Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

Л. Ю. Колотилина

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ PM- И PH-МАТРИЦ В ТЕРМИНАХ ДИАГОНАЛЬНОГО ПРЕОБЛАДАНИЯ

§1. Введение

В этой заметке предложено простое описание PM- и PH-матриц, введенных в работе [6], в терминах обобщенного диагонального преобладания с векторами специального вида. Это описание используется для вывода некоторых свойств матриц из рассматриваемых классов. В частности, доказано, что PM- и PH-матрицы соответственно образуют подклассы классов квази-PM- и квази-PH-матриц, введенных в работе [2]. Также установлено условие, необходимое для того, чтобы заданная матрица являлась PH-матрицей относительно заданного разбиения множества индексов.

Напомним исходные определения PM- и PH-матриц [6].

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, и пусть

$$\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant m, \tag{1.1}$$

– некоторое разбиение множества индексов $\langle m\rangle = \{1,\dots,m\}$ на n непересекающихся непустых подмножеств. Обозначим

$$A_{ij} = A[M_i, M_j] = (a_{rs})_{\substack{r\in M_i\\ s\in M_j}}, \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{1.2}$$

и представим A в следующем блочном виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Ключевые слова : PM-матрица, PH-матрица, квази-PM-матрица, квази-PH-матрица, агрегированные матрицы, обобщенное диагональное преобразование, $\mathcal{S}$-строгое диагональное преобразование.

Определим агрегированные матрицы порядка n (в количестве $m_1 \times \cdots \times m_n$ штук, где $m_i = |M_i|$, $i = 1, \ldots, n$) соотношениями

$$A^{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} = \begin{bmatrix} r_{i_1}(A_{11}) & r_{i_1}(A_{12}) & \ldots & r_{i_1}(A_{1n}) \\ r_{i_2}(A_{21}) & r_{i_2}(A_{22}) & \ldots & r_{i_2}(A_{2n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{i_n}(A_{n1}) & r_{i_n}(A_{n2}) & \ldots & r_{i_n}(A_{nn}) \end{bmatrix},$$

$$i_k \in M_k, \quad k = 1, \ldots, n. \quad (1.4)$$

Здесь и на протяжении данной работы для вещественной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{t \times s}$, $t, s \geqslant 1$, через $r_i(A)$ обозначается сумма элементов ее i-й строки, т.е.

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, t. \quad (1.5)$$

Матрица A называется *PM-матрицей* относительно разбиения (1.1), если она является Z-матрицей (т.е. ее внедиагональные элементы неположительны), а все агрегированные матрицы $A^{(i_1, \ldots, i_n)}$, $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$, определенные в (1.4), являются невырожденными M-матрицами. Матрица A называется *PH-матрицей* относительно разбиения (1.1), если ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является PM-матрицей относительно того же самого разбиения множества индексов.

Напомним, что для $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m \geqslant 1$, ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ определяется соотношениями

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что матрица A является PM-матрицей (PH-матрицей) относительно наиболее мелкого (точечного) разбиения $\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{m} \{i\}$ множества индексов тогда и только тогда, когда A является невырожденной M-матрицей (H-матрицей). С другой стороны, для самого грубого разбиения $\langle m \rangle = M_1$, где $n = 1$, A является PH-матрицей тогда и только тогда, когда она имеет строгое диагональное преобладание (по строкам).

Поскольку определения PM- и PH-матриц достаточно сложны, желательно было бы найти другие, более простые, характеризации таких матриц. Как известно, PH-матрицы образуют подкласс класса

H-матриц (см. [1]), а H-матрицы могут быть охарактеризованы как матрицы, обладающие строгим обобщенным диагональным преобладанием (см., напр., [3, глава 6, теорема 2.3]). В §2 этой работы мы показываем, что матрицы, являющиеся PH-матрицами относительно некоторого разбиения множества индексов, могут быть охарактеризованы как матрицы, имеющие строгое обобщенное диагональное преобладание с положительным вектором специальной структуры, которая определяется рассматриваемым разбиением индексного множества.

Ниже используются следующие дополнительные обозначения.

- I_n — единичная матрица порядка n.
- e — единичный вектор.
- Для неотрицательной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, через $\rho(A)$ обозначается перроновский корень матрицы A, т.е. неотрицательное собственное значение A, совпадающее с ее спектральным радиусом.
- Для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ мы полагаем $|A| = (|a_{ij}|)$.
- Векторные и матричные неравенства понимаются покомпонентно.

