Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ. 5

Введение

Работа относится к серии статей [1–4], посвященных обзору и разработке методов решения задач алгебры для двухпараметрических полиномиальных и рациональных матриц. В ней рассматриваются методы решения следующих задач: исчерпывание точек смешанного регулярного спектра двухпараметрической матрицы, выполнение операций над скалярными полиномами от двух переменных, вычисление минимального базиса нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы, выделение регулярного ядра матрицы, обращение двухпараметрических регулярных полиномиальных и рациональных матриц и построение псевдообратных матриц, решение систем нелинейных алгебраических уравнений.

Большинство из предлагаемых методов основано на использовании ранговых факторизаций двухпараметрических полиномиальных матриц и на линеаризации задачи с помощью наследственных пучков, рассмотренных в статьях [1–4].

Статья состоит из шести параграфов. В первом параграфе рассматриваются методы исчерпывания из спектра двухпараметрической полиномиальной матрицы $F(\lambda, \mu)$ точек смешанного регулярного спектра. Алгоритмы выполнения операций над скалярными полиномами от двух переменных (как-то: вычисление НОД и НОК последовательности полиномов, деление полиномов, разложение на множители) рассмотрены во втором параграфе. В третьем параграфе предлагаются методы вычисления минимального базиса нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda, \mu)$ и методы выделения из $F(\lambda, \mu)$ ее регулярного ядра. Четвертый и пятый параграфы посвящены обращению и построению псевдообратных для полиномиальных и рациональных матриц. В параграфе 6 предлага-

Ключевые слова : матрица двухпараметрическая, полиномиальная, спектр регулярный, сингулярный, нуль-пространство.

ются методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных.

§1. Исчерпывание точек смешанного регулярного спектра [6]

Ниже приводятся методы, позволяющие вычислять и исчерпывать точки смешанного регулярного спектра из спектра полиномиальной двухпараметрической матрицы в предположении, что исчерпываемая точка не является критической для спектра матрицы и, в частности, не принадлежит ее сингулярному спектру.

1.1. Первый метод применим для произвольной $m \times n$ двухпараметрической матрицы, не имеющей в своем спектре критических точек [1], и основан на методе относительно неприводимой факторизации [1] матричного полинома $F(\lambda, \mu) = F_s(\mu)\lambda^s + \cdots + F_0(\mu)$, т.е. на факторизации вида

$$F(\lambda, \mu) = \Delta_1(\mu)\nabla_1(\lambda)\widehat{F}(\lambda, \mu)\nabla_2^T(\lambda)\Delta_2^T(\mu). \tag{1.1}$$

Здесь $\Delta_1(\mu)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$, $\nabla_1(\lambda)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ – попарно взаимно простые слева матричные полиномы; $\Delta_2^T(\mu)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$, $\nabla_2^T(\lambda)$ и $\widehat{F}(\lambda, \mu)$ – попарно взаимно простые справа матричные полиномы.

Для вычисления разложения (1.1) надо выполнить следующие операции.

(1) Вычислить левый наибольший общий делитель (НОД) матричных полиномов $F_s(\mu)$, ..., $F_0(\mu)$ и получить для них равенства вида

$$F_k(\mu) = \Delta_1(\mu)W_{1k}(\mu), \quad k = s, \dots, 0, \tag{1.2}$$

где $W_{1s}(\mu)$, ..., $W_{10}(\mu)$ – взаимно простые слева матричные полиномы.

Для этого следует

(1i) получить ΔW-1 факторизацию [5] матрицы $\mathfrak{A}(\mu) = [F_s(\mu), \dots, F_0(\mu)]$:

$$\mathfrak{A}(\mu)W(\mu) = [\Delta_1(\mu), \mathbb{O}],$$

где $\Delta_1(\mu)$ – матрица полного столбцового ранга размеров $m \times r$ ($r = \operatorname{rank}\mathfrak{A}(\mu)$);

(1ii) обратить унимодулярную матрицу $W(\mu)$ и записать ее в блочном виде

$$W^{-1}(\mu) = \begin{bmatrix} W_{1s}(\mu) & \dots & W_{10}(\mu) \\ * & \dots & * \end{bmatrix},$$

где $W_{1k}(\mu)$ – матрицы размеров $r \times n$.

(2) Подставить $F_k(\mu)$ в форме (1.2) в $F(\lambda,\mu)$:

$$F(\lambda,\mu) = \Delta_1(\mu)\big[W_{1s}(\mu)\lambda^s + \dots + W_{10}(\mu)\big] \equiv \Delta_1(\mu)\widetilde{F}(\lambda,\mu), \qquad (1.3)$$

где $\widetilde{F}(\lambda,\mu) = W_{1s}(\mu)\lambda^s + \dots + W_{10}(\mu)$, коэффициенты $W_{1s}(\mu), \dots, W_{10}(\mu)$ – взаимно простые слева матричные полиномы.

(3) Записать $\widetilde{F}(\lambda,\mu)$ в виде полинома по степеням μ,

$$\widetilde{F}(\lambda,\mu) = \widetilde{F}_t(\lambda)\mu^t + \dots + \widetilde{F}_0(\lambda),$$

найти левый наибольший общий делитель $\nabla_1(\lambda)$ матричных полиномов $\widetilde{F}_t(\lambda), \dots, \widetilde{F}_0(\lambda)$, и записать их в аналогичном (1.2) виде

$$\widetilde{F}_k(\lambda) = \nabla_1(\lambda)\widetilde{W}_{1k}(\lambda), \quad k = t, \dots, 0. \qquad (1.4)$$

Здесь $\widetilde{W}_{1t}(\lambda), \dots, \widetilde{W}_{10}(\lambda)$ – взаимно простые слева матричные полиномы. Равенство (1.3) с учетом (1.4) можно записать в виде

$$F(\lambda,\mu) = \Delta_1(\mu)\nabla_1(\lambda)F_1(\lambda,\mu), \qquad (1.5)$$

где $F_1(\lambda,\mu) \equiv \widetilde{W}_{1t}(\lambda)\mu^t + \dots + \widetilde{W}_{10}(\lambda)$ – матричный полином, не имеющий своими левыми делителями матричных полиномов от одной переменной.

Для построения разложения (1.1) следует применить шаги (1)–(3) к матричному полиному $F_1^T(\lambda,\mu)$. В результате будет построено разложение

$$F_1^T(\lambda,\mu) = \Delta_2(\mu)\nabla_2(\lambda)F_2(\lambda,\mu). \qquad (1.6)$$

С учетом (1.6), из (1.5) имеем

$$F(\lambda,\mu) = \Delta_1(\mu)\nabla_1(\lambda)\widehat{F}(\lambda,\mu)\nabla_2^T(\lambda)\Delta_2^T(\mu),$$

где $\widehat{F}(\lambda,\mu) \equiv F_2^T(\lambda,\mu)$.

Так полученная матрица $\widehat{F}(\lambda,\mu)$ не будет иметь в своем спектре точек вида (λ,μ_*) и (λ_*,μ), порожденных корнями μ_* и λ_* уравнений

$$\begin{aligned} &\det\Delta_1(\mu) = 0, \quad \det\Delta_2(\mu) = 0, \\ &\det\nabla_1(\lambda) = 0, \quad \det\nabla_2(\lambda) = 0. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Все прочие точки регулярных спектров матриц $\widehat{F}(\lambda,\mu)$ и $F(\lambda,\mu)$ совпадают.

1.2. Второй метод исчерпывания точек спектра вида (λ, μ_*) и (λ_*, μ) применим для регулярных матриц $F(\lambda, \mu)$.

Для вычисления точек (λ, μ_*) спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$ следует выполнить следующие шаги.

(1) Записать $\det F(\lambda, \mu)$ как полином по степеням λ:

$$\det F(\lambda, \mu) = a_m(\mu)\lambda^m + \cdots + a_0(\mu). \tag{1.8}$$

(2) Найти корни μ_{*i} наибольшего общего делителя $\Delta(\mu)$ коэффициентов $a_m(\mu), \dots, a_0(\mu)$. Для этого следует выполнить следующие операции.

(2i) Получить ΔW-1 факторизацию матрицы $\mathfrak{A}(\mu) := [a_m(\mu), \dots, a_0(\mu)]$,

$$\mathfrak{A}(\mu)W(\mu) = \bigl[\delta(\mu), \mathbb{O}\bigr],$$

и найти корни $\delta(\mu) = 0$.

