Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ. 4

Введение

В данной работе продолжаются исследования метода линеаризации для задач с двухпараметрическими полиномиальными матрицами [1]. Расширяется область решаемых задач, предлагаются новые алгоритмы. Рассматривается решение спектральных задач (вычисление точек регулярного и сингулярного спектров) для общего вида пучков постоянных матриц, пучков полиномиальных матриц, двухпараметрических пучков постоянных и полиномиальных матриц, а также решение спектральных задач для одно- и двухпараметрических полиномиальных матриц общего вида. Рассматривается применение метода линеаризации к вычислению нулей и полюсов рациональной матрицы, к вычислению нулей полинома от двух переменных и к вычислению общих нулей последовательности полиномов от двух переменных.

Статья состоит из трех параграфов. В §1 приводятся некоторые известные [1, 3] сведения о спектре двухпараметрических полиномиальных матриц общего вида и о методе линеаризации. В §2 рассматриваются алгоритмы вычисления точек регулярного и сингулярного спектров пучка полиномиальных матриц в зависимости от свойств спектра пучка; приводятся алгоритмы решения вспомогательных задач, также основанные на идее линеаризации, и алгоритмы вычисления точек конечного спектра двухпараметрического пучка постоянных и полиномиальных матриц. В §3 метод линеаризации применяется для решения следующих задач: вычисление нулей и полюсов рациональных матриц; вычисление нулей полинома от двух переменных; вычисление общих нулей последовательности полиномов от двух переменных.

Ключевые слова : матрица двухпараметрическая, полиномиальная, спектр регулярный, сингулярный, нуль-просранство.

§1. Некоторые сведения о двухпараметрических полиномиальных матрицах [1,3]

Пусть $F := F(\mu_1, \mu_2)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ: $F(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$.

Замкнутые неприводимые многообразия аффинного пространства, на которых ранг матрицы F меньше ее нормального ранга, образуют конечный спектр $\sigma[F]$ матрицы F. В случае двухпараметрических матриц $F(\mu_1, \mu_2)$ точками $\sigma[F]$ являются $\gamma_* := (\mu_1^*, \mu_2^*)$, т.е. наборы из двух фиксированных параметров, а также точки μ_1^* и μ_2^*, состоящие из одного фиксированного параметра. Для удобства мы также будем обозначать их наборами видов $\gamma_* = (\mu_1^*, \mu_2)$ и $\gamma_* = (\mu_1, \mu_2^*)$, где μ_1 и μ_2 суть свободные параметры.

Множество $\sigma[F]$ состоит из объединения регулярного ($\sigma_r[F]$), сингулярного ($\sigma_s[F]$) и регулярно-сингулярного ($\sigma_{rs}[F]$) спектров. При этом имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_r[F]=\sigma_{r1}[F]\cup\sigma_{r2}[F];\;\; \sigma_s[F]=\sigma_{s1}[F]\cup\sigma_{s2}[F];\;\; \sigma_{rs}[F]=\sigma_r[F]\cap\sigma_s[F].$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$. Будем рассматривать решения уравнения

$$F(\gamma_*)x := F(*)x = 0 \tag{1}$$

в точках спектра матрицы $F(\mu_1, \mu_2)$.

Каждой точке $(*) = (\nu_1, \nu_2) \in \sigma_{r1}[F]$ соответствует решение уравнения (1), т.е. ненулевой постоянный вектор x_* (несколько векторов), принадлежащий так называемому спектральному множеству[1] вида

$$\Omega_{r1}[F] := N_c[F(*)] \setminus N_c[F]_*.$$

В дальнейшем пару $((\nu_1, \nu_2);\ x_*)$ будем называть собственной спектральной парой: (ν_1, ν_2) – собственное значение, $x_* \neq 0$ – собственный вектор матрицы F. Множество $\sigma_{r1}[F]$ будем называть собственным регулярным спектром матрицы F.

Каждой точке $(*) = (\mu_1, \nu_2)$ (точке (ν_1, μ_2)) соответствует полиномиальный вектор $x(\mu_1)$ (вектор $x(\mu_2)$), принадлежащий множеству

[1] Здесь и ниже $N_c[F]$ обозначает нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы F.

$\Omega_{r2}[F] = N_c[F(*)] \setminus N_c[F]_*$, где через $(*)$ обозначен набор (μ_1, ν_2) (набор (ν_1, μ_2)).

Каждой точке $(*) = (\varkappa_1, \varkappa_2) \in \sigma_{s1}[F]$ соответствует ненулевой постоянный вектор, принадлежащий множеству $\Omega_{s1}[F] = \{N_c[F_*] \setminus N_c[F]_*\}$.

Частными видами двухпараметрических полиномиальных матриц являются: пучок $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ однопараметрических полиномиальных матриц; двухпараметрический пучок $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2) = P_1\mu_1 + P_2\mu_2 + P_0$ постоянных матриц и двухпараметрический пучок $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2; \nu) = P_1(\nu)\mu_1 + P_2(\nu)\mu_2 + P_0(\nu)$ полиномиальных матриц.

Два пучка $D_1(\lambda, \mu) = A_1(\mu) - \lambda B_1(\mu)$ и $D_2(\lambda, \mu) = A_2(\mu) - \lambda B_2(\mu)$ называются согласованными, если их матрицы удовлетворяют соотношению $B_1A_2 = A_1B_2$. При этом согласование называется полным, если столбцы матрицы $\begin{bmatrix} A_2(\mu) \\ B_2(\mu) \end{bmatrix}$ образуют свободный базис[2] правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $[-B_1(\mu), A_1(\mu)]$.

Метод линеаризации для вычисления конечного спектра двухпараметрической полиномиальной матрицы

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n},$$

где

$$F_1(\mu) = [C_s(\mu), C_{s-1}(\mu), \ldots, C_0(\mu)], \quad \Lambda_1(\lambda) = [\lambda^s I_n, \lambda^{s-1} I_n, \ldots, I_n]^B,$$

I_n – единичная матрица порядка n, сводит вычисление $\sigma[F]$ к вычислению спектров так называемых наследственных[3] для матрицы $F(\lambda, \mu)$ пучков $D_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, r$, и пучка $D_1(\lambda, \mu)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- $D_i(\lambda) = [Q_+^{(i)} - \lambda Q_-^{(i)}]$ – пучок постоянных матриц, составленных соответственно из ns первых и ns последних строк матрицы $Q^{(i)}$, столбцы которой образуют ортонормальный базис нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_i)$, где μ_i – фиксированное собственное значение матрицы $F_1(\mu)$;

[2] Свободным называется базис, матрица которого не содержит конечного регулярного спектра.

[3] В статье [3] наследственные для матрицы $F(\lambda, \mu)$ пучки называются согласованными с $F(\lambda, \mu)$ пучками.

- $D_1(\lambda,\mu) = [W_+^{(1)}(\mu) - \lambda W_-^{(1)}(\mu)]$ – пучок однопараметрических полиномиальных матриц, составленных из ns первых и ns последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис нуль-пространства $N_c[F_1]$.