§2. Результаты

Основным результатом данной работы является следующая теорема эквивалентности.

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, является Z-матрицей и пусть $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, – некоторое разбиение множества индексов на непустые непересекающиеся подмножества. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *A является PM-матрицей относительно рассматриваемого разбиения;*

(ii) *существует положительный вектор $x = (x_i) \in \mathbb{R}^m$ вида*

$$x_i = c_j \quad \text{для всех} \quad i \in M_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

такой, что вектор Ax положителен, т.е. матрица A имеет строгое обобщенное диагональное преобладание с вектором, все *блочные компоненты которого, ассоциированные с подмножествами M_j, $j = 1, \dots, n$, являются постоянными векторами.*

Доказательство. (ii) $\Longrightarrow$ (i) Пусть $Ax > 0$ для некоторого положительного вектора x вида (2.1). Тогда, очевидно, все агрегированные матрицы $A^{(i_1,\dots,i_n)}$, ассоциированные с рассматриваемым разбиением, имеют строгое обобщенное диагональное преобладание с вектором $c = (c_i)$. Следовательно, все эти матрицы являются невырожденными M-матрицами, так что A есть PM-матрица по определению.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Пусть A является PM-матрицей. Предположим сперва, что A не имеет нулевых внедиагональных элементов.

Поскольку, по определению, все агрегированные матрицы $A^{(i_1,\dots,i_n)}$ являются невырожденными M-матрицами, их диагональные элементы положительны, т.е.

$$(A_{ii}e)_j > 0 \quad \text{для всех} \quad j \in M_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, диагональная матрица

$$D = \operatorname{diag}(r_1(D_A), \dots, r_m(D_A)), \quad \text{где} \quad D_A = \operatorname{Diag}(A_{11}, \dots, A_{nn}),$$

является невырожденной, и, переходя (если это необходимо) к матрице $D^{-1}A$, мы можем считать, не теряя общности, что

$$A_{ii}e = e, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Ввиду (2.2), агрегированные матрицы (1.4) можно представить в виде

$$A^{(i_1,\dots,i_n)} = I_n - B^{(i_1,\dots,i_n)}, \quad i_j \in M_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.3}$$

где, по предположению, все внедиагональные элементы всех матриц $B^{(i_1,\dots,i_n)}$ положительны.

Поскольку агрегированные матрицы являются невырожденными M-матрицами, из соотношений (2.3) следует, что

$$\rho\left(B^{(i_1,\dots,i_n)}\right) < 1 \quad \text{для всех} \quad i_j \in M_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.4}$$

Пусть

$$\rho_0 = \rho\left(B^{(i_1^{(0)},\dots,i_n^{(0)})}\right) = \max_{i_1,\dots,i_n}\left\{\rho\left(B^{(i_1,\dots,i_n)}\right)\right\}, \tag{2.5}$$

где максимум берется по всем $i_1 \in M_1, \ldots, i_n \in M_n$. В силу (2.4), мы имеем

$$\rho_0 < 1. \tag{2.6}$$

Пусть $c = (c_i)$ – правый перроновский вектор матрицы $B^{(0)} = B^{(i_1^{(0)},\ldots,i_n^{(0)})}$, т.е.

$$B^{(0)}c = \rho_0 c. \tag{2.7}$$

Поскольку все внедиагональные элементы матрицы $B^{(0)}$ положительны, она неприводима, и, по теореме Перрона–Фробениуса (см., напр., [7, глава 1, теорема 4.1]), вектор c определен единственным образом (с точностью до положительного множителя) и положителен.