(2ii) Обратить унимодулярную матрицу $W(\mu)$:

$$W^{-1}(\mu) = \begin{bmatrix} \omega_{1m}(\mu) & \dots & \omega_{10}(\mu) \\ * & \dots & * \end{bmatrix},$$

где через $\omega_{1m}(\mu), \dots, \omega_{10}(\mu)$ обозначены элементы первой строки матрицы $W^{-1}(\mu)$. Тогда корни уравнения

$$\omega_{1m}(\mu)\lambda^m + \cdots + \omega_{10}(\mu) = 0 \tag{1.9}$$

дадут искомые точки (λ, μ_{*i}) спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$. Для исчерпывания собственных значений вида (λ_{*j}, μ) следует выполнить шаги (1) и (2), взяв вместо (1.8) в качестве исходного уравнение (1.9), записанное в виде полинома по степеням параметра μ.

1.3. Третий метод применим для матрицы $F(\lambda, \mu)$ полного столбцового ранга. Предполагается, что геометрическая и алгебраическая кратности исчерпываемой точки совпадают.

Для исчерпывания (λ_*, μ) из $F(\lambda, \mu)$ в матрице $F(\lambda, \mu)$ делается замена переменных $\lambda = \lambda' + \lambda_*$, которая переводит точку (λ_*, μ) в точку $(0, \mu)$. К полученной таким образом матрице $F(\lambda, \mu)$ (обозначение остается прежним) применяется метод исчерпывания нулевого собственного значения из полиномиальной (однопараметрической) матрицы полного ранга [5], обобщенный на случай двухпараметрических матриц. Согласно этому методу, строится конечная последовательность двухпараметрических матриц $\{F_k(\lambda, \mu)\}$, $F_0(\lambda, \mu) =$

$F(\lambda,\mu)$,

$$F_{k+1}(\lambda,\mu)=F_k(\lambda,\mu)W^{(k)}(\mu)\,\text{block diag}\left\{I_{r_{k+1}},\mu^{-1}I_{n-r_k}\right\},\quad k=0,\dots,l,$$

где $W^{(k)}(\mu) = [W_1^{(k)}(\mu), W_2^{(k)}(\mu)]$ – унимодулярная матрица, осуществляющая ΔW-1 разложение матрицы $F_k(0,\mu)$, причем $W_2^k(\mu) = \ker F_k(0,\mu)$; r_{k+1} – ранг матрицы $F_k(0,\mu)$ $(r_0 = 0)$, так что $W_1^{(k)}(\mu)$ и $W_2^{(k)}(\mu)$ суть матрицы размеров $n\times r_k$ и $n\times(n-r_k)$.

Обозначим $F_k(\lambda,\mu) = F_{sk}(\mu)\lambda^s + \dots + F_{0k}(\mu)$. Тогда переход от $F_k(\lambda,\mu)$ к $F_{k+1}(\lambda,\mu)$ может быть реализован по формулам

$$F_{q,k+1}(\mu) = \left[F^{(1)}_{q,k+1}(\mu), F^{(0)}_{q,k+1}(\mu)\right],$$

где

$$F^{(1)}_{q,k+1}(\mu) = F^{(1)}_{q,k}(\mu)W_1^{(k)}(\mu),\quad F^{(0)}_{q,k+1}(\mu) = F^{(0)}_{q+1,k}(\mu)\,W_2^{(k)}(\mu)$$

$(q = 0,1,\dots,s)$.

Процесс заканчивается на шаге l, когда будет построена матрица $F_l(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга $(r_l = n)$, не имеющая точек вида $(0,\mu)$ в своем спектре.

Для исчерпывания из спектра $F(\lambda,\mu)$ точек (λ_*,μ) следует предварительно в матрице $F_l(\lambda,\mu)$ сделать замену переменных $\mu = \mu' + \mu_*$, переводящую μ_* в нуль. Затем следует записать полученную матрицу в виде матричного полинома по степеням μ и проделать аналогичные вышеописанным операции исключения точек вида $(\lambda,0)$ из спектра построенного таким образом матричного полинома.

1.4. Четвертый метод применим к матрицам полного ранга. Для определенности считаем $F(\lambda,\mu)$ матрицей полного столбцового ранга, из спектра которой следует исчерпать одномерное собственное значение (λ,μ_*), геометрическая кратность которого совпадает с алгебраической кратностью. Метод требует выполнения следующих операций.

(1) Вычисляется однопараметрическая полиномиальная матрица $F(\lambda,\mu_*)$. Очевидно, уравнение

$$F(\lambda,\mu_*)U(\lambda) = 0$$

имеет решение.

(2) Находится ΔW-1 разложение [5] матрицы $F(\lambda, \mu_*)$:

$$F(\lambda, \mu_*)W_*(\lambda) = \big[\Delta_*(\lambda), \mathbb{O}\big].$$

Здесь $W_*(\lambda)$ – унимодулярная матрица, последние $n - \rho_*$ столбцов которой образуют базис из правых полиномиальных решений $F(\lambda, \mu_*)$ $(\rho_* := \operatorname{rank} F(\lambda, \mu_*))$, $\mathbb{O}$ – нулевая $n \times (n - \rho_*)$ матрица.

(3) Вычисляется двухпараметрическая полиномиальная матрица

$$F_1(\lambda, \mu) = F(\lambda, \mu)W_*(\lambda),$$

для последних $n - \rho_*$ столбцов которой $\mu - \mu_*$ является общим делителем.

(4) Вычисляется матрица

$$\begin{aligned} F_2(\lambda, \mu) &= F_1(\lambda, \mu) \operatorname{block\,diag}\big\{I_{\rho_*}, (\mu - \mu_*)^{-1} I_{n-\rho_*}\big\} \\ &= F(\lambda, \mu)W_*(\lambda) \operatorname{block\,diag}\big\{I_{\rho_*}, (\mu - \mu_*)^{-1} I_{n-\rho_*}\big\}. \end{aligned}$$

Так вычисленная матрица $F_2(\lambda, \mu)$ является искомой двухпараметрической полиномиальной матрицей, спектр которой совпадает со спектром матрицы $F(\lambda, \mu)$, за исключением исчерпанной точки (λ, μ_*).

Замечание. Первый и второй методы исчерпывания предполагают отсутствие критических точек в смешанном регулярном спектре $\sigma_{r2}[F]$. Каждый из методов не только исчерпывает точки $\sigma_{r2}[F]$, но и вычисляет их. Третий и четвертый методы исчерпывают заданную точку множества $\sigma_{r2}[F]$ из спектра $\sigma_r[F]$, если геометрическая и алгебраическая кратности исчерпываемой точки совпадают и она не принадлежит к критическим точкам спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$.

§2. Операции над скалярными полиномами от двух переменных

2.1. Вычисление относительно неприводимой факторизации полиномов от двух переменных. Пусть $f(\lambda, \mu) = d_s(\mu)\lambda^s + \cdots + d_0(\mu)$ – скалярный полином от двух переменных. Здесь $d_k(\mu)$, $k = s, s-1, \ldots, 0$, суть скалярные полиномы от μ. Требуется получить разложение вида

$$f(\lambda, \mu) = \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{f}(\lambda, \mu), \tag{2.1}$$

где $\delta(\mu)$ и $\widehat{\delta}(\lambda)$ – скалярные полиномы, $\widehat{f}(\lambda, \mu)$ – скалярный полином от двух переменных, не имеющий своими делителями полиномов от одной переменной. Для этого нужно выполнить следующие операции.

(1) Найти НОД $\delta(\mu)$ полиномов $d_s(\mu), \dots, d_0(\mu)$ и разложения вида

$$d_k(\mu) = \delta(\mu)\omega_{1k}(\mu), \quad k = s, s-1, \dots, 0, \tag{2.2}$$

используя метод вычисления НОД полиномов от одной переменной (см. [5]).

(2) Принимая во внимание (2.1), записать $f(\lambda, \mu)$ по степеням μ в виде

$$f(\lambda, \mu) = \delta(\mu)[\omega_{1s}(\mu)\lambda^s + \dots + \omega_{10}(\mu)] = \delta(\mu)\big[\widehat{d}_t(\lambda)\mu^t + \dots + \widehat{d}_0(\lambda)\big].$$

(3) Найти $\widehat{\delta}(\lambda)$ – НОД полиномов $\widehat{d}_t(\lambda), \dots, \widehat{d}_0(\lambda)$ и разложения вида

$$\widehat{d}_k(\lambda) = \widehat{\delta}(\lambda)\widehat{\omega}_{1k}(\lambda), \quad k = 0, \dots, t, \tag{2.3}$$

где $\widehat{\omega}_{10}(\lambda), \dots, \widehat{\omega}_{1t}(\lambda)$ являются взаимно простыми полиномами.

(4) Учитывая равенства (2.3) и (2.2), записать $f(\lambda, \mu)$ в искомом виде (2.1)

$$f(\lambda, \mu) = \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{f}(\lambda, \mu),$$

где $\widehat{f}(\lambda, \mu) = \widehat{\omega}_{1t}(\lambda)\mu^t + \dots + \widehat{\omega}_{10}(\mu)$.