§2. Решение спектральных задач

2.1. Вычисление точек спектра пучка полиномиальных матриц

Пусть $D(\lambda,\mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ есть пучок[4] ранга $\rho \neq 1$ полиномиальных $m \times n$ матриц $A(\mu)$ и $B(\mu)$. Ниже предлагаются алгоритмы вычисления регулярного и сингулярного спектров пучка $D(\lambda,\mu)$ для следующих случаев: $D(\lambda,\mu)$ есть регулярный пучок ($m = n = \rho$); $D(\lambda,\mu)$ есть пучок, конечный спектр которого не содержит сингулярного спектра (в частности, $D(\lambda,\mu)$ есть пучок полного столбцового ранга); $D(\lambda,\mu)$ есть пучок, конечный спектр которого не содержит регулярного спектра; $D(\lambda,\mu)$ есть пучок, спектр которого содержит как регулярный, так и сингулярный спектры, но при этом выполняется соотношение

$$\sigma_r[D] \cap \sigma_s[D] = \varnothing.$$

Для определения свойств спектра пучка $D(\lambda,\mu)$ алгоритм ΔW-1 факторизации [2] применяется к матрице $M(\mu) = \begin{bmatrix} A(\mu) \\ B(\mu) \end{bmatrix}$:

$$M(\mu)W(\mu) = [\Delta(\mu),\, \mathbb{O}], \tag{2}$$

где $W(\mu) = [W_1(\mu), W_0(\mu)]$ есть унимодулярная $n \times n$ матрица; $W_0(\mu)$ есть $n \times (n-\rho)$ блок матрицы $W(\mu)$, столбцы которого образуют свободный базис пространства $N_c[M]$; $\Delta(\mu)$ есть полиномиальная $2m \times n$ матрица полного столбцового ранга, $\sigma_r[\Delta] = \sigma_r[M]$; $\mathbb{O}$ – нулевая $n \times (n-\rho)$ матрица. Если в равенстве (2) отсутствует нулевой блок, то $D(\lambda,\mu)$ не имеет сингулярного спектра ($\sigma_s[D] = \varnothing$). В этом случае $\sigma[D]$ или совпадает с $\sigma_r[D]$, или является пустым множеством. Если $\Delta(\mu)$ не имеет собственных значений и нулевой блок присутствует в равенстве (2), то $\sigma[D] = \sigma_s[D]$. Отсутствие у $\Delta(\mu)$ собственных значений означает, что в ΔW-1 факторизации матрицы $\Delta^T(\mu)$, т.е. в равенстве

$$\Delta^T(\mu)\widetilde{W}(\mu) = [\widetilde{\Delta}(\mu),\, \mathbb{O}], \tag{3}$$

[4] Случай пучка ранга единица будет рассмотрен в п. 2.2.2.

матрица $\widetilde{\Delta}(\mu)$ является унимодулярной. Если в правой части (3) присутствует нулевой блок и матрица $\widetilde{\Delta}(\mu)$ не является унимодулярной, то спектр пучка $D(\lambda, \mu)$ может содержать как регулярный, так и сингулярный спектры.

Прежде чем рассматривать алгоритмы вычисления точек конечного спектра пучка полиномиальных матриц, рассмотрим некоторые вспомогательные алгоритмы.

2.1.1. Вычисление собственных значений пучка постоянных матриц

Пусть $D(\lambda) = A - \lambda B$ – пучок постоянных матриц размеров $m \times n$ $(m \geqslant n)$ и ранга ρ. При $m < n$ следует рассмотреть пучок $D^T(\lambda)$. Для вычисления $\sigma[D]$ применим метод линеаризации. С этой целью нужно выполнить следующие шаги.

(1) Представить пучок $D(\lambda)$ в виде

$$D(\lambda) = [-B,\, A][\lambda I_n,\, I_n]^B \equiv F_1 \Lambda_1(\lambda). \tag{4}$$

(2) Сформировать пучок полного столбцового ранга $D_1(\lambda) = A_1 - \lambda B_1$, где A_1 и B_1 суть $n \times n_1$ блоки матрицы $Q^{(1)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства постоянной $m \times 2n$ матрицы F_1: $Q^{(1)} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$, $n \geqslant n_1$, n_1 – число столбцов матрицы $Q^{(1)}$.

(3) Если $n \neq n_1$, то вычислить последовательность попарно согласованных пучков $D_k(\lambda) = A_k - \lambda B_k$, $k = 2, \ldots, l$, для которых выполняется соотношение

$$[-B_{k-1},\, A_{k-1}] \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \mathbb{O},$$

т.е. столбцы $\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}$ образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $[-B_{k-1}, A_{k-1}]$; $n_{k-1} \geqslant n_k$. Процесс построения согласованных пучков заканчивается на шаге l, когда выполняется одно из двух условий: либо $n_l = n_{l+1} = 0$, что означает, что заданный пучок не имеет собственных значений, либо $n_l = n_{l+1} \neq 0$, что означает, что $D_l(\lambda)$ есть пучок постоянных квадратных матриц, так что $\sigma[D_l] = \sigma[D]$.

Тем самым вычисление собственных значений пучка постоянных матриц общего вида сведено к вычислению собственных значений регулярного пучка постоянных матриц, т.е. к решению обобщенной проблемы собственных значений, численные методы решения которой широко представлены в литературе.

2.1.2. Вычисление собственных значений полиномиальной матрицы общего вида

Пусть $F(\lambda)$ есть полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ, в частности, регулярная матрица ($m = n = \rho$). К матрице $F(\lambda)$ применим метод линеаризации. Для этого надо выполнить следующие операции.

(1) Записать матрицу $F(\lambda)$ в виде полинома по λ с матричными коэффициентами и представить ее в виде

$$F(\lambda)=\sum_{k=0}^{s} C_k\lambda^k=[C_s, C_{s-1}, \dots, C_0][\lambda^s I_n, \lambda^{s-1} I_n, \dots, I_n]^B=F_1\Lambda_1(\lambda),$$

где F_1 есть $m\times(s+1)n$ постоянная матрица, I_n – единичная матрица.

(2) Вычислить матрицу Q, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы F_1, используя для этого, например, алгоритм ΔW-0 факторизации [2].

(3) Сформировать пучок $D(\lambda) = A-\lambda B$ постоянных матриц, составленных соответственно из ns первых и ns последних строк матрицы Q.

Тем самым задача вычисления собственных значений полиномиальной матрицы общего вида сведена к вычислению собственных значений пучка $D(\lambda)$ постоянных матриц A и B размеров $ns \times n_1$, где n_1 есть число столбцов матрицы Q, и может быть решена с помощью алгоритма из п. 2.1.1.

Рассмотрим другие способы вычисления собственных значений полиномиальной матрицы $F(\lambda) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, основанные на применении алгоритма ΔW-1 факторизации [2].

Первый алгоритм сводит вычисление точек $\sigma[F]$ к вычислению собственных значений регулярной полиномиальной матрицы. Алгоритм состоит в применении метода ΔW-1 факторизации сначала к матрице $F(\lambda)$:

$$F(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda),\, \mathbb{O}],$$

а затем к матрице $\Delta^T(\lambda)$:

$$\Delta^T(\lambda)\widetilde{W}(\lambda) = [\widetilde{\Delta}(\lambda),\, \mathbb{O}].$$

Результатом является регулярная полиномиальная $\rho \times \rho$ матрица $\widetilde{\Delta}$, конечные собственные значения которой совпадают с собственными значениями матрицы $F(\lambda)$. Вычисление $\sigma[\widetilde{\Delta}]$ можно реализовать, например, как вычисление корней алгебраического полинома $f(\lambda) := \det \widetilde{\Delta}(\lambda)$. Для раскрытия определителя полиномиальной матрицы $\widetilde{\Delta}$ можно использовать метод следов Д. К. Фаддеева [2].

Второй алгоритм сводит вычисление точек множества $\sigma[F]$ для $F(\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ к вычислению корней алгебраических полиномов $\Delta_k(\mu)$, $k = 1, \ldots, \rho$. С этой целью матрица $F(\mu)$ преобразуется к нижнему трапецоидальному виду

$$S(\mu) := \begin{bmatrix} \Delta_1(\mu) & & \mathbb{O} & \\ \vdots & \ddots & & \mathbb{O} \\ * & \ldots & \Delta_\rho(\mu) & \\ * & \ldots & * & \end{bmatrix},$$

где $\Delta_i(\mu)$, $i = 1, \ldots, \rho$, – скалярные полиномы, нули которых совпадают с точками множества $\sigma[F]$; звездочкой $(*)$ обозначены не интересующие нас элементы.

Алгоритм преобразования $F(\mu)$ к виду $S(\mu)$ состоит из ρ шагов. На шаге k выполняются следующие операции.

(1) В качестве ведущей строки выбирается ненулевая строка преобразуемой матрицы и выполняется соответствующая перестановка строк.

(2) Находится $n \times n$ матрица

$$\widetilde{W}^{(k)}(\mu) = \begin{bmatrix} I_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W^{(n-k+1)}(\mu) \end{bmatrix},$$

где $W^{(n-k+1)}(\mu)$ – унимодулярная матрица из ΔW-1 разложения ведущей строки, преобразуемой в вектор-строку вида $[\Delta_k(\mu), 0, \ldots, 0]$.

Результатом выполнения ρ шагов является матрица

$$\widetilde{\theta}_\rho \cdots \widetilde{\theta}_1 F(\mu) \widetilde{W}^{(1)}(\mu) \widetilde{W}^{(2)}(\mu) \cdots \widetilde{W}^{(\rho)}(\mu) := S(\mu),$$

где $\widetilde{\theta}_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \theta_{m-k+1} \end{bmatrix}$ суть матрицы перестановок. Совокупность нулей полиномов $\Delta_k(\mu)$, $k = 1, \ldots, \rho$, образует точки $\sigma[F]$.

2.1.3. Вычисление точек спектра регулярного пучка полиномиальных матриц

Пусть $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ есть регулярный пучок полиномиальных $n \times n$ матриц. Для вычисления точек спектра $D(\lambda, \mu)$ будем использовать метод линеаризации. В этом случае требуется выполнить следующие операции.

(1) Представить пучок $D(\lambda, \mu)$ в виде

$$D(\lambda, \mu) = [-B(\mu), A(\mu)][\lambda I_n, I_n]^B \equiv F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda).$$

(2) Вычислить все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \dots, r$, полиномиальной $m \times 2n$ матрицы $F_1(\mu)$, используя, например, алгоритмы п. 2.1.2.

(3) Для каждого фиксированного μ_i, $i = 1, \dots, r$, вычислить постоянную матрицу $F_1(\mu_i)$ и найти матрицу $Q^{(i)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_1)$. Матрица $Q^{(i)}$ имеет размеры $2n \times n_i$, где n_i – число столбцов матрицы $Q^{(i)}$.

(4) Сформировать пучок $D_i(\lambda) = Q_+^{(i)} - \lambda Q_-^{(i)}$ из постоянных $n \times n_i$ матриц, составленных соответственно из n первых и n последних строк матрицы $Q^{(i)}$.

(5) Вычислить все различные собственные значения λ_{ji}, $j = 1, \dots, p_i$, пучка $D_i(\lambda)$ размеров $n \times n_i$.

Каждая так вычисленная пара (λ_{ji}, μ_i) является точкой множества $\sigma_{r1}[D]$. Точки μ_i (обозначим их μ_k), для которых пучок $D_k(\lambda, \mu_k)$ не имеет собственных значений и $\operatorname{rank} D(\lambda, \mu_k) < \operatorname{rank} D(\lambda, \mu)$, являются точками множества $\sigma_{r2}[D]$.

Тем самым вычисление точек спектра регулярного пучка полиномиальных матриц сведено к вычислению собственных значений прямоугольной полиномиальной матрицы и собственных значений имеющих полный столбцовый ранг пучков постоянных матриц.

2.1.4. Вычисление точек спектра пучка полиномиальных матриц, не имеющего сингулярного спектра

Пусть $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ – пучок ранга ρ полиномиальных $m \times n$ матриц, $\sigma_s[D] = \varnothing$. Для вычисления точек $\sigma_r[D]$ методом линеаризации следует выполнить операции (1)–(5), которые применялись в п. 2.1.3 для случая регулярного пучка полиномиальных матриц. Результатом являются пары (λ_{ji}, μ_i) и числа μ_k. При этом, если рассматриваемый пучок $D(\lambda, \mu)$ имеет полный столбцовый ранг, то каждая пара (λ_{ji}, μ_i) является точкой $\sigma_{r1}[D]$. Числа μ_k являются точками $\sigma_{r2}[D]$, если $\operatorname{rank} D(\lambda, \mu_k) < \operatorname{rank} D(\lambda, \mu)$. Если пучок $D(\lambda, \mu)$ не имеет сингулярного спектра, но правое нуль-пространство $D(\lambda, \mu)$ нетривиально, то среди чисел (λ_{ji}, μ_i) и μ_k кроме точек $\sigma_{r1}[D]$ и $\sigma_{r2}[D]$ могут быть и точки, принадлежащие регулярному спектру правого нуль-пространства пучка $D(\lambda, \mu)$. Для выделения точек множеств $\sigma_{r1}[D]$ и $\sigma_{r2}[D]$ нужны дополнительные исследования. С этой целью можно использовать алгоритм из [3], согласно которому в каждой точке (λ_{ji}, μ_i) (точке μ_k) следует вычислить спектральное множество $\Omega_{r1}[D]$ (множество $\Omega_{r2}[D]$). Если Ω_{ri}, $i = 1, 2$, является непустым и ненулевым множеством, то рассматриваемая точка принадлежит $\sigma_{ri}[D]$.

Если о нетривиальности правого нуль-пространства пучка $D(\lambda, \mu)$ ничего не известно, то в качестве начального следует взять пучок полного столбцового ранга $D(\lambda, \mu) = \Delta_1(\mu) - \lambda\Delta_2(\mu)$, где $\Delta_1(\mu)$ и $\Delta_2(\mu)$ есть $m \times n$ блоки матрицы $\Delta(\mu) = \begin{bmatrix} \Delta_1(\mu) \\ \Delta_2(\mu) \end{bmatrix}$, входящей в ΔW-1 факторизацию матрицы $M(\mu) = \begin{bmatrix} A(\mu) \\ B(\mu) \end{bmatrix}$, т.е. в равенство

$$M(\lambda)W(\lambda) = [\Delta(\lambda), \mathbb{O}].$$

2.1.5. Вычисление точек сингулярного спектра пучка $D(\lambda, \mu)$, не имеющего регулярного спектра[5]

Пусть $D(\lambda, \mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ есть пучок полиномиальных матриц общего вида: $D(\lambda, \mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m \times n}$ и пусть $\sigma_r[D] = \varnothing$. Для вычисления $\sigma_s[D]$ выполняются следующие операции.

(1) Пучок $D(\lambda, \mu)$ представляется в виде

$$D(\lambda, \mu) = [-B(\mu), A(\mu)][\lambda I_n, I_n]^B \equiv F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda).$$

(2) Находится свободный базис $W^{(1)}(\mu)$ нуль-пространства $N_c[F_1]$; $W^{(1)}(\mu)$ есть полиномиальная $2n \times n_1$ матрица, $n_1 = \dim N_c[F_1]$.

(3) Из блоков матрицы $W^{(1)}(\mu) = \begin{bmatrix} W_+^{(1)}(\mu) \\ W_-^{(1)}(\mu) \end{bmatrix}$ формируется пучок $D_1(\lambda, \mu) = W_+^{(1)}(\mu) - \lambda W_-^{(1)}(\mu)$ размеров $n \times n_1$ и находится

[5] По поводу вычисления сингулярного спектра пучка полиномиальных матриц, не имеющего регулярного спектра, см. также [3].

свободный базис $W^{(2)}(\mu)$ пространства $N_c[F_2(\mu)]$, где $F_2(\mu) = [-W_-^{(1)}(\mu), W_+^{(1)}(\mu)]$.

(4) Вычисляется конечная последовательность попарно согласованных пучков $D_k(\lambda,\mu) = W_+^{(k)}(\mu) - \lambda W_-^{(k)}(\mu)$ размеров $n_{k-1} \times n_k$, где $n_k = \dim W^{(k)}$, $n_{k-1} \geqslant n_k$, $k = 2, \ldots, l$. Процесс формирования пучков $D_k(\lambda,\mu)$ заканчивается при $k = l$, когда выполняется одно из следующих условий: 1) $n_l = n_{l+1} = 0$, что означает отсутствие сингулярного спектра у исходного пучка; 2) $n_l = n_{l+1} \neq 0$, что означает что получен $n_l \times n_l$ пучок $D_l(\lambda,\mu)$ полиномиальных матриц.

(5) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \ldots, t$, матрицы $[-W_-^{(l)}(\mu), W_+^{(l)}(\mu)]$.

(6) Для каждого фиксированного корня μ_i находится пучок $D_i(\lambda) := D(\lambda,\mu_i)$ постоянных матриц $A(\mu_i)$ и $B(\mu_i)$ и вычисляются все его различные собственные значения λ_{ji}, $j = 1, \ldots, p_i$.