Положим

$$D_c = \mathrm{diag}\,(c_1, \ldots, c_n).$$

Тогда, в силу (2.7), мы имеем

$$D_c^{-1}B^{(0)}D_c e = D_c^{-1}B^{(0)}c = \rho_0 e,$$

т.е.

$$r_{i_j^{(0)}}(D_c^{-1}B^{(0)}D_c) = \rho_0 \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $i_k \in M_k$ для некоторого фиксированного $k \in \langle n \rangle$ и пусть $i_k \neq i_k^{(0)}$. Для матрицы

$$G = D_c^{-1}B^{(i_1^{(0)},\ldots,i_{k-1}^{(0)},i_k,i_{k+1}^{(0)},\ldots,i_n^{(0)})}D_c,$$

отличающейся от $D_c^{-1}B^{(0)}D_c$ лишь k-й строкой, в силу теоремы Фробениуса (см., напр., [7, глава 2, теорема 1.1]) и соотношений (2.5), мы имеем

$$\min_{i=i_1^{(0)},\ldots,i_{k-1}^{(0)},i_k,i_{k+1}^{(0)},\ldots,i_n^{(0)}} r_i(G) \leqslant \rho(G) \leqslant \rho_0. \tag{2.9}$$

Кроме того, поскольку матрица G неприводима, из той же теоремы вытекает, что либо оба неравенства в (2.9) являются строгими, либо оба являются равенствами. Поскольку

$$r_i(G) = r_i(D_c^{-1}B^{(0)}D_c) \quad \text{для всех} \quad i \neq i_k,$$

то из (2.9) и (2.8) с учетом неприводимости матрицы G следует, что либо $r_{i_k}(G) = \rho_0$, либо

$$\min\{\rho_0, r_{i_k}(G)\} < \rho(G) < \rho_0,$$

а значит в обоих случаях

$$r_{i_k}(G) \leqslant \rho_0.$$

Поскольку k и $i_k \neq i_0$ могут быть выбраны произвольно, из последнего неравенства вытекает, что

$$D_c^{-1} B^{(i_1,\ldots,i_n)} D_c e \leqslant \rho_0 e \quad \text{для всех} \quad i_j \in M_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

или, что равносильно,

$$B^{(i_1,\ldots,i_n)} c \leqslant \rho_0 c \quad \text{для всех} \quad i_j \in M_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Ввиду (2.3), из (2.10) следует, что

$$A^{(i_1,\ldots,i_n)} c = c - B^{(i_1,\ldots,i_n)} c \geqslant (1-\rho_0) c \quad \text{для всех} \quad i_j \in M_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тем самым доказано, что для вектора x, определенного в (2.1), мы имеем $Ax \geqslant (1-\rho_0)x$, и нужное нам неравенство $Ax > 0$ непосредственно следует из (2.6).

Наконец, предположим, что у матрицы A имеются нулевые внедиагональные элементы. Рассмотрим матрицу $A_\varepsilon \leqslant A$, которая получается из A заменой ее нулевых внедиагональных элементов на $-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Ясно, что для достаточно малых ε все агрегированные матрицы $A_\varepsilon^{(i_1,\ldots,i_n)}$ являются невырожденными M-матрицами, так что A_ε есть PM-матрица без нулевых внедиагональных элементов. Как уже установлено, для некоторого вектора x вида (2.1) вектор $A_\varepsilon x$ положителен. Следовательно, тем более положителен и вектор $Ax \geqslant A_\varepsilon x$.

Теорема доказана. □

Замечание 2.1. Следует отметить, что при доказательстве теоремы 2.1 нами была установлена верхняя оценка

$$\rho(A) \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_n} \left\{ \rho\left(A^{(i_1,\ldots,i_n)} \right) \right\} \tag{2.11}$$

для перроновского корня неотрицательной матрицы A в терминах перроновских корней ассоциированных агрегированных матриц. Используя аналогичные рассуждения, нетрудно доказать, что имеет место и соответствующая нижняя оценка

$$\min_{i_1,\ldots,i_n} \left\{ \rho \left(A^{(i_1,\ldots,i_n)} \right) \right\} \leqslant \rho(A). \tag{2.12}$$

Оценки (2.11) и (2.12) впервые были получены (иным способом) в работе [1].

Представим теперь несколько простых следствий из теоремы 2.1. Первые три утверждения вполне очевидны.

Следствие 2.1 [1]. *Если матрица A является PM-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, то она является невырожденной M-матрицей.*

Следствие 2.2 [6]. *Если A является PM-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, то она также является PM-матрицей и относительно любого разбиения, более мелкого, чем исходное.*

Следствие 2.3. *Если матрица A является PM-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, а Z-матрица B удовлетворяет условию $B \geqslant A$, то и B является PM-матрицей относительно того же самого разбиения.*

Следующий результат является новым и устанавливает, что класс PM-матриц является подклассом класса так называемых квази-PM-матриц, введенных в работе [2].