Пусть $f_1(\lambda, \mu), \dots, f_n(\lambda, \mu)$ – последовательность скалярных полиномов. Требуется каждый из полиномов $f_k(\lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, n$, представить в виде

$$f_k(\lambda, \mu) = \Delta(\mu)\widehat{\Delta}(\lambda)\widehat{f}_k(\lambda, \mu), \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.4}$$

Здесь $\Delta(\mu)$ и $\widehat{\Delta}(\lambda)$ – скалярные полиномы от одной переменной, являющиеся общими делителями полиномов $f_k(\lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, n$, а последовательность полиномов $\widehat{f}_1(\lambda, \mu), \dots, \widehat{f}_n(\lambda, \mu)$ не имеет своими общими делителями полиномов от одной переменной.

Для вычисления разложений (2.4) надо выполнить следующие операции.

(1) Каждый из полиномов $f_k(\lambda, \mu)$ разложить на относительно неприводимые множители

$$f_k(\lambda, \mu) = \widehat{\delta}_k(\lambda)\delta_k(\mu)\widetilde{f}_k(\lambda, \mu).$$

(2) Используя метод вычисления НОД для полиномов от одной переменной, найти разложения

$$\widehat{\delta}_k(\lambda) = \widehat{\Delta}(\lambda)\widehat{\omega}_{1k}(\lambda), \quad \delta_k(\mu) = \Delta(\mu)\omega_{1k}(\mu), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\widehat{\Delta}(\lambda)$ и $\Delta(\mu)$ – наибольшие общие делители полиномов $\{\widehat{\delta}_1(\lambda), \dots, \widehat{\delta}_n(\lambda)\}$ и $\{\delta_1(\mu), \dots, \delta_n(\mu)\}$ соответственно, а $\widehat{\omega}_{11}(\lambda), \dots, \widehat{\omega}_{1n}(\lambda)$ и $\omega_{11}(\mu), \dots, \omega_{1n}(\mu)$ – взаимно простые полиномы.

(3) Вычислить полиномы

$$\widehat{f}_k(\lambda, \mu) = \widehat{\omega}_{1k}(\lambda)\omega_{1k}(\mu)\overline{f}_k(\lambda, \mu).$$

2.2. Вычисление НОД полиномов от двух переменных. Пусть

$$f_1(\lambda, \mu), f_2(\lambda, \mu), \dots, f_q(\lambda, \mu) \tag{2.5}$$

– заданная последовательность скалярных полиномов, для которых следует найти НОД $h(\lambda, \mu)$ и разложения вида

$$f_k(\lambda, \mu) = h(\lambda, \mu)\omega_k(\lambda, \mu), \quad k = 1, \dots, q, \tag{2.6}$$

где $\omega_k(\lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, q$, – взаимно простые полиномы от двух переменных.

Для вычисления разложений (2.6) требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя метод из п. 2.1, представить каждый полином $f_k(\lambda, \mu)$ из (2.5) в виде

$$f_k(\lambda, \mu) = \Delta_k(\mu)\widehat{\Delta}_k(\lambda)\widehat{f}_k(\lambda, \mu), \quad k = 1, \dots, q. \tag{2.7}$$

(2) Применяя метод вычисления наибольшего общего делителя к последовательностям полиномов от одной переменной $\Delta_1(\mu), ..., \Delta_q(\mu)$ и $\widehat{\Delta}_1(\lambda), \dots, \widehat{\Delta}_q(\lambda)$, найти разложения видов

$$\begin{aligned} \Delta_k(\mu) &= \delta(\mu)u_k(\mu), \\ \widehat{\Delta}_k(\lambda) &= \widehat{\delta}(\lambda)\widehat{u}_k(\lambda), \end{aligned} \qquad k = 1, \dots, q, \tag{2.8}$$

где $u_1(\mu), \dots, u_q(\mu)$ и $\widehat{u}_1(\lambda), \dots, \widehat{u}_q(\lambda)$ суть последовательности взаимно простых полиномов.

(3) С учетом (2.7) и (2.8), каждый полином $f_k(\lambda, \mu)$ из (2.5) записать в виде

$$f_k(\lambda, \mu) = \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)g_k(\lambda, \mu), \tag{2.9}$$

где $g_k(\lambda, \mu) = u_k(\mu)\widehat{u}_k(\lambda)\widehat{f}_k(\lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, q$.

(4) Сформировать двухпараметрическую полиномиальную матрицу

$$G(\lambda, \mu) = [g_1(\lambda, \mu), \dots, g_q(\lambda, \mu)]$$

и, используя ΔW-2 метод [1], найти ее ΔW-2 факторизацию вида

$$G(\lambda, \mu)W(\lambda, \mu) = [g(\lambda, \mu), 0, \dots, 0]. \tag{2.10}$$

Полином $g(\lambda, \mu)$ отличается от искомого НОД $h(\lambda, \mu)$ множителями $\mu - \mu_i^*$, где μ_i^* суть корни $\det W(\lambda, \mu)$, которые, как следует из ΔW-2 метода, определяются в процессе реализации разложения (2.10).

(5) Используя метод из п. 2.1, разложить полином $g(\lambda, \mu)$ на множители:[1]

$$g(\lambda, \mu) = \nabla(\mu)\widehat{h}(\lambda, \mu). \tag{2.11}$$

Здесь $\widehat{h}(\lambda, \mu)$ – полином, не имеющий своими делителями полиномов от переменной μ и от переменной λ.

Тогда искомым НОД последовательности полиномов (2.5) будет полином

$$h(\lambda, \mu) = \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{h}(\lambda, \mu). \tag{2.12}$$

(6) Для построения разложения вида (2.6) следует найти первую строку матрицы $W^{-1}(\lambda, \mu)$ из разложения (2.10). Для этого можно использовать, например, метод следов Фаддеева, т.е. получить $W^{-1}(\lambda, \mu)$ в виде

$$W^{-1}(\lambda, \mu) = \frac{1}{\det W(\lambda, \mu)}\, B_{n-1}(\lambda, \mu),$$

где $B_{n-1}(\lambda, \mu)$ есть союзная для $W(\lambda, \mu)$ матрица.

(7) Записать первую строку $W^{-1}(\lambda, \mu)$ в виде

$$\frac{1}{\det W(\lambda, \mu)}[b_1(\lambda, \mu), \dots, b_q(\lambda, \mu)] = \frac{1}{\nabla(\mu)}\left[\omega_1(\lambda, \mu), \dots, \omega_q(\lambda, \mu)\right]. \tag{2.13}$$

[1]Так как полином $\widehat{\Delta}(\lambda)$ будет отсутствовать, достаточно выполнить только шаги (1) и (2).

Для этого выполняются следующие операции.

(7i) Используя метод из п. 2.1, найти разложения вида

$$b_k(\lambda,\mu) = \beta_k(\mu)\hat{b}_k(\lambda,\mu), \quad k = 1,\dots,q,$$

где $\hat{b}_k(\lambda,\mu)$ не имеют общих делителей, являющихся полиномами от μ.

(7ii) Найти НОД $\widehat{\nabla}(\mu)$ последовательности полиномов $\beta_k(\mu)$, $k = 1,\dots,q$, и разложения вида

$$\beta_k(\mu) = \widehat{\nabla}(\mu)\widetilde{\omega}_k(\mu),$$

где $\widetilde{\omega}_k(\mu)$, $k = 1,\dots,q$, – взаимно простые полиномы.

Тогда $b_k(\lambda,\mu) = \widehat{\nabla}(\mu)\omega_k(\lambda,\mu)$, $\omega_k(\lambda,\mu) := \widehat{\omega}_k(\mu)\widehat{b}_k(\lambda,\mu)$. Отсюда, поскольку $\det W(\lambda,\mu) = \Delta(\mu)\widehat{\nabla}(\mu)$, получим (2.13).

С учетом (2.4)–(2.13), имеем

$$\begin{aligned}\bigl[f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu)\bigr] &= \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\bigl[g_1(\lambda,\mu),\dots,g_q(\lambda,\mu)\bigr]\\ &= \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)h(\lambda,\mu)\bigl[\omega_1(\lambda,\mu),\dots,\omega_q(\lambda,\mu)\bigr],\end{aligned}$$

так что

$$f_k(\lambda,\mu) = h(\lambda,\mu)\omega_k(\lambda,\mu), \quad k = 1,\dots,q. \tag{2.14}$$

Соотношения (2.12) и (2.14) дают соответственно требуемый НОД последовательности полиномов (2.5) и разложения вида (2.6).

2.3. Деление полиномов от двух переменных на общий делитель. Пусть полином $\varphi(\lambda,\mu)$ есть общий делитель последовательности полиномов $f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu)$. Требуется вычислить частные

$$f_k(\lambda,\mu)/\varphi(\lambda,\mu), \quad k = 1,\dots,q.$$

С этой целью выполняются следующие операции.