Каждая пара (λ_{ji}, μ_i) является точкой $\sigma_{s1}[D]$. Здесь (и ниже в аналогичной ситуации) точки μ_k, для которых пучок $D_k(\lambda) := D(\lambda,\mu_k)$ не имеет собственных значений, образуют точки множества $\sigma_{r2}[W_0]$, где через $W_0 = W_0(\lambda,\mu)$ обозначена базисная матрица $N_c[D]$, спектр которой не зависит от параметра λ.

2.1.6. Вычисление точек спектра пучка полиномиальных матриц общего вида

Пусть $D(\lambda,\mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ – пучок полиномиальных матриц общего вида: $D(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\sigma[D] = \sigma_r[D] \cup \sigma_s[D]$, и пусть $\sigma_r[D] \cap \sigma_s[D] = \varnothing$.

Алгоритмы вычисления точек спектров $\sigma_r[D]$ и $\sigma_s[D]$, рассмотренные в пп. 2.1.4, 2.1.5, применимы также и к пучкам общего вида. При этом предварительного исследования свойств спектра $D(\lambda,\mu)$ не требуется. В результате применения упомянутых алгоритмов будут получены замкнутые неприводимые многообразия, на которых ранг $D(\lambda,\mu)$ меньше ранга ρ, т.е. будут вычислены точки множества $\sigma[D]$. Для выяснения принадлежности точки из множества $\sigma[D]$ к регулярному или сингулярному спектру потребуются дополнительные исследования, например, с использованием алгоритма из [3], требующего вычисления спектральных множеств Ω_{rs}, Ω_s в каждой из вычисленных точек $\sigma[D]$.

Рассмотрим вычисление точек спектра пучка полиномиальных матриц общего вида с использованием комбинированных методов, т.е. метода ранговой факторизации и метода линеаризации.

Для вычисления регулярных спектров $\sigma_{r1}[D]$ и $\sigma_{r2}[D]$ выполняются следующие операции.

(1) Пучок $D(\lambda,\mu)$ с помощью алгоритма ΔW-1 факторизации преобразуется к виду

$$\widetilde{W}^T(\mu)D(\lambda,\mu)W(\mu)=\begin{bmatrix}\widehat{D}(\lambda,\mu) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{W}(\mu)$ и $W(\mu)$ суть унимодулярные матрицы, реализующие разложения

$$\begin{bmatrix}A(\mu)\\ B(\mu)\end{bmatrix} W(\mu)=[\Delta(\mu),\,\mathbb{O}],\quad W(\mu)=[W_1(\mu),\,W_0(\mu)];$$

$$\Delta^T(\mu)\widetilde{W}(\mu)=[\widetilde{\Delta}(\mu),\,\mathbb{O}],\quad \widetilde{W}(\mu)=[\widetilde{W}_1(\mu),\,\widetilde{W}_0(\mu)];$$

$\widehat{D}(\lambda,\mu)=\widetilde{W}_1^T(\mu)D(\lambda,\mu)W_1(\mu)$ есть регулярный пучок полиномиальных $\rho\times\rho$ матриц, спектр которого совпадает с регулярным спектром $D(\lambda,\mu)$. Таким образом, вычисление конечного регулярного спектра пучка $D(\lambda,\mu)$ общего вида свелось к вычислению спектра регулярного пучка полиномиальных $\rho\times\rho$ матриц и может быть выполнено с помощью алгоритма из п. 2.1.3.

Для вычисления сингулярного спектра выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется матрица $W_0(\lambda,\mu)$, столбцы которой образуют относительно свободный базис $N_c[D]$, например, с помощью алгоритма ΔW-2 факторизации из [3].

(2) Матрица $\begin{bmatrix}\lambda W_0(\lambda,\mu)\\ W_0(\lambda,\mu)\end{bmatrix}$ представляется в виде

$$\begin{bmatrix}\lambda W_0(\lambda,\mu)\\ W_0(\lambda,\mu)\end{bmatrix}=U(\mu)\Lambda_\alpha(\lambda). \tag{5}$$

Здесь $W_0(\lambda,\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\alpha}U_k(\mu)\lambda^k$ есть запись матрицы $W_0(\lambda,\mu)$ в виде матричного полинома по степеням λ;

$$U(\mu):=\begin{bmatrix}U_\alpha(\mu) & U_{\alpha-1}(\mu) & \dots & U_0(\mu) & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & U_\alpha(\mu) & \dots & U_1(\mu) & U_0(\mu)\end{bmatrix}$$

есть $2n\times(\alpha+2)n_1$ матрица; $\Lambda_\alpha(\lambda) := [\lambda^{\alpha+1}I_{n_1},\dots,\lambda^0 I_{n_1}]^B$, $n_1 = n-\rho$, $\mathbb{O}$ – нулевая $n\times n_1$ матрица.

(3) Вычисляется матрица $\widehat{W}^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис $N_c[U]$. Для этого можно воспользоваться, например, алгоритмом ΔW-1 факторизации.

(4) Формируется пучок $\widehat{D}_1(\lambda,\mu) := \widehat{W}^{(1)}_+(\mu) - \lambda\widehat{W}^{(1)}_-(\mu)$ однопараметрических полиномиальных матриц, составленных соответственно из $(\alpha+1)n_1$ первых и $(\alpha+1)n_1$ последних строк матрицы $\widehat{W}^{(1)}(\mu)$.

(5) Вычисляется последовательность $\{\widehat{D}_k(\lambda,\mu)\}$, $k=1,\dots,l$, попарно согласованных пучков размеров $n_{k-1}\times n_k$, $n_{k-1}\geqslant n_k$. Процесс вычисления пучков $\widehat{D}_k(\lambda,\mu)$ заканчивается на шаге l, когда выполняется одно из двух условий: а) $n_l = n_{l+1} = 0$, что означает отсутствие сингулярного спектра у исходного пучка $D(\lambda,\mu)$; б) $n_l = n_{l+1} \neq 0$, что означает, что построен регулярный пучок $\widehat{D}_l(\lambda,\mu)$.

(6) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1,\dots,t$, матрицы $[-\widehat{W}^{(l)}_-(\mu),\widehat{W}^{(l)}_+(\mu)]$.

(7) Для каждого фиксированного μ_i вычисляется пучок $D(\lambda,\mu_i) = A(\mu_i) - \lambda B(\mu_i)$ и находятся все его различные собственные значения λ_{j_i}, $j=1,\dots,p_i$.

Так вычисленные пары (λ_{j_i},μ_i) являются точками сингулярного спектра исходного пучка $D(\lambda,\mu)$. Справедливость этого утверждения следует из свойств метода линеаризации, примененного к матрице $\widetilde{F}(\lambda,\mu) := \begin{bmatrix}\lambda W_0(\lambda,\mu)\\ W_0(\lambda,\mu)\end{bmatrix}$ (см. равенство (5)), с учетом соотношений $\sigma_s[\widetilde{F}] = \sigma_s[W_0]$, $\sigma_s[D] = \sigma_s[W_0]$.

2.2. Вычисление точек спектра двухпараметрической полиномиальной матрицы

2.2.1. Вычисление точек спектра двухпараметрической полиномиальной матрицы общего вида

Пусть $F(\mu_1,\mu_2)$ – двухпараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга ρ. Для вычисления $\sigma[F] = \sigma_r[F]\cup\sigma_s[F]$ методом линеаризации по одному (каждому) из параметров матрица $F(\mu_1,\mu_2)$ представляется в следующих двух видах:

$$F(\lambda,\mu) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k, \quad \mu=\mu_2, \quad \lambda=\mu_1;$$

$$\widehat{F}(\mu,\lambda)=\sum_{k=0}^{s_1}\widehat{C}_k(\lambda)\mu^k,\quad \mu=\mu_2,\quad \lambda=\mu_1.$$

Для определенности рассмотрим метод линеаризации для матрицы[6] $F(\lambda,\mu)$.

Для вычисления точек регулярного спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$ выполняются следующие операции.

(1) Матрица $F(\lambda,\mu)$ представляется в виде $F(\lambda,\mu)=F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda)$, где $F_1(\mu)=[C_s(\mu),\ldots,C_0(\mu)]$ есть однопараметрическая полиномиальная $m\times(s+1)n$ матрица, $\Lambda_1(\lambda)=[\lambda^s I_n,\ldots,I_n]^B$.