Напомним, что матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, называется квази-PM-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, если ее блочно диагональная часть $D_A = \mathrm{Diag}\,(A_{11}, \ldots, A_{nn})$ монотонна, а матрица $D_A^{-1}A$ является PM-матрицей относительно того же самого разбиения.

Следствие 2.4. *Если матрица A является PM-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, то она является и квази-PM-матрицей относительно того же самого разбиения.*

Доказательство. По определению PM-матрицы, диагональные блоки A_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, являются Z-матрицами и имеют строгое диагональное преобладание. Следовательно, $D_A = \mathrm{Diag}\,(A_{11}, \ldots, A_{nn})$ является невырожденной M-матрицей, а значит она монотонна. По теореме 2.1, для того, чтобы доказать, что Z-матрица $D_A^{-1}A$ является

PM-матрицей, достаточно показать, что $D_A^{-1}Ax > 0$ для некоторого положительного вектора x вида (2.1). Но, опять же по теореме 2.1, для PM-матрицы A неравенство $Ax > 0$ обязательно выполнено для некоторого вектора x нужной структуры, откуда немедленно следует, что $D_A^{-1}Ax > 0$. □

Следующий результат дает описание PH-матриц в терминах обобщенного диагонального преобладания.

Теорема 2.2. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, *и пусть* $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, *– некоторое разбиение множества индексов на непустые непересекающиеся подмножества. Следующие утверждения равносильны:*

(i) *A является PH-матрицей относительно рассматриваемого разбиения;*

(ii) *A имеет строгое обобщенное диагональное преобладание с положительным вектором $x = (x_i) \in \mathbb{R}^m$ вида (2.1).*

Доказательство. По определению, A является PH-матрицей тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является PM-матрицей. По теореме 2.1, $\mathcal{M}(A)$ является PM-матрицей тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}(A)x > 0$ для некоторого положительного вектора x вида (2.1), т.е. когда A имеет строгое обобщенное диагональное преобладание с вектором x. □

Ниже мы приводим очевидные аналоги следствий 2.1–2.2 и 2.4 для PH-матриц.

Следствие 2.5 [1]**.** *Если A является PH-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, то A является H-матрицей.*

Следствие 2.6 [6]**.** *Если A является PH-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, то она также является PH-матрицей и относительно любого разбиения, более мелкого, чем исходное.*

Следующий результат утверждает, что любая PH-матрица одновременно является и квази-PH-матрицей относительно того же самого разбиения.

Напомним, что, в соответствии с работой [2], матрица $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, называется квази-PH-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, если ее блочно диагональная часть

$D_A = \mathrm{Diag}\,(A_{11}, \ldots, A_{nn})$ невырождена, а матрица $D_A^{-1}A$ является PH-матрицей относительно того же самого разбиения.

Следствие 2.7. *Если A является PH-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, то она является и квази-PH-матрицей относительно того же самого разбиения.*

Доказательство. Действительно, поскольку A является PH-матрицей, ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ является PM-матрицей, а значит, по следствию 2.4, $\mathcal{M}(A)$ является квази-PM-матрицей, т.е. $\mathcal{M}(D_A)$ есть невырожденная M-матрица, а $\mathcal{M}(D_A)^{-1}\mathcal{M}(A)$ есть PM-матрица. Следовательно, D_A есть H-матрица и, в частности, она невырождена. Наконец, обозначая $A = D_A - B$ и используя тот факт, что, по теореме Островского (см., напр., [5, с. 131]),

$$|D_A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(D_A)^{-1},$$

мы выводим:

$$\mathcal{M}(D_A^{-1}A) = \mathcal{M}(I - D_A^{-1}B) \geqslant I - \mathcal{M}(D_A)^{-1}|B| = \mathcal{M}(D_A)^{-1}\mathcal{M}(A).$$

Ввиду следствия 2.3, отсюда вытекает, что $\mathcal{M}(D_A^{-1}A)$ является PM-матрицей, а значит A есть квази-PH-матрица. □

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 2.2.