(1) Используя операции (1)–(3) метода из п. 2.2 для вычисления НОД последовательности полиномов $f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu)$, $f_{q+1}(\lambda,\mu)$, где $f_{q+1}(\lambda,\mu) \equiv \varphi(\lambda,\mu)$, получить разложения вида

$$f_k(\lambda,\mu) = \delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)g_k(\lambda,\mu), \quad k = 1,\dots,q+1. \tag{2.15}$$

(2) Сформировать $1\times(q+1)$ матрицу

$$G(\lambda,\mu) = \bigl[g_1(\lambda,\mu),\dots,g_{q+1}(\lambda,\mu)\bigr]$$

и, используя ΔW-2 метод, найти разложение вида

$$G(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)=\big[g(\lambda,\mu),0,\dots,0\big]. \tag{2.16}$$

(3) Разложить полином $g(\lambda,\mu)$ на относительно неразложимые множители по переменной μ, т.е. представить его в виде (2.1):

$$g(\lambda,\mu)=\nabla(\mu)\widehat{h}(\lambda,\mu). \tag{2.17}$$

Тогда (2.16) примет вид

$$\big[g_1(\lambda,\mu),\dots,g_{q+1}(\lambda,\mu)\big]=\nabla(\mu)\big[\widehat{h}(\lambda,\mu),0,\dots,0\big]W^{-1}(\lambda,\mu). \tag{2.18}$$

(4) Найти первую строку матрицы $W^{-1}(\lambda,\mu)$:

$$\frac{1}{\nabla(\mu)}\big[\omega_1(\lambda,\mu),\dots,\omega_{q+1}(\lambda,\mu)\big].$$

Тогда, с учетом (2.15)–(2.18), будем иметь равенства

$$f_k(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{h}(\lambda,\mu)\omega_k(\lambda,\mu)\equiv h(\lambda,\mu)\omega_k(\lambda,\mu),\quad k=1,\dots,q+1.$$

Очевидно, что $f_{q+1}(\lambda,\mu)\equiv\varphi(\lambda,\mu)$ отличается от НОД $h(\lambda,\mu)$ полиномов $f_1(\lambda,\mu),\dots,f_{q+1}(\lambda,\mu)$ разве лишь числовым множителем (обозначим его через ω_{q+1}). Тогда искомые частные будут определяться равенствами

$$\frac{f_k(\lambda,\mu)}{\varphi(\lambda,\mu)}=\frac{\omega_k(\lambda,\mu)}{\omega_{q+1}},\quad k=1,\dots,q.$$

2.4. Вычисление НОК полиномов от двух переменных. Пусть требуется найти НОК для последовательности полиномов

$$f_1(\lambda,\mu),\dots,f_q(\lambda,\mu). \tag{2.19}$$

Другими словами, требуется найти скалярный полином $k(\lambda,\mu)$ такой, что (с точностью до постоянных множителей) выполняются равенства:

$$k(\lambda,\mu)=f_1(\lambda,\mu)\widetilde{\omega}_1(\lambda,\mu)=\dots=f_q(\lambda,\mu)\widetilde{\omega}_q(\lambda,\mu), \tag{2.20}$$

где $\widetilde{\omega}_1(\lambda,\mu),\dots,\widetilde{\omega}_q(\lambda,\mu)$ суть взаимно простые полиномы.

Для вычисления $k(\lambda,\mu)$ требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя метод из п. 2.2, найти $h(\lambda,\mu)$, т.е. НОД скалярных полиномов (2.19), в виде

$$h(\lambda,\mu)=\delta(\mu)\widehat{\delta}(\lambda)\widehat{h}(\lambda,\mu).$$

(2) Используя метод из п. 2.3, найти $\omega_k(\lambda,\mu)$, $k=1,\ldots,q$, т.е. частные от деления исходных полиномов на их НОД.

(3) Для скалярных полиномов $\omega_k(\lambda,\mu)$, $k=1,\ldots,q$, выполнить следующие шаги. Пусть $\Omega_1(\lambda,\mu)=\omega_1(\lambda,\mu)$.

(3i) Используя алгоритмы из пп. 2.2 и 2.3, для полиномов $\Omega_1(\lambda,\mu)$ и $\omega_2(\lambda,\mu)$ найти их НОД и частные от деления этих двух полиномов на их НОД. Пусть $\gamma_1(\lambda,\mu)$ есть НОД$(\Omega_1(\lambda,\mu),\omega_2(\lambda,\mu))$. Обозначим $\beta_1(\lambda,\mu)=v_1(\lambda,\mu)\cdot v_2(\lambda,\mu)$, где $v_i(\lambda,\mu)$ – частные от деления полиномов $\Omega_1(\lambda,\mu)$ и $\omega_2(\lambda,\mu)$ на их НОД.

(3ii) Построить полином $\Omega_2(\lambda,\mu)=\beta_1(\lambda,\mu)\cdot\gamma_1(\lambda,\mu)$.

(3iii) Для $i=3,\ldots,q$ выполнить шаги (3i) и (3ii) и найти полином $\Omega_{q-1}(\lambda,\mu)$, являющийся НОК полиномов $\omega_1(\lambda,\mu),\ldots,\omega_q(\lambda,\mu)$.

(3iv) Вычислить НОК исходных полиномов $f_1(\lambda,\mu),\ldots,f_q(\lambda,\mu)$ по формуле

$$k(\lambda,\mu)=h(\lambda,\mu)\cdot\Omega_{q-1}(\lambda,\mu).$$

§3 Вычисление минимального базиса нуль-пространства и выделение регулярного ядра двухпараметрической полиномиальной матрицы

Пусть $F(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга ρ. Ниже предлагается метод вычисления минимального базиса нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\mu)$ и методы выделения регулярного ядра матрицы $F(\lambda,\mu)$. При этом предполагается, что выполнены условия их существования. Будем также предполагать, что регулярный спектр матрицы $F(\lambda,\mu)$ не имеет критических точек и, в частности, регулярный и сингулярный спектры не имеют общих точек.

3.1. Метод вычисления минимального базиса. Для определенности будем рассматривать построение минимального базиса нуль-пространства из правых полиномиальных решений $F(\lambda,\mu)$. Вычисление минимального базиса левого нуль-пространства проводится аналогично, если вместо $F(\lambda,\mu)$ взять матрицу $F^T(\lambda,\mu)$.

Полиномиальный базис назовем минимальным, если матрица, составленная из его столбцов, не имеет ни конечного, ни бесконечного регулярного спектра.

Для построения минимального базиса нуль-пространства из правых полиномиальных решений двухпараметрической матрицы $F(\lambda,\mu)$ следует, используя метод ΔW-2 факторизации, найти унимодулярную по λ матрицу $W(\lambda,\mu)$, реализующую разложение вида

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu), \mathbb{O}],$$

где $\Delta(\lambda,\mu)$ – $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга. Матрицу $W(\lambda,\mu)$ запишем в блочном виде $W(\lambda,\mu) = [W_1(\lambda,\mu),\ W_0(\lambda,\mu)]$, где столбцы $n \times (n-\rho)$ матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ образуют базис искомого нуль-пространства. Он может отличаться от искомого минимального базиса присутствием точек (λ,μ_i) конечного регулярного спектра матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ и точек спектра $F(\lambda,\mu)$, имеющих вид (∞,μ) и (λ,∞). Исключение точек (λ,μ_i) из спектра $W_0(\lambda,\mu)$ осуществляется с помощью метода относительно неприводимой факторизации [1], применяемого к матричному полиному

$$W_0^T(\lambda,\mu) := P_s(\mu)\lambda^s + \cdots + P_0(\mu),$$

и сводится к выполнению следующих шагов.

(1) Для матричных полиномов $P_k(\mu)$, $k = 0,\ldots,s$, вычисляется регулярная матрица $\nabla(\mu)$, т.е. их левый наибольший общий делитель, а также ∇V-1 разложения вида

$$P_k(\mu) = \nabla(\mu)\, V_k(\mu), \quad k = 0,1,\ldots,s,$$

где $\nabla(\mu)$ – матрица, спектр которой состоит из исчерпываемых точек (λ,μ_i); $V_k(\mu)$, $k = 0,\ldots,s$, есть последовательность взаимно простых слева матричных полиномов, так что спектр матрицы $V(\mu) := [V_s(\mu),\ldots,V_0(\mu)]$ не содержит точек (λ,μ_i), которые следовало бы исчерпать.

(2) Матрица $W_0(\lambda,\mu)$ записывается в виде

$$W_0(\lambda,\mu) = U_0(\lambda,\mu)T(\mu), \tag{3.1}$$

где

$$U_0(\lambda,\mu) := \sum_{k=0}^{\sigma} V_k^T(\mu)\lambda^k, \quad T(\mu) = \nabla^T(\mu).$$

Столбцы матрицы $U_0(\lambda,\mu)$ образуют свободный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F(\lambda,\mu)$ и, по построению, спектр матрицы $U_0(\lambda,\mu)$ не содержит точек (λ,μ_i), если пересечение регулярного и сингулярного спектров матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ есть пустое множество..