(2) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i=1,\ldots,r$, матрицы $F_1(\mu)$.

(3) Для каждого фиксированного μ_i вычисляется матрица $Q^{(1)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_i)$.

(4) Формируется пучок $D_i(\lambda)=Q_+^{(i)}-\lambda Q_-^{(i)}$ из постоянных матриц $Q_+^{(i)}$ и $Q_-^{(i)}$, составленных соответственно из sn первых и sn последних строк матрицы $Q^{(i)}$.

(5) Вычисляются все различные собственные значения λ_{ji}, $j=1,\ldots,p_i$, пучка $D_i(\lambda)$. Точки μ_i, $i=1,\ldots,r$, для которых пучок $D_i(\lambda)$ не имеет собственных значений, будем обозначать через μ_k.

Операции (3)–(5) выполняются для каждого μ_i, $i=1,\ldots,r$. При этом, если заданная матрица $F(\mu_1,\mu_2)$ имеет полный столбцовый ранг (в частности, является регулярной), то каждая пара (λ_{ji},μ_i) является точкой множества $\sigma_{r1}[F]$. Числа μ_k образуют точки $\sigma_{r2}[F]$, если $\operatorname{rank}F(\lambda,\mu_k)<\operatorname{rank}F(\lambda,\mu)$. Если нуль-пространство $N_c[F]$ не является тривиальным, то для определения принадлежности точек регулярному спектру матрицы $F(\lambda,\mu)$ нужны дополнительные исследования. Например, можно применить алгоритм из [3].

Вычисление сингулярного спектра матрицы $F(\lambda,\mu)$ осуществляется с помощью следующих операций.

(1) Вычислить $W^{(1)}(\mu)$, т.е. свободный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F_1(\mu)$.

(2) Образовать пучок $W_+^{(1)}(\mu)-\lambda\ W_-^{(1)}(\mu)=D_1(\lambda,\mu)$, матрицы

[6]Алгоритм вычисления $\sigma[F]$ отличается от алгоритма вычисления $\sigma[D]$ только формированием матрицы $F_1(\mu)$. Здесь для иллюстрации рассматривается алгоритм вычисления $\sigma_r[F]$, когда $\sigma_s[F]=\varnothing$, и алгоритм вычисления $\sigma_s[F]$, когда $\sigma_{r1}[F]=\varnothing$.

которого составлены из sn первых и sn последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

(3) Построить последовательность попарно согласованных $n_{k-1} \times n_k$ пучков $D_k(\lambda,\mu) = W_+^{(k)}(\mu) - W_-^{(k)}(\mu)$, $k = 2,\dots,l$. Процесс построения пучков $D_k(\lambda,\mu)$ заканчивается, когда при некотором $k = l$ выполняется одно из условий: либо $n_l = n_{l+1} = 0$, либо $n_l = n_{l+1} \neq 0$. При $n_l = n_{l+1} = 0$ пучок $D_1(\lambda,\mu)$ не имеет спектра, так что $\sigma_s[F] = \varnothing$. При $n_l = n_{l+1}$ построен $n_l \times n_l$ пучок $D_l(\lambda,\mu) = W_+^{(l)}(\mu) - W_-^{(l)}(\mu)$.

(4) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1,\dots,t$, матрицы $[-\widehat{W}_-^{(l)}(\mu), \widehat{W}_+^{(l)}(\mu)]$.

(5) Для каждого фиксированного корня μ_i вычисляется однопараметрическая полиномиальная по λ матрица $F(\lambda,\mu_i)$ и находятся все ее различные собственные значения λ_{ji}, $j = 1,\dots,p_i$.

Каждая пара (λ_{ji},μ_i) так вычисленных чисел образует точку множества $\sigma_s[F]$.

Замечание. Алгоритмы п. 2.1.6 применимы к двухпараметрической матрице $F(\lambda,\mu) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ общего вида, имеющей как регулярный, так и сингулярный спектры. Отличие от алгоритмов для пучка матриц состоит в формировании матриц $F_1(\mu)$ и $U(\mu)$. В случае $F = F(\lambda,\mu)$ в качестве $F_1(\mu)$ и $U(\mu)$ нужно взять следующие матрицы: $F_1(\mu) = [C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)]$ – однопараметрическая полиномиальная $m \times (s+1)n$ матрица;

$$U(\mu) = \begin{bmatrix} U_\alpha(\mu) & U_{\alpha-1}(\mu) & \cdots & U_0(\mu) & & \\ \ddots & \ddots & & \ddots & \mathbb{O} & \\ \mathbb{O} & & & & & \\ & U_\alpha(\mu) & U_{\alpha-1}(\mu) & & \cdots & U_0(\mu) \end{bmatrix}.$$

Здесь $U_\alpha(\mu)\lambda^\alpha + U_{\alpha-1}(\mu)\lambda^{\alpha-1} + \cdots + U_0(\mu) = W_0(\lambda,\mu)$, $W_0(\lambda,\mu)$ – матрица, столбцы которой образуют свободный базис $N_c[F]$, так что в равенстве

$$\mathbb{O} = F(\lambda,\mu)W_0(\lambda,\mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\mu)W_0(\lambda,\mu)$$

имеем $\Lambda_1(\lambda)W_0(\lambda,\mu) = U(\mu)\Lambda_{s+\alpha}(\lambda)$, где

$$\Lambda_1(\lambda) = [\lambda^s I_n,\dots,\lambda^0 I_n]^B, \quad \Lambda_{s+\alpha}(\lambda) = [\lambda^{s+\alpha+1} I_n,\dots,\lambda^0 I_{n_1}]^B,$$
$$n_1 = n - \rho.$$

2.2.2. Вычисление точек спектра двухпараметрической матрицы ранга один

Пусть $F(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $1\times n$ матрица. Для вычисления $\sigma[F]$ представим $F(\lambda,\mu)=\sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k$ в виде

$$F(\lambda,\mu)=F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda),$$

$$F_1(\mu)=[C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)],\quad \Lambda_1(\lambda)=[\lambda^s I_n,\dots,I_n]^B.$$

К матрице $F_1(\mu)$ применим алгоритм ∇V-1 факторизации: $F_1(\mu)=\nabla(\mu)V(\mu)$, где $\nabla(\mu)$ есть алгебраический полином, корни μ_i, $i=1,\dots,r$, которого совпадают с собственными значениями матрицы $F_1(\mu)$; $V(\mu)=[v_s(\mu),v_{s-1}(\mu),\dots,v_0(\mu)]$ есть полиномиальная $1\times(s+1)n$ матрица, не имеющая регулярного спектра. Тогда

$$F(\lambda,\mu)=\nabla(\mu)V(\mu)\Lambda_1(\lambda)=\nabla(\mu)\widehat{F}(\lambda,\mu),$$

где $\widehat{F}(\lambda,\mu)=V(\mu)\Lambda_1(\lambda)$ есть полином от двух переменных.

Для вычисления регулярного спектра $\sigma_r[F]$ нужно выполнить следующие операции.

(1) Вычислить все различные нули μ_i, $i=1,\dots,r$, полинома $\nabla(\mu)$.

(2) Для каждого фиксированного μ_i вычислить полином $\widehat{F}(\lambda,\mu_i)=V(\mu_i)\Lambda_1(\lambda):=\hat{f}_i(\lambda)$.

(3) Если $\hat{f}_i(\lambda)=0$ не является тождеством относительно λ, то вычислить все различные нули λ_{ji} $j=1,\dots,p_i$, полинома $\hat{f}_i(\lambda)$.

Каждая пара (λ_{ji},μ_i) так вычисленных чисел является точкой $\sigma_{r1}[F]$. Точки μ_k, для которых равенство $\hat{f}_k(\lambda)=0$ есть тождество относительно λ, являются неподвижными (критическими) точками уравнения (1).