В случае наиболее мелкого (точечного) разбиения множества индексов ($n = m$) теорема 2.2 утверждает, что $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ является PH-матрицей тогда и только тогда, когда она имеет строгое обобщенное диагональное преобладание. Поскольку, по определению, A является PH-матрицей относительно этого разбиения тогда и только тогда, когда A является H-матрицей, в данном случае утверждение теоремы 2.2 сводится к тому хорошо известному факту, что A является H-матрицей тогда и только тогда, когда она имеет строгое обобщенное диагональное преобладание.

Для $n = 1$ теорема 2.2 утверждает, что матрица $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ является PH-матрицей относительно самого грубого разбиения $\langle m\rangle = M_1$ множества индексов тогда и только тогда, когда она имеет строгое диагональное преобладание. Этот факт также легко следует из определения PH-матрицы.

Рассмотрим тот случай, когда $n = 2$ и $\langle m\rangle = M_1 \cup M_2$. Как было показано в работе [1], класс матриц, являющихся PH-матрицами относительно такого разбиения, совпадает с известным классом, введенным в [4] и исследованным в ряде последующих работ (см. ссылки в работе [1]). В монографии [8] этот класс был назван классом матриц, имеющих S-строгое диагональное преобладание (где $S = M_1$), см. [8, определение 3.10]. В соответствии с теоремой 2.2, этот матричный класс можно описать как класс матриц, имеющих строгое обобщенное диагональное преобладание с вектором вида $v = (v_i)$, где

$$v_i = \begin{cases} \alpha > 0, & i \in M_1, \\ \beta > 0, & i \in M_2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Заметим, что тот факт, что матрица A с S-строгим диагональным преобладанием удовлетворяет условию $Av > 0$ для некоторого вектора v вида (2.13) был впервые отмечен в работе [4] (также см. доказательство теоремы 3.11 в книге [8]).

В заключение данной заметки мы приведем простое условие диагонального преобладания, необходимое для того, чтобы заданная матрица являлась PH-матрицей относительно некоторого разбиения индексного множества. Это условие обобщает тот хорошо известный факт, что по крайней мере одна строка H-матрицы обязана иметь строгое диагональное преобладание.

Теорема 2.3. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, является PH-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$ множества индексов. Тогда для по крайней мере одного значения $i \in \langle n\rangle$ выполняется условие*

$$|a_{jj}| > \sum_{k\neq j} |a_{jk}| \quad \text{для всех} \quad j \in M_i. \tag{2.14}$$

Доказательство. Если $n = 1$, то, как было упомянуто выше, матрица A имеет строгое диагональное преобладание, и условие (2.14) тривиально выполняется для $i = 1$.

Пусть $n \geqslant 2$. Если условие (2.14) выполнено для некоторого $i > 1$, то доказывать нечего. Поэтому предположим, что

$$r_{i_2}(\mathcal{M}(A)) \leqslant 0, \quad \ldots, \quad r_{i_n}(\mathcal{M}(A)) \leqslant 0 \qquad \text{для некоторых} \quad i_2 \in M_2, \ldots, i_n \in M_n.$$

Эти неравенства означают, что для произвольного $i_1 \in M_1$ мы имеем

$$r_{i_2}\left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right) \leqslant 0, \quad \ldots, \quad r_{i_n}\left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right) \leqslant 0.$$

Но, поскольку матрица $\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}$ является невырожденной M-матрицей, по крайней мере одна из ее строк обязана иметь строгое диагональное преобладание, так что

$$r_{i_1}(\mathcal{M}(A)) = r_{i_1}\left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}\right) > 0. \tag{2.15}$$

Теперь для завершения доказательства остается лишь заметить, что соотношения (2.15) справедливы для всех $i_1 \in M_1$. $\square$

Литература

1. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
2. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для PM- и PH-матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 75–109
3. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
4. Y. M. Gao, X. H. Wang, *Criteria for generalized diagonally dominant and M-matrices.* — Linear Algebra Appl. **169** (1992), 257–268.
5. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1991.
6. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 692–702.
7. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* John Wiley & Sons, New York etc., 1964.
8. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles.* Springer, 2004.

Kolotilina L. Yu. Diagonal dominance characterization of PM- and PH-matrices.

New characterizations of the so-called PM- and PH-matrices in terms of generalized diagonal dominance are obtained and used to derive some of their properties. Also it is proved that a PH-matrix necessarily has a certain number of strictly diagonally dominant rows.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 18 мая 2009 г.