Исключение из спектра матрицы $U_0(\lambda,\mu)$ точек вида (∞,μ) требует выполнения следующих шагов.

(3) К матрице $U_0(\lambda,\mu)$, записанной в виде матричного полинома

$$U_0(\lambda,\mu)=\sum_{k=0}^{\sigma} V_k^T(\mu)\lambda^k,$$

применяется метод ΔW-2 факторизации (λ – ведущий параметр):

$$U_0(\lambda,\mu)W^{(1)}(\lambda,\mu)=\Delta^{(1)}(\lambda,\mu).$$

Нулевой блок в правой части этого разложения будет отсутствовать, так как $U_0(\lambda,\mu)$ имеет полный столбцовый ранг. Матрица $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ не будет иметь в своем спектре точек вида (∞,μ), даже если они присутствуют в спектре матрицы $W_0(\lambda,\mu)$, так как, по свойствам ΔW-2 факторизации, матрица $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ может иметь только конечный по λ спектр. Таким образом, столбцы матрицы $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ образуют базис, спектр которого не содержит ни конечных точек (λ,μ_i), ни бесконечных точек (∞,μ). При этом наличие точек (λ,∞) в спектре матрицы $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ не исключается.

(4) Для удаления точек вида (λ,∞) матрица $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ записывается по степеням параметра μ в виде

$$\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)=P_r^{(1)}(\lambda)\mu^r+\cdots+P_0^{(1)}(\lambda).$$

К $\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)$ применяется ΔW-2 метод, в котором μ считается ведущим параметром. В результате будет построено разложение вида

$$\Delta^{(1)}(\lambda,\mu)W^{(2)}(\lambda,\mu)=\Delta^{(2)}(\lambda,\mu).$$

При этом столбцы матрицы $\Delta^{(2)}(\lambda,\mu)$ образуют искомый минимальный базис правого нуль-пространства $F(\lambda,\mu)$, не содержащий ни конечного, ни бесконечного регулярного спектра. Так что спектр $\Delta^{(2)}(\lambda,\mu)$ состоит только из сингулярных собственных значений матрицы $F(\lambda,\mu)$. В дальнейшем так построенный базис будем попрежнему обозначать через $W_0(\lambda,\mu)$.

3.2. Выделение регулярного ядра. Регулярным ядром двухпараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\lambda,\mu)$ ранга ρ называется регулярная двухпараметрическая полиномиальная $\rho \times \rho$ матрица, спектр которой совпадает с конечным регулярным спектром матрицы $F(\lambda,\mu)$.

Для вычисления регулярного ядра $F(\lambda,\mu)$ предлагаются следующие методы, реализация которых предполагает отсутствие точек пересечения регулярного и сингулярного спектров матрицы $F(\lambda,\mu)$, а также отсутствие критических точек в спектре этой матрицы.

Первый метод требует выполнения следующих операций.

(1) К матрице $F(\lambda,\mu)$ применяется ΔW-2 метод для построения матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$, спектр которой содержит конечный смешанный регулярный спектр исходной матрицы. В результате будет получено разложение вида

$$F(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu), \mathbb{O}]. \tag{3.2}$$

(2) Из спектра матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$ исчерпываются посторонние точки вида (λ,μ_i), входящие в спектр $\widehat{\sigma}[W]$ матрицы $W(\lambda,\mu)$. Заметим, что эти собственные прямые определяются при выполнении разложения (3.2) и не требуют вычисления матрицы $W(\lambda,\mu)$. Здесь через $\widehat{\sigma}[W]$ обозначен спектр $W(\lambda,\mu)$, не принадлежащий спектру $W_0(\lambda,\mu)$.

Для исчерпывания требуется выполнить следующие шаги[2].

(2i) Для фиксированного $\mu = \mu_1$ вычисляются матрица $\Delta(\lambda,\mu_1)$ и ее ΔW-1 разложение

$$\Delta(\lambda,\mu_1)U_1(\lambda) = [\nabla_1(\lambda), \mathbb{O}],$$

где $U_1(\lambda)$ – унимодулярная матрица, $\mathbb{O}$ – нулевая $\rho\times(\rho-\rho_1)$ матрица, $\rho_1 = \operatorname{rank}\Delta(\lambda,\mu_1)$.

(2ii) Вычисляется матрица $\Delta(\lambda,\mu)U_1(\lambda)$.

(2iii) Последние $\rho-\rho_1$ столбцов вычисленной матрицы делятся на общий делитель $(\mu-\mu_1)$. В результате будет построена двухпараметрическая полиномиальная матрица

$$\Delta_1(\lambda,\mu) = \Delta(\lambda,\mu)U_1(\lambda)\,(\text{block})\operatorname{diag}\left\{I_{\rho_1},\,(\mu-\mu_1)^{-1}I_{\rho-\rho_1}\right\},$$

[2]Здесь и ниже для простоты рассуждений мы предполагаем, что кратность исчерпываемой точки равна единице.

спектр которой не содержит точки (λ, μ_1). Все прочие точки спектров $\Delta(\lambda, \mu)$ и $\Delta_1(\lambda, \mu)$ совпадают.

(3) Процесс исчерпывания следующей точки (λ, μ_2) аналогично проводится для матрицы $\Delta_1(\lambda, \mu)$.

В результате исчерпывания k точек (шаги (2i)–(2iii)) будет построена матрица $\Delta_k(\lambda)$ размеров $n \times \rho$ ранга ρ, спектр и левые полиномиальные решения которой совпадают с таковыми для матрицы $F(\lambda, \mu)$.

(4) Находится ΔW-2 разложение матрицы

$$\widetilde{\Delta}(\lambda, \mu) := \Delta_k^T(\lambda, \mu) \equiv \widetilde{\Delta}(\lambda, \mu)\widetilde{W}(\lambda, \mu) = [\widetilde{\nabla}(\lambda, \mu), \mathbb{O}],$$

где $\widetilde{\nabla}(\lambda, \mu)$ есть $\rho \times \rho$ матрица, отличающаяся от искомого регулярного блока матрицы $F(\lambda, \mu)$ разве лишь присутствием посторонних точек, исчерпывание которых осуществляется аналогичного шагу (2), если в качестве исходной взять матрицу $\widetilde{\nabla}(\lambda, \mu)$.

В результате исчерпывания всех посторонних точек будет получена регулярная матрица, спектр которой совпадает с регулярным конечным спектром исходной матрицы $F(\lambda, \mu)$.

Второй метод не требует предварительного вычисления исчерпываемых точек и позволяет получать регулярное ядро в факторизованном виде. Для этого требуется выполнить следующие операции.

(1) Для построения матрицы $\Delta(\lambda, \mu)$ к матрице $F(\lambda, \mu)$ применяется метод ΔW-2 факторизации.

(2) К матрице $\Delta^T(\lambda, \mu)$ применяется метод относительно неприводимой факторизации, позволяющий получить разложение вида

$$\Delta^T(\lambda, \mu) = F_1(\mu)F_2(\lambda)F_{12}(\lambda, \mu).$$

Здесь $F_i(\cdot)$ – однопараметрическая полиномиальная $\rho \times \rho$ матрица, а $F_{12}(\lambda, \mu)$ – двухпараметрическая $\rho \times m$ матрица ранга ρ, не имеющая в своем спектре точек вида (λ, μ_*) и (λ_*, μ).

(3) К матрице $F_{12}(\lambda, \mu)$ полного строчного ранга применяется метод ∇V-2 факторизации [2] для построения разложения вида

$$F_{12}(\lambda, \mu) = \nabla(\lambda, \mu)V(\lambda, \mu).$$

Здесь $\nabla(\lambda, \mu)$ – регулярная двухпараметрическая полиномиальная $\rho \times \rho$ матрица, конечный спектр которой совпадает со спектром $F_{12}(\lambda, \mu)$;

$V(\lambda,\mu)$ – двухпараметрическая полиномиальная $\rho \times m$ матрица, не имеющая конечного регулярного спектра; спектр $V(\lambda,\mu)$ совпадает с левым сингулярным спектром $F(\lambda,\mu)$.

