Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

Л. Ю. Колотилина

ОЦЕНКИ ОБАТНЫХ ДЛЯ PM- И PH-МАТРИЦ

§1. Введение

В работе предлагаются оценки для матриц, обратных к так называемым PM- и PH-матрицам, которые образуют подклассы соответственно невырожденных M- и H-матриц и были введены автором в работе [7].

Напомним некоторые определения.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, и пусть

$$\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant m, \tag{1.1}$$

– разбиение множества индексов $\langle m\rangle = \{1,\dots,m\}$ на n непