar{j} = (j_1 \dots j_\rho), \\ 1 \leqslant i_1 < \dots < j_\rho \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho \leqslant n.\end{gathered} \tag{5.5}$$

Заметим, что уравнение (5.4) имеет только одномерные решения, отвечающие делителям полинома Ψ, тогда как система (5.5) может иметь как нульмерные, так и одномерные решения.

В двухпараметрическом случае, в отличие от однопараметрического, может существовать еще один вид особых точек. Хотя система уравнений (5.3) не имеет одномерных решений, она может иметь нульмерные решения. В дальнейшем последние будем называть точками неопределенности матрицы $R(\lambda, \mu)$.

Заметим, что введенные характеристики инвариантны относительно унимодулярных преобразований рациональной матрицы.

5.2. Вычисление особых точек двухпараметрической рациональной матрицы. Вычисление нулей, полюсов и точек неопределенности рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \mu)$ ранга ρ будем рассматривать в предположении, что она представлена в виде несократимой факторизации. В этом случае вычисление указанных особых точек сводится к определению конечных спектров двухпараметрических полиномиальных матриц. Справедливы следующие утверждения [6].

1. Если рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda, \mu)$ ранга ρ представлена в виде несократимой факторизации (1.3) или (1.4), т.е.

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu) T^{-1}(\lambda, \mu) \quad \text{или} \quad R(\lambda, \mu) = T^{-1}(\lambda, \mu) S(\lambda, \mu),$$

где S и T суть двухпараметрические полиномиальные матрицы размеров $m \times n$ и $n \times n$ или $m \times n$ и $m \times m$, $T(\lambda, \mu)$ регулярная, причем матрица $M = [S, T]^B$ или матрица $N = [T, S]$ соответственно не имеет конечного регулярного спектра, то все конечные полюса матрицы $R(\lambda, \mu)$ совпадают с точками конечного регулярного спектра матрицы T; конечные нули матрицы $R(\lambda, \mu)$ совпадают с точками конечного (регулярного и сингулярного) спектра матрицы S; конечные точки неопределенности совпадают с точками конечного сингулярного спектра матрицы M или матрицы N соответственно.

2. Если рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda, \mu)$ ранга ρ представлена в виде минимальной факторизации (4.1), т.е.

$$R(\lambda, \mu) = S(\lambda, \mu)T^{-1}(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu),$$

где S, T и V суть двухпараметрические полиномиальные матрицы размеров $m \times \rho$, $\rho \times \rho$ и $\rho \times n$ соответственно, T регулярная, а матрицы $M = [S, T]^B$ и $N = [T, V]$ не имеют регулярного и конечного регулярного спектров соответственно, то конечные полюсы, нули и точки неопределенности матрицы $R(\lambda, \mu)$ совпадают соответственно с точками конечного регулярного спектра матрицы T, с объединением конечных (регулярных и сингулярных) спектров матриц S и V и с объединением конечных сингулярных спектров матриц M и N.

Из вышеизложенного следует, что вычисление нулей и полюсов матрицы $R(\lambda, \mu)$ требует представления ее в одном из видов несократимой факторизации с последующим вычислением указанныъ спектров.

5.3. Построение нуль-пространств из полиномиальных решений. При $n > \rho$ сингулярная рациональная матрица $R(\lambda, \mu)$ имеет нетривиальное правое нуль-пространство из полиномиальных решений $x(\lambda, \mu)$, удовлетворяющих соотношению

$$R(\lambda, \mu)x(\lambda, \mu) = 0$$

при любых значениях параметров λ, μ.

Столбцы двухпараметрической полиномиальной $n \times (n - \rho)$ матрицы

$$X(\lambda, \mu) := [x_1(\lambda, \mu), \dots, x_{n-\rho}(\lambda, \mu)]$$

образуют свободный базис правого нуль-пространства $N_c[R]$ матрицы $R(\lambda, \mu)$, если матрица $X(\lambda, \mu)$ не имеет конечного регулярного спектра. При этом базис является минимальным, если матрица $X(\lambda, \mu)$ не имеет бесконечного регулярного спектра.

При $m > \rho$ аналогично определяются левое нуль-пространство рациональной матрицы и его минимальный базис.

Очевидно, что если матрица представлена в виде факторизации (1.3), (1.4) или (4.1), то ее правое нуль-пространство совпадает с правыми нуль-пространствами матриц $S(\lambda, \mu)$ и $V(\lambda, \mu)$ из (1.3) и

(4.1) соответственно, а ее левое нуль-пространство совпадает с левым нуль-пространством матрицы $S(\lambda, \mu)$ из (1.3) и (4.1). Таким образом, для вычисления свободного (минимального) базиса нуль-пространства рациональной матрицы используются методы построения свободного (минимального) базиса нуль-пространства полиномиальной матрицы (см., например, методы, представленные в работах [2, 5]).

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 107–149.
2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 150–165.
3. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 3. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 166–207.
4. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 121–144.
5. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 5. — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 145–170.
6. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *О несократимых факторизациях рациональных матриц и их применении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **219** (1994), 117–156.

Kublanovskaya V. N., Khazanov V. B. To solving problems of algebra for two-parameter matrices. 6.

The paper continues the series of papers devoted to surveying and developing methods for solving problems for two-parameter polynomial and rational matrices. Different types of factorizations of two-parameter rational matrices (including irreducible and minimal ones), methods of computing them, and their applications to solving spectral problems are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 27 сентября 2009 г.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет,
Лоцманская ул. 3, 190008 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: khazanovvb@mail.ru