Замечание. Метод линеаризации для вычисления точек спектра пучка $D(\lambda,\mu)$ полиномиальных матриц (матрицы $F(\lambda,\mu)$) можно применять без предварительного анализа свойств спектра пучка (матрицы), так как построение наследственных пучков $D_i(\lambda)$ и $D_1(\lambda,\mu)$ метода линеаризации не зависит от свойств спектра исходного пучка (матрицы). Необходимость в анализе возникает только для уже вычисленных точек (λ_{ji},μ_i) и μ_k. Для анализа принадлежности точки к искомому спектру можно применить, например, алгоритм из [3].

2.3. Вычисление точек спектра двухпараметрического пучка постоянных матриц

Пусть $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2) = P_1\mu_1 + P_2\mu_2 + P_0$ есть двухпараметрический пучок общего вида: $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Здесь P_0, P_1 и P_2 – постоянные $m \times n$ матрицы. Требуется вычислить точки конечного спектра $\sigma[\mathcal{E}]$ пучка $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2)$, используя метод линеаризации по каждому из параметров, т.е. вычислить точки спектра для каждого из двух двухпараметрических пучков:

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu) = \lambda C_1^{(1)} + C_0^{(1)},$$

где $\lambda = \mu_1$, $\mu = \mu_2$, $C_1^{(1)} = P_1$, $C_0^{(1)} = \mu P_2 + P_0$, и

$$\widehat{\mathcal{E}}(\mu, \lambda) = \mu \widehat{C}_1^{(1)} + \widehat{C}_0^{(1)},$$

где $\widehat{C}_1^{(1)} = P_2, \widehat{C}_0^{(1)} = \lambda P_1 + P_0, \mu = \mu_2, \lambda = \mu_1$.

Для определенности рассмотрим вычисление $\sigma[\mathcal{E}]$. С этой целью выполняются следующие операции.

(1) Пучок $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$ представляется в виде

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu) = [C_1^{(1)}, C_0^{(1)}(\mu)][\lambda I_n, I_n]^B \equiv F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda),$$

где $F_1(\mu) = \mu C_1^{(2)} + C_0^{(2)}$, $C_1^{(2)} = [\mathbb{O}, P_2]$, $C_0^{(2)} = [P_1, P_0]$, $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times n$ матрица.

(2) Вычисляются все различные собственные значения $\mu_i, i = 1, \ldots, r$, пучка $F_1(\mu)$ размеров $m \times 2n$.

(3) Для фиксированного μ_i вычисляется постоянная матрица $F(\mu_i)$ и находится ортонормированный базис $Q^{(i)}$ ее правого нуль-пространства. Матрица $Q^{(i)} = \begin{bmatrix} Q_+^{(i)} \\ Q_-^{(i)} \end{bmatrix}$ имеет размеры $2n \times n_i$, где n_i – число столбцов матрицы $Q^{(i)}$.

(4) Формируется пучок $D_i(\lambda) = Q_+^{(i)} - \lambda Q_-^{(i)}$ постоянных матриц, составленных из блоков матрицы $Q^{(i)}$.

(5) Вычисляются все различные собственные значения λ_{ji} $j = 1, \ldots, p_i$, пучка $D_i(\lambda)$.

Операции (3)–(5) выполняются для каждого фиксированного $\mu_i, i = 1, \ldots, r$.

Каждая пара (λ_{ji}, μ_i) есть точка множества $\sigma_{r1}[\mathcal{E}]$. Точки μ_k, для которых пучок $D_k(\lambda)$ не имеет собственных значений, являются точками $\sigma_{r2}[\mathcal{E}]$, если $\operatorname{rank}\mathcal{E}(\lambda, \mu_k) < \operatorname{rank}\mathcal{E}(\lambda, \mu)$.

Для вычисления точек сингулярного спектра двухпараметрического пучка $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$, не имеющего собственного регулярного спектра, выполняются следующие операции[7].

(1) Вычисляется матрица $W^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы $F_1(\mu)$.

(2) Формируется пучок $D_1(\lambda, \mu) = W_+^{(1)}(\mu) - \lambda W_-^{(1)}(\mu)$, где $W_+^{(1)}(\mu)$ и $W_-^{(1)}(\mu)$ – полиномиальные матрицы, составленные из первых n и последних n строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$, так что $D_1(\lambda, \mu)$ имеет размеры $n_0 \times n_1$, $n_0 = n$, $n_0 \geqslant n_1$, n_1 – число столбцов матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

(3) Формируется $2n_1 \times n_2$ матрица $[-W_-^{(1)}(\mu), W_+^{(1)}(\mu)]$ и вычисляется матрица $W^{(2)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис из полиномиальных решений нуль-пространства матрицы $[-W_-^{(1)}(\mu), W_+^{(1)}(\mu)]$, где $n_1 \geqslant n_2$, n_2 – число столбцов матрицы $W^{(2)}(\mu)$.

(4) Процесс формирования пучков $D_k(\lambda, \mu)$ заканчивается при выполнении одного из условий: 1) $n_l = n_{l+1} = 0$, т.е. пучок $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$ не имеет сингулярного спектра; 2) $n_l = n_{l+1} \neq 0$, т.е. построен пучок $D_l(\lambda, \mu) = W_+^{(l)}(\mu) - \lambda W_-^{(l)}(\mu)$ размеров $n_l \times n_l$.

(5) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \ldots, t$, матрицы $[-\widehat{W}_-^{(l)}(\mu), \widehat{W}_+^{(l)}(\mu)]$.

(6) Для каждого фиксированного μ_i вычисляется пучок $\mathcal{E}(\lambda, \mu_i)$ и находятся все его собственные значения λ_{ji}, $j = 1, \ldots, p_i$. Каждая пара (λ_{ji}, μ_i) образует точку множества $\sigma_s[\mathcal{E}]$.

Аналогично вычисляется спектр пучка $\widehat{\mathcal{E}}(\mu, \lambda)$. Объединение спектров пучков $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\mu, \lambda)$ образует искомый спектр двухпараметрического пучка $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2)$.

2.4. Вычисление точек спектра двухпараметрического пучка полиномиальных матриц

Пусть $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2; \nu) = P_1(\nu)\mu_1 + P_2(\nu)\mu_2 + P_0(\nu)$ есть двухпараметрический пучок ранга ρ полиномиальных по ν $m \times n$ матриц $P_i(\nu)$, $i = 0, 1, 2$. Требуется вычислить точки конечного спектра пучка

[7] Вычисление точек $\sigma_s[\mathcal{E}]$ для пучка $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$ общего вида проводится с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму вычисления $\sigma_s[D]$ из п. 2.1.6.

$\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2; \nu)$, применяя метод линеаризации по каждому из параметров, т.е. применяя его к пучкам

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu; \nu) = [C_1^{(1)}(\nu), C_0^{(1)}(\mu, \nu)][\lambda I_n, I_n]^B,$$

$$C_1^{(1)}(\nu) = P_1(\nu), \quad C_0^{(1)}(\mu, \nu) = \mu P_2(\nu) + P_0(\nu), \quad \lambda = \mu_1, \quad \mu = \mu_2,$$

и

$$\widehat{\mathcal{E}}(\mu, \lambda; \nu) = [\widehat{C}_1^{(1)}(\nu), \widehat{C}_0^{(1)}(\lambda, \nu)][\mu I_n, I_n]^B,$$

$$\widehat{C}_1^{(1)}(\nu) = P_2(\nu), \quad \widehat{C}_0^{(1)}(\lambda, \nu) = \lambda P_1(\nu) + P_0(\nu), \quad \lambda = \mu_2, \quad \mu = \mu_1.$$

Для определенности рассмотрим алгоритм вычисления точек спектра пучка $\mathcal{E}(\lambda, \mu; \nu)$. Вычисление точек спектра пучка $\widehat{\mathcal{E}}(\mu, \lambda; \nu)$ проводится аналогично.

Выполняются следующие операции.