В результате выполнения операций (1)–(3) будет построено разложение вида

$$\Delta(\lambda,\mu) = U(\lambda,\mu)T(\lambda,\mu),$$

где $U(\lambda,\mu) := V^T(\lambda,\mu)$; $T(\lambda,\mu) := \nabla^T(\lambda,\mu)F_2^T(\lambda)F_1^T(\mu)$ есть регулярное ядро $F(\lambda,\mu)$, представленное в факторизованном виде, так что конечный регулярный спектр $F(\lambda,\mu)$ совпадает с корнями уравнений

$$\det F_1(\mu) = 0, \quad \det F_2(\lambda) = 0, \quad \det \nabla(\lambda,\mu) = 0.$$

§4. Обращение регулярных двухпараметрических полиномиальных и рациональных матриц

Ниже приводятся методы обращения регулярной полиномиальной $n \times n$ матрицы $F(\lambda,\mu)$ и регулярной рациональной $n \times n$ матрицы $R(\lambda,\mu)$. Методы основаны на применении метода следов Д. К. Фаддева к обращению функциональных матриц [3].

4.1. Построение $F^{-1}(\lambda,\mu)$. Для вычисления $F^{-1}(\lambda,\mu)$ находятся две последовательности $\{A_k(\lambda,\mu)\}$ и $\{B_k(\lambda,\mu)\}$, $k = 1,\dots,n$, двухпараметрических полиномиальных матриц, а также последовательность $\{q_k(\lambda,\mu)\}$, $k = 1,\dots,n$, скалярных полиномов от двух переменных.

Положим $B_0(\lambda,\mu) = I$, где I – единичная матрица. Тогда вычисления реализуются по формулам

$$\begin{aligned} &A_{k+1}(\lambda,\mu) = F(\lambda,\mu)B_k(\lambda,\mu), \quad q_{k+1}(\lambda,\mu) = \frac{1}{k+1}\mathrm{tr}A_{k+1}(\lambda,\mu),\\ &B_{k+1}(\lambda,\mu) = A_{k+1}(\lambda,\mu) - q_{k+1}I, \quad k = 0,1,\dots,n-1. \end{aligned}$$

Искомая матрица $F^{-1}(\lambda,\mu)$ вычисляется по формуле

$$F^{-1}(\lambda,\mu) = \frac{1}{q_n(\lambda,\mu)}B_{n-1}(\lambda,\mu),$$

при этом $B_n(\lambda,\mu)$ есть нулевая матрица.

4.2 Для построения обратной матрицы $R^{-1}(\lambda,\mu)$ для регулярной двухпараметрической рациональной $n \times n$ матрицы $R(\lambda,\mu)$ вычисляются две последовательности регулярных двухпараметрических рациональных матриц $\{A_k(\lambda,\mu)\}$, $\{B_k(\lambda,\mu)\}$, $k = 1,\dots,n$, и последовательность рациональных функций $\{q_k(\lambda,\mu)\}$, $k = 1,\dots,n$, от двух переменных. Предварительно исходная матрица $R(\lambda,\mu)$ записывается в виде

$$R(\lambda,\mu)=K^{-1}(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu),$$

где $K(\lambda,\mu)$ и $D(\lambda,\mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные $n\times n$ матрицы. В качестве $K(\lambda,\mu)$ можно взять, например, матрицу вида $K(\lambda,\mu)=\operatorname{diag}\{k_1(\lambda,\mu),\dots,k_n(\lambda,\mu)\}$, где $k_i(\lambda,\mu)$ есть НОК знаменателей элементов i-ой строки матрицы $R(\lambda,\mu)$; $D(\lambda,\mu)=K(\lambda,\mu)R(\lambda,\mu)$.

Шаг k состоит в выполнении следующих операций.

(1) Матрица $B_k(\lambda,\mu)$ представляется в факторизованном виде как

$$B_k(\lambda,\mu)=\widehat{D}_k(\lambda,\mu)\widehat{K}_k^{-1}(\lambda,\mu),$$

где $\widehat{K}_k(\lambda,\mu)=\operatorname{diag}\{\widehat{k}_1(\lambda,\mu),...,\widehat{k}_n(\lambda,\mu)\}$, $\widehat{D}_k(\lambda,\mu)=B_k(\lambda,\mu)\widehat{K}_k(\lambda,\mu)$. Здесь $\widehat{k}_i(\lambda,\mu)$ есть НОК знаменателей элементов i-го столбца матрицы $B_k(\lambda,\mu)$.

(2) Рациональная матрица $A_{k+1}(\lambda,\mu)$ вычисляется в следующем факторизованном виде:

$$\begin{aligned}A_{k+1}(\lambda,\mu)=R(\lambda,\mu)B_k(\lambda,\mu)&=K^{-1}(\lambda,\mu)D(\lambda,\mu)\widehat{D}_k(\lambda,\mu)\widehat{K}_k^{-1}(\lambda,\mu)\\&=K^{-1}(\lambda,\mu)\widetilde{D}_k(\lambda,\mu)\widehat{K}_k^{-1}(\lambda,\mu),\end{aligned}$$

где $\widetilde{D}_k(\lambda,\mu):=D(\lambda,\mu)\widehat{D}_k(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная матрица.

(3) Вычисляется след рациональной матрицы $A_{k+1}(\lambda,\mu)$. Для этого $A_{k+1}(\lambda,\mu)$ записывается в виде матрицы с рациональными элементами $r_{ij}^{(k+1)}(\lambda,\mu)$, так что $\operatorname{tr}A_{k+1}(\lambda,\mu)=\sum\limits_{i=1}^{n}r_{ii}^{(k+1)}(\lambda,\mu)$.

(4) Вычисляется рациональная матрица

$$B_{k+1}(\lambda,\mu)=A_{k+1}(\lambda,\mu)-q_{k+1}(\lambda,\mu)I,$$

где

$$q_{k+1}(\lambda,\mu)=\frac{1}{k+1}\operatorname{tr}A_{k+1}(\lambda,\mu).$$

Операции (1)–(4) выполняются для $k=0,1,\dots,n-1$. Искомая матрица $R^{-1}(\lambda,\mu)$ вычисляется по формуле

$$R^{-1}(\lambda,\mu)=\frac{1}{q_n(\lambda,\mu)}B_{n-1}(\lambda,\mu).$$

При этом $B_n(\lambda,\mu)$ есть нулевая $n\times n$ матрица.

§5. Построение псевдообратных для двухпараметрических полиномиальных и рациональных матриц

5.1. Пусть $F(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга m.

Для вычисления матрицы $F^+(\lambda,\mu)$, псевдообратной к матрице $F(\lambda,\mu)$, используя метод ∇V-2 факторизации [2], представим $F(\lambda,\mu)$ в виде[3]

$$F(\lambda,\mu)=\nabla(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu). \tag{5.1}$$

Здесь $\nabla(\lambda,\mu)$ есть регулярная двухпараметрическая $m\times m$ матрица, спектр которой совпадает с регулярным спектром $F(\lambda,\mu)$; $V(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая $m\times n$ матрица, не имеющая регулярного спектра. Тогда искомая матрица $F^+(\lambda,\mu)$ может быть представлена в виде

$$F^+(\lambda,\mu)=V^T(\lambda,\mu)[V(\lambda,\mu)V^T(\lambda,\mu)]^{-1}[\nabla^T(\lambda,\mu)\nabla(\lambda,\mu)]^{-1}\nabla^T(\lambda,\mu).$$

5.2. Пусть $R(\lambda,\mu)$ есть рациональная двухпараметрическая $m\times n$ матрица. В предположении, что для $R(\lambda,\mu)$ существует минимальная несократимая факторизация, представим $R(\lambda,\mu)$ в виде

$$R(\lambda,\mu)=S(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)V(\lambda,\mu). \tag{5.2}$$

Здесь $S(\lambda,\mu)$, $T(\lambda,\mu)$ и $V(\lambda,\mu)$ суть двухпараметрические полиномиальные матрицы размеров $m\times\rho$, $\rho\times\rho$ и $\rho\times n$ соответственно; $T(\lambda,\mu)$ – регулярная матрица. При этом ни одна из матриц $\left[\begin{smallmatrix}S(\lambda,\mu)\\ T(\lambda,\mu)\end{smallmatrix}\right]$ и $[T(\lambda,\mu),V(\lambda,\mu)]$ не имеет конечного регулярного спектра. Равенство (5.2) может быть найдено методом из статьи [5] настоящего сборника. Тогда псевдообратная матрица $R^+(\lambda,\mu)$ для $R(\lambda,\mu)$ будет иметь вид

$$R^+(\lambda,\mu) \\ =V^T(\lambda,\mu)\big[V(\lambda,\mu)V^T(\lambda,\mu)\big]^{-1}T(\lambda,\mu)\big[S^T(\lambda,\mu)S(\lambda,\mu)\big]^{-1}S^T(\lambda,\mu).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что так построенные псевдообратные матрицы $F^+(\lambda,\mu)$ и $R^+(\lambda,\mu)$ удовлетворяют четырем аксиомам:

$$AA^+A=A,\quad A^+AA^+=A^+,\quad (AA^+)^T=AA^+,\quad (A^+A)^T=A^+A.$$

Замечание. Построение псевдообратных матриц $F^+(\lambda,\mu)$ и $R^+(\lambda,\mu)$ можно реализовать аналогичным образом и при использовании других видов ранговых факторизаций матриц $F(\lambda,\mu)$ и $R(\lambda,\mu)$.