(1) Пучок $\mathcal{E}(\lambda, \mu; \nu)$ записывается в виде

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu; \nu) = [C_1^{(1)}(\nu), C_0^{(1)}(\mu, \nu)][\lambda I_n, I_n]^B \equiv F_1(\mu, \nu)\Lambda_1(\lambda).$$

(2) Матрица $F_1(\mu, \nu)$ записывается по степеням параметра μ:

$$F_1(\mu, \nu) := [C_1^{(1)}(\nu),\, C_0^{(1)}(\mu, \nu)] = \mu C_1^{(2)}(\nu) + C_0^{(2)}(\nu) = F_2(\nu)\Lambda_2(\mu),$$

где $\Lambda_2(\mu) = [\mu I_{2n}, I_{2n}]$, $C_1^{(2)}(\nu) = [\mathbb{O},\, P_2(\nu)]$, $C_0^{(2)}(\nu) = [P_1(\nu),\, P_0(\nu)]$, $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times n$ матрица.

(3) Вычисляются все различные точки (μ_{ji}, ν_i) и ν_k регулярного спектра пучка полиномиальных матриц $F_1(\mu, \nu)$, для чего используются алгоритмы из п. 2.2.

(4) Вычисляется пучок постоянных матриц $\mathcal{E}(\lambda, \mu_{ji}; \nu_i)$ и находятся все его различные собственные значения $\lambda_q, q = 1, \ldots, p_{ji}$.

Каждая тройка $(\lambda_q, \mu_{ji}, \nu_i)$ так вычисленных чисел является точкой собственного регулярного спектра исходного пучка $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2; \nu)$. Точки (μ_{ji}, ν_i), на которых пучок не имеет собственных значений, являются точками смешанного регулярного спектра исходного пучка, если $\operatorname{rank} \mathcal{E}(\lambda, \mu_{ji}; \nu_i) < \operatorname{rank} \mathcal{E}(\lambda, \mu; \nu)$.

Для вычисления $\sigma_s[F]$ выполняются следующие операции.

(1) Находятся точки $(\varkappa_{2j}, \varkappa_{1j})$, принадлежащие собственному сингулярному спектру пучка $F_1(\mu, \nu) = \mu C_1^{(2)}(\nu) + C_0^{(2)}(\nu)$, для чего используются алгоритмы из пп. 2.1.5, 2.1.6.

(2) Если $\sigma_s[F_1] \neq \varnothing$, то вычисляется пучок $\mathcal{E}(\lambda, \varkappa_{2j}; \varkappa_{1i})$ и находятся все его различные собственные значения $\lambda_q, q = 1, \ldots, p_{ji}, \lambda_q := \varkappa_{3q}$.

Тройки $(\varkappa_{3q}, \varkappa_{2j}, \varkappa_{1i})$ так вычисленных чисел образует точки $\sigma_{s1}[\mathcal{E}]$. Пары $(\varkappa_{2k}, \varkappa_{ik})$, на которых пучок $\mathcal{E}(\lambda, \varkappa_{2k}; \varkappa_{ik})$ не имеет собственных значений, являются точками $\sigma_{s2}[\mathcal{E}]$, если $\operatorname{rank} \mathcal{E}(\lambda, \varkappa_{2k}; \varkappa_{ik}) < \operatorname{rank} \mathcal{E}(\lambda, \mu; \nu)$.

Замечание. Алгоритмы, основанные на методе линеаризации и приведенные в §2, сводят вычисление точек спектра

- полиномиальной матрицы общего вида
- пучка постоянных матриц общего вида
- регулярного пучка полиномиальных матриц
- пучка полиномиальных матриц, не имеющего сингулярного спектра,
- пучка полиномиальных матриц, не имеющего точек регулярного спектра,
- пучка полиномиальных матриц общего вида
- двухпараметрического пучка постоянных матриц
- двухпараметрической полиномиальной $1 \times n$ матрицы
- двухпараметрической полиномиальной матрицы общего вида

к вычислению соответственно

- регулярного спектра пучка постоянных матриц
- собственных значений регулярного пучка постоянных матриц
- собственных значений полиномиальной матрицы общего вида и точек спектра пучков постоянных матриц
- собственных значений полиномиальной матрицы общего вида и точек спектра пучков постоянных матриц
- точек спектра полиномиальной матрицы общего вида и точек спектра пучков постоянных матриц
- точек спектра регулярного пучка полиномиальных матриц и точек сингулярного спектра пучка полиномиальных матриц
- собственных значений пучка постоянных матриц общего вида и сингулярного спектра пучка
- нулей алгебраических полиномов от одной переменной и точек сингулярного спектра пучка полного столбцового ранга
- точек регулярного спектра пучков постоянных матриц и точек сингулярного спектра пучка полиномиальных матриц.

§3. Применение метода линеаризации к решению некоторых задач алгебры

Ниже рассматриваются алгоритмы, основанные на идее метода линеаризации, для решения следующих задач алгебры: вычисление нулей скалярного полинома от двух переменных; вычисление общих нулей последовательности скалярных полиномов от двух переменных; решение систем алгебраических уравнений от двух переменных (линейных и нелинейных); вычисление нулей и полюсов рациональных матриц.

3.1. Вычисление нулей скалярного полинома от двух переменных

Пусть $f(\mu_1, \mu_2)$ есть скалярный полином, нули которого следует вычислить, используя метод линеаризации по одной (каждой) из переменных. С этой целью полином $f(\mu_1, \mu_2)$ записывается в следующих видах:

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{s} c_k(\mu)\lambda^k, \quad \lambda = \mu_1, \quad \mu = \mu_2,$$

и

$$f(\mu, \lambda) = \sum \widehat{c}_k(\lambda)\mu^k, \quad \lambda = \mu_1, \quad \mu = \mu_2.$$

К каждому из так представленных полиномов применяется следующий алгоритм, построенный на базе алгоритма из п. 2.2.2.

Для определенности рассмотрим алгоритм вычисления нулей полинома $f(\lambda, \mu)$, который состоит в выполнении следующих операций.

(1) $f(\lambda, \mu)$ представляется в виде

$$f(\lambda, \mu) = [c_s(\mu), \dots, c_0(\mu)][\lambda^s, \lambda^{s-1}, \dots, 1]^T := F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda).$$

(2) Находятся все собственные значения матрицы $F_1(\mu)$. С этой целью, с учетом того, что $c_k(\mu)$ суть алгебраические полиномы, вычисляется полином $\delta(\mu)$, т.е. НОД полиномов $c_k(\mu)$, и равенства $c_k(\mu) = \delta(\mu)v_k(\mu)$, $k = 0, 1, \dots, s$, где $\{v_k(\mu)\}_0^s$ есть последовательность взаимно простых полиномов. Для этого используется алгоритм ∇V-1 факторизации [2]. В результате имеем равенства:

$$f(\lambda, \mu) = \delta(\mu)[v_s(\mu), \dots, v_0(\mu)]\Lambda_1(\lambda) = \delta(\mu)V_1(\mu)\Lambda(\mu) = \delta(\mu)g(\lambda_1\mu),$$

где $g(\lambda, \mu) = V_1(\mu)\Lambda_1(\lambda)$, $V_1(\mu) = [v_s(\mu), \dots, v_0(\mu)]$.

(3) Вычисляются все различные корни μ_i, $i = 1, \ldots, t$, полинома $\delta(\mu)$.

(4) Для каждого фиксированного μ_i вычисляется полином $g_i(\lambda) := g(\lambda, \mu_i)$.

(5) Вычисляются все различные корни λ_{ji} $i = 1, \ldots, p_i$, полинома $g_i(\lambda)$.

Операции (4), (5) выполняются для каждого корня μ_i, $i = 1, \ldots, t$.

Каждая пара (λ_{ji}, μ_i) так вычисленных чисел является собственным нулем полинома $f(\lambda, \mu)$; корни μ_k полинома $\delta(\mu)$, для которых равенство $g_k(\lambda, \mu_k) = 0$ выполняется тождественно, образуют смешанные нули полинома $f(\lambda, \mu)$.

Для вычисления сингулярных нулей полинома $f(\lambda, \mu)$ выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется матрица $W^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства матрицы $\widehat{F}_1(\mu)$.

(2) Формируется пучок $D_1(\lambda, \mu) = W_+^{(1)}(\mu) - \lambda W_-^{(1)}(\mu)$, где $W_+^{(1)}(\mu)$ и $W_-^{(1)}(\mu)$ – матрицы размеров $s \times n_1$ составленные из s первых и s последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

(3) Строится конечная последовательность согласованных пучков

$$D_k(\lambda, \mu) = W_+^{(k)}(\mu) - \lambda W_-^{(k)}(\mu), \quad \text{где} \quad \begin{bmatrix} W_+^{(k)}(\mu) \\ W_-^{(k)}(\mu) \end{bmatrix} = W^{(k)}(\mu),$$

$W^{(k)}(\mu)$ – полиномиальная $2n_{k-1} \times n_k$ матрица, столбцы которой образуют свободный базис нуль-пространств из правых полиномиальных решений матрицы $[-W_-^{(k-1)}(\mu),\, W_+^{(k-1)}(\mu)]$.

Процесс построения пучков $D_k(\lambda, \mu)$ заканчивается на шаге $k = l$, когда выполняется одно из условий: или $n_l = n_{l+1} = 0$, или $n_l = n_{l+1} \neq 0$. В том случае, когда $n_l = n_{l+1} = 0$, полином $f(\lambda, \mu)$ не имеет сингулярных нулей. В том случае, когда $n_l = n_{l+1} \neq 0$, пучок $D_l(\lambda, \mu)$ имеет размеры $n_l \times n_l$, а его спектр не зависит от λ.

(4) Вычисляются все различные собственные значения μ_i, $i = 1, \ldots, t$, матрицы $[-\widehat{W}_-^{(l)}(\mu), \widehat{W}_+^{(l)}(\mu)]$.

(5) Для каждого μ_i вычисляется полином $f_i(\lambda) = f(\lambda, \mu_i)$ и находятся все его различные корни λ_{ji}, $j = 1, \ldots, p_i$.

Каждая пара (λ_{ji}, μ_i) так вычисленных чисел образует собственный сингулярный нуль полинома $f(\lambda, \mu)$ (полинома $f(\mu_1, \mu_2)$). Числа μ_k, для которых равенство $f_k(\lambda) \equiv f(\lambda, \mu_k) = 0$ есть тождество относительно λ, являются смешанными сингулярными нулями полинома

$f(\lambda, \mu)$ (полинома $f(\mu_1, \mu_2)$), в частности, неподвижными точками уравнения $f(\mu_1, \mu_2) = 0$.

3.2. Вычисление общих нулей нескольких полиномов от двух переменных

Рассмотрим алгоритмы вычисления общих нулей последовательности полиномов от двух переменных или, что то же самое, алгоритмы решения систем алгебраических уравнений.

3.2.1. Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений от двух переменных

Пусть $\{g_k(\mu_1, \mu_2)\}_1^n$ есть последовательность полиномов $g_k(\mu_1, \mu_2) = p_k^{(1)}\mu_1 + p_k^{(2)}\mu_2 + p_k^{(0)}$, общие нули которых следует вычислить. Поставленная задача равносильна вычислению спектра двухпараметрического пучка

$$\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2) = P_1\mu_1 + P_2\mu_2 + P_0$$

постоянных $1 \times n$ матриц $P_i = [p_1^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}]$, $i = 0, 1, 2$.

Для вычисления спектра пучка $\mathcal{E}(\mu_1, \mu_2)$ метод линеаризации применяется к каждому из пучков $\mathcal{E}(\lambda, \mu_2)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\mu_1, \lambda)$, имеющих следующий вид:

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu) = C_1^{(1)}\lambda + C_0^{(1)}(\mu), \quad \lambda = \mu_1, \quad \mu = \mu_2, \quad C_1^{(1)} = P_1,$$

$$C_0^{(1)}(\mu) = \mu P_2 + P_0;$$

$$\widehat{\mathcal{E}}(\mu, \lambda) = \widehat{C}_1^{(1)}\mu + C_0^{(1)}(\lambda), \quad \mu = \mu_1, \quad \lambda = \mu_2, \quad \widehat{C}_1^{(1)} = P_2,$$

$$C_0^{(1)}(\lambda) = \lambda P_1 + P_0.$$

Объединение точек спектров пучков $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$ и $\widehat{\mathcal{E}}(\mu, \lambda)$ дает решение поставленной задачи.

Точки спектра пучка $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$ можно вычислить, используя алгоритм из п. 2.3. При этом следует учесть, что пучок $\mathcal{E}(\lambda, \mu)$ имеет размеры $1 \times n$, так что в равенстве

$$\mathcal{E}(\lambda, \mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda)$$

матрица $F_1(\mu) = [C_1^{(1)}, C_0^{(1)}(\mu)] = \mu C_1^{(2)} + C_0^{(2)}$ есть пучок постоянных $1 \times 2n$ матриц: $C_1^{(2)} = [\mathbb{O}, P_2], C_0^{(2)} = [P_1, P_0]$. Поэтому при вычислении собственных значений μ_i матрицы $F_1(\mu)$ и при вычислении матрицы $Q^{(i)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис $N_c[F_1]$, следует использовать ∇V-1 факторизацию пучка $F_1(\mu)$: $F_1(\mu) = \nabla_1(\mu)V_1(\mu)$, где нули полинома $\nabla_1(\mu)$ совпадают с собственными значениями пучка $F_1(\mu)$; матрица $Q^{(i)}$ вычисляется как ортонормированный базис нуль-пространства матрицы $V_1(\mu_i)$.

3.2.2. Алгоритм решения системы нелинейных алгебраических уравнений от двух переменных

Пусть $\{f_k(\mu_1,\mu_2)\}_{k=1}^n$ есть последовательность нелинейных алгебраических полиномов, общие нули которых следует вычислить. Решение задачи сводится к вычислению точек спектра двухпараметрической полиномиальной $1 \times n$ матрицы

$$F(\mu_1,\mu_2) = [f_1(\mu_1,\mu_2),\dots,f_n(\mu_1,\mu_2)]$$

и может быть реализовано алгоритмом из п. 2.2. Метод линеаризации для вычисления спектра $F(\mu_1,\mu_1)$ применяется к каждой из матриц $F(\lambda,\mu)$ и $\widehat{F}(\mu,\lambda)$, полученных при записи $F(\mu_1,\mu_2)$ в виде полиномиальной матрицы, где в качестве ведущего параметра выбирается $\lambda = \mu_1(\mu = \mu_2)$ или $\mu = \mu_1(\lambda = \mu_2)$. Объединение спектров матриц $F(\lambda,\mu)$ и $\widehat{F}(\mu,\lambda)$ дает решение поставленной задачи. Поскольку матрица $F(\mu_1,\mu_2)$ имеет ранг равный единице, вычисление точек ее спектра реализуется алгоритмом из п. 2.2.2.

3.3. Вычисление нулей и полюсов рациональной двухпараметрической матрицы

Пусть $R(\lambda,\mu) = S(\lambda,\mu)T^{-1}(\lambda,\mu)$ есть рациональная несократимая $m \times n$ матрица. Здесь $T(\lambda,\mu)$ есть регулярная двухпараметрическая $n \times n$ матрица, $S(\lambda,\mu)$ есть $m \times n$ двухпараметрическая матрица, так что полюсы $R(\lambda,\mu)$ совпадают с точками спектра $T(\lambda,\mu)$. Нули матрицы $R(\lambda,\mu)$ совпадают с точками спектра матрицы $S(\lambda,\mu)$. Для вычисления точек $\sigma[T] = \sigma_r[T]$ можно использовать алгоритм из п. 2.3. Для вычисления точек $\sigma[S]$ можно использовать алгоритмы из пп. 2.4–2.6.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 107–149.
2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры. Часть* I. *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Петербург, 2004.

3. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 3. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 166–207.

Kublanovskaya V. N. To solving problems of algebra for two-parameter matrices. 4.

The paper considers applications of the linearization method to computing points of the finite regular and singular spectra of two-parameter polynomial matrices, of pencils of polynomial matrices of general form, and of two-parameter pencils of constant and polynomial matrices.

This method allows one to reduce the solution of the spectral problems mentioned above to the solution of the generalized eigenproblem for regular matrix pencils, which is a classical algebraic problem.

Also the linearization method is applied to computing the zeros of a polynomial in two variables and the common zeros of a sequence of polynomials in two variables.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: veracub@pdmi.ras.ru

Поступило 25 февраля 2009 г.