[3]Предполагается, что условия существования ∇V-2 факторизации матрицы $F(\lambda,\mu)$ выполнены.

§6. Методы решения системы нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных (СНАУ-2)

Пусть

$$f_k(\mu_1,\mu_2)=0,\quad k=1,\dots,m, \tag{6.1}$$

– система нелинейных алгебраических уравнений, решения которой следует вычислить. Здесь $f_k(\mu_1,\mu_2)$ суть скалярные полиномы от двух переменных. При этом не исключается наличие в (6.1) также и скалярных полиномов от одной переменной.

Задача вычисления одномерных и нульмерных решений системы (6.1) заменяется задачей вычисления точек конечного спектра двухпараметрической полиномиальной $1\times m$ матрицы

$$F(\mu_1,\mu_2):=[f_1(\mu_1,\mu_2),\dots,f_m(\mu_1,\mu_2)], \tag{6.2}$$

регулярный и сингулярный спектры которой образуют соответственно одномерные и нульмерные решения системы (6.1).

Для вычисления точек конечного спектра $\sigma[F]=\sigma_r[F]\cup\sigma_s[F]$ предлагаются четыре метода. При этом предполагается выполнение условия $\sigma_r[F]\cap\sigma_s[F]=\varnothing$.

6.1. Первый метод решения СНАУ-2. Метод состоит из двух стадий. На первой стадии матрица $F(\mu_1,\mu_2)$ представляется в виде

$$F(\mu_1,\mu_2)=\delta_1(\mu_1)\delta_2(\mu_2)\widehat{F}(\mu_1,\mu_2), \tag{6.3}$$

где $\delta_1(\mu_1)$ и $\delta_2(\mu_2)$ суть скалярные полиномы, корни которых μ_{1i}, μ_{2j}, $i=1,\dots,p$, $j=1,\dots,r$, являются точками смешанного регулярного спектра $\sigma_{r2}[F]$ матрицы $F(\mu_1,\mu_2)$, т.е. образуют одномерные решения $\mu=\mu_{1i}$, $\mu=\mu_{2j}$ СНАУ-2; $\widehat{F}(\mu_1,\mu_2)=[\widehat{f}_1(\mu_1,\mu_2),\dots,\widehat{f}_m(\mu_1,\mu_2)]$ – двухпараметрическая полиномиальная $1\times m$ матрица, конечный спектр которой содержит точки собственного регулярного спектра $\sigma_{r1}[F]$ и точки сингулярного спектра $\sigma_s[F]$ матрицы $F(\mu_1,\mu_2)$. Для вычисления разложения (6.3) используется метод относительно неприводимой факторизации [1].

На второй стадии метода вычисляются точки регулярного и сингулярного спектров $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_s[F]$ матрицы $F(\mu_1,\mu_2)$. С этой целью матрица $\widehat{F}(\mu_1,\mu_2)$ записывается в виде матричного полинома по каждому из параметров, т.е. в видах

$$\widehat{F}_1(\lambda,\mu)=\sum_{k=0}^{s}C_k(\mu)\lambda^k,\quad \mu=\mu_2,\quad \lambda=\mu_1, \tag{6.4}$$

и

$$\widehat{F}_2(\mu,\lambda) = \sum_{k=0}^{t} \widehat{C}_k(\lambda)\mu^k, \quad \mu = \mu_1, \quad \lambda = \mu_2. \tag{6.5}$$

Объединение спектров матриц (6.4) и (6.5) образует искомые спектры $\sigma_{r1}[\widehat{F}]$ и $\sigma_s[\widehat{F}]$.

Вычисление спектров матриц $\widehat{F}_1$ и $\widehat{F}_2$ проводится по одному и тому же плану. Для определенности рассмотрим вычисление спектра матрицы $\widehat{F}_1(\lambda,\mu)$. С этой целью к матрице $\widehat{F}_1(\lambda,\mu) := [\widehat{f}(\lambda,\mu),\dots,\widehat{f}_m(\lambda,\mu)]$ применяется, например, метод наследственных пучков, рассмотренный в статье [4] настоящего сборника. В соответствии с этим методом выполняются следующие операции.

(1) Матрица $\widehat{F}_1(\lambda,\mu)$ представляется в виде

$$\widehat{F}_1(\lambda,\mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda), \tag{6.6}$$

где $F_1(\mu) = [c_s(\mu),\dots,c_0(\mu)]$, $\Lambda_1(\lambda) = [\lambda^s I_m,\dots,\lambda^0 I_m]^B$.

(2) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1,\dots,r$, матрицы $F_1(\mu)$.

(3) Для каждого фиксированного μ_i вычисляется матрица $F_1(\mu_i)$ и ортонормированный базис Q_i ее правого нуль-пространства.

(4) Вычисляются все различные собственные значения λ_{ji}, $j = 1,\dots,p_i$, пучка постоянных матриц $D_i(\lambda) := Q_+^{(i)} - \lambda Q_-^{(i)}$, где $Q_+^{(i)}$ и $Q_-^{(i)}$ – матрицы, составленные соответственно из ms первых и ms последних строк матрицы Q_i.

Пары (λ_{ji},μ_i), $i = 1,\dots,r$, $j = 1,\dots,p_i$, так вычисленных чисел образуют точки $\sigma_{r1}[\widehat{F}] \subset \sigma_r[F]$, т.е. одномерные решения системы (6.1). К одномерным решениям системы относятся также и собственные значения μ_k матрицы $F_1(\mu)$, для которых пучок $D_k(\lambda)$ не имеет регулярного спектра, если $F(\lambda,\mu_k) = 0$.

Для вычисления нульмерных решений системы (6.1) надо выполнить следующие операции.

(1) Найти свободный базис $W^{(1)}(\mu)$ правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F_1(\mu)$ из равенства (6.6).

(2) Образовать пучок $D_1(\lambda,\mu) := W_+^{(1)}(\mu) - \lambda W_-^{(1)}(\mu)$ полиномиальных матриц, составленных соответственно из ms первых и ms последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

(3) Выделить регулярное ядро $D_l(\lambda, \mu) = W_+^{(l)}(\lambda) - \lambda W^{(l)}(\mu)$ пучка $D_1(\lambda, \mu)$, используя, например, метод построения попарно согласованных пучков [4] и взяв в качестве начального пучок $D_1(\lambda, \mu)$. Отсутствие регулярного ядра будет означать отсутствие нульмерных решений у системы (6.1).

(4) Вычислить все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \ldots, t$, матрицы $[-W_-^{(l)}(\mu), W_+^{(l)}(\mu)]$.

(5) Для каждого фиксированного μ_i вычислить последовательность полиномов от одной переменной $\widehat{f}_k(\lambda, \mu_i)$, $k = 1, \ldots, m$, и найти наибольший общий делитель $g_i(\lambda)$ полиномов $\widehat{f}_k(\lambda, \mu_i)$, $k = 1, \ldots, m$.

(6) Вычислить все различные корни λ_{ji}, $j = 1, \ldots, p_i$, полинома $g_i(\lambda)$.

Пары (λ_{ji}, μ_i), вычисленные для всех $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, p_i$, образуют нульмерные решения системы (6.1).

6.2. Второй метод решения СНАУ-2. Метод отличается от метода из п. 6.1 только первой стадией. На первой стадии находятся одномерные решения системы, т.е. точки регулярного спектра $\sigma_r[\widehat{F}_1]$. С этой целью выполняются следующие операции.

(1) К матрице $\widehat{F}_1(\lambda, \mu)$ из (6.3) применяется метод ∇V-2 факторизации, т.е. находится разложение

$$\widehat{F}_1(\lambda, \mu) = \nabla(\lambda, \mu) V(\lambda, \mu). \tag{6.7}$$

Здесь $\nabla(\lambda, \mu)$ есть скалярный полином от двух переменных, нули которого совпадают с регулярным спектром $\sigma_r[\widehat{F}_1] = \sigma_{r1}[\widehat{F}_1] \cup \sigma_{r2}[\widehat{F}_1]$ матрицы $\widehat{F}_1(\lambda, \mu)$. Спектр двухпараметрической полиномиальной $1 \times m$ матрицы $V(\lambda, \mu) = [v_1(\lambda, \mu), \ldots, v_m(\lambda, \mu)]$ содержит сингулярный спектр матрицы $\widehat{F}_1(\lambda, \mu)$.

(2) Вычисляются регулярные корни полинома $\nabla(\lambda, \mu)$, представленного в виде относительно неприводимой факторизации [3], т.е. в виде

$$\nabla(\lambda, \mu) = \widehat{\delta}_1(\lambda) \widehat{\delta}_1(\mu) \widehat{\delta}_{12}(\lambda, \mu).$$

Нули $\nabla(\lambda, \mu)$ являются одномерными решениями системы (6.1).

На вторй стадии вычисляются нульмерные решения системы (6.1), т.е. точки сингулярного спектра матрицы $\widehat{F}_1(\lambda, \mu)$. Реализация второй стадии аналогична методу из п. 6.1 для вычисления сингулярного спектра.

6.3. Третий метод решения СНАУ-2. Матрица $\widehat{F}_1(\lambda,\mu)$ из (6.3) записывается в виде сопровождающего пучка [3]

$$\widehat{F}_1(\lambda,\mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu) \equiv D(\lambda,\mu),$$

где

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & C_0(\lambda) \\ -1 & \dots & & C_1(\lambda) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & C_{s-1}(\mu) \end{bmatrix},$$

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} -1 & & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \mathbb{O} \\ & & 0 & -C_s(\mu) \end{bmatrix}.$$

Для вычисления конечного спектра $D(\lambda,\mu)$, т.е. для вычисления решений системы (6.1), к пучку $D(\lambda,\mu)$ можно применить, например, методы статьи [4] настоящего сборника.

6.4. Четвертый метод решения СНАУ-2. Предлагаемый метод [7] решения системы (6.1) отличается от методов, рассмотренных выше, только первой стадией. На первой стадии метода вычисляются одномерные решения системы (6.1), при этом решение системы (6.1) заменяется решением системы

$$\widehat{f}_k(\lambda,\mu) = 0, \quad k = 1,\dots,m. \tag{6.8}$$

Для решения системы (6.8) выполняются следующие операции.

(1) Каждый полином $\widehat{f}_k(\lambda,\mu)$, $k = 1,\dots,m$, представляется в виде относительно неприводимой факторизации:

$$\widehat{f}_k(\lambda,\mu) = f_1^{(k)}(\lambda) f_2^{(k)}(\mu) f_{12}^{(k)}(\lambda,\mu). \tag{6.9}$$

Здесь $f_1^{(k)}(\lambda)$ и $f_2^{(k)}(\mu)$ – алгебраические полиномы от одной переменной; $f_{12}^{(k)}(\lambda,\mu)$ – полином от двух переменных, не имеющий своими делителями полиномов от одной переменной.

Для вычисления разложения (6.9) выполняются следующие шаги.

(1i) Полином $\widehat{f}_k(\lambda,\mu)$ записывается в виде полинома по степеням параметра λ:

$$\widehat{f}_k(\lambda,\mu)=\sum_{i=0}^{t_1} a_i^{(k)}(\mu)\lambda^i.$$

(1ii) Находятся НОД $f_2(\mu)$ полиномов $a_i^{(k)}(\mu)$, $i=0,1,\dots,t_1$, и разложения

$$a_i^{(k)}(\mu)=f_2^{(k)}(\mu)\widehat{a}_i^{(k)}(\mu),\quad i=0,1,\dots,t_1,$$

где $\widehat{a}_i^{(k)}(\mu)$, $i=0,1,\dots,t_1$, суть взаимно простые полиномы.

В результате выполнения шагов (1i)–(1ii) находится представление

$$f_k(\lambda,\mu)=f_2^{(k)}(\mu)\sum_{i=0}^{t_1}\widehat{a}_i^{(k)}(\mu)\lambda^i. \tag{6.10}$$

(1iii) Полином $\sum\limits_{i=0}^{t_1} a_i^{(k)}(\mu)\lambda^i := g_k(\lambda,\mu)$ записывается как полином по степеням μ:

$$g_k(\lambda,\mu)=\sum_{i=0}^{t_2} b_i^{(k)}(\lambda)\mu^k.$$

(1iv) Находятся НОД $f_1^{(k)}(\lambda)$ полиномов $b_i^{(k)}(\lambda)$, $i=0,\dots,t_2$, и разложения

$$b_i^{(k)}(\lambda)=f_1^{(k)}(\lambda)\widehat{b}_i^{(k)}(\lambda).$$

В результате выполнения шагов (1iii)–(1iv) мы имеем представление

$$\widehat{f}^{(k)}(\lambda,\mu)=f_1^{(k)}(\lambda)f_2^{(k)}(\mu)f_{12}^{(k)}(\lambda,\mu),$$

где $f_{12}^{(k)}(\lambda,\mu):=\sum\limits_{i=0}^{t_2}\widehat{b}_i^{(k)}(\lambda)\mu^i$.

(2) Находится разложение вида

$$\widehat{f}_k(\lambda,\mu)=\delta_1(\lambda)\delta_2(\mu)\delta_{12}(\lambda,\mu)\widehat{q}_k(\lambda,\mu),$$

где $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\mu)$ – это НОД полиномов $f_1^{(k)}(\lambda)$ и $f_2^{(k)}(\mu)$, $k=1,\dots,m$, соответственно, так что

$$f_1^{(k)}(\lambda)=\delta_1(\lambda)\omega_1^{(k)}(\lambda),\quad f_2^{(k)}(\mu)=\delta_2(\mu)\omega_2^{(k)}(\mu),$$

где $\{\omega_1^{(k)}(\lambda)\}$ и $\{\omega_2^{(k)}(\mu)\}$, $k = 1, \dots, m$, – последовательности взаимно простых полиномов; $\delta_{12}(\lambda, \mu)$ есть НОД полиномов $f_{12}^{(k)}(\lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, m$, так что

$$f_{12}^{(k)}(\lambda, \mu) = \delta_{12}(\lambda, \mu)\omega_{12}^{(k)}(\lambda, \mu),$$

где $\omega_{12}^{(k)}(\lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, m$, – взаимно простые полиномы над кольцом скалярных полиномов от двух переменных;

$$q_k(\lambda, \mu) := \omega_1^{(k)}(\lambda)\,\omega_2^{(k)}(\mu)\,\omega_{12}^{(k)}(\lambda, \mu).$$

В результате выполнения первой стадии будут получены:

- скалярные полиномы $\delta_1(\lambda)$, $\delta_2(\mu)$, $\delta_{12}(\lambda, \mu)$, корни которых являются одномерными решениями исходной системы (6.1);
- нелинейная система алгебраических уравнений

$$g_k(\lambda, \mu) = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

  решения которой совпадают с нульмерными решениями системы (6.1).

Здесь $\delta_1(\lambda)$ и $\delta_2(\mu)$ суть алгебраические полиномы от одной переменной, корни которых являются одномерными решениями системы (6.1) видов $\lambda = \lambda_i$ и $\mu = \mu_j$. Полином $\delta_{12}(\lambda, \mu)$ зависит от двух переменных; решения уравнения $\delta_{12}(\lambda, \mu) = 0$ образуют точки собственного спектра $\sigma_{r1}[\widehat{F}_1]$, являющиеся одномерными решениями вида (λ_{ji}, μ_i) системы (6.1). Вычисление нулей полинома $\delta_{12}(\lambda, \mu)$ может быть выполнено, например с использованием метода из статьи [4].

На второй стадии метода находятся нульмерные решения системы (6.1), т.е. точки сингулярного спектра двухпараметрической полиномиальной матрицы $Q(\lambda, \mu) := [q_1(\lambda, \mu), \dots, q_m(\lambda, \mu)]$, спектр которой не содержит точек регулярного спектра матрицы $\widehat{F}_1(\lambda, \mu)$ и состоит только из точек сингулярного спектра матрицы $F(\lambda, \mu)$ из равенства (6.2). Вычисление последних можно реализовать так же, как во второй стадии метода из п. 6.1.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 107–149.

2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 150–165.
3. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 3. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 166–207.
4. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 121–144.
5. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры. Часть* 1. *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Петербург, 2004.
6. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 3–330.
7. В. Н. Кублановская, В. Н. Симонова, *Об одном подходе к решению систем нелинейных алгебраических уравнений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **202** (1992), 71–96.

Kublanovskaya V. N. To solving problems of algebra for two-parameter matrices. 5.

The paper continues the series of papers devoted to surveying and developing methods for solving the following problems for a two-parameter matrix $F(\lambda, \mu)$ of general form: exhausting points of the mixed regular spectrum of $F(\lambda, \mu)$; performing operations on polynomials in two variables (computing the GCD and LCM of a sequence of polynomials, division of polynomials and factorization); computing a minimal basis of the null-space of polynomial solutions of the matrix $F(\lambda, \mu)$ and separation of its regular kernel; inversion and pseudoinversion of polynomial and rational matrices in two variables, and solution of systems of nonlinear algebraic equations in two unknowns. Most of the methods suggested are based on rank factorizations of a two-parameter polynomial matrix and on the method of hereditary pencils.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 11 июня 2009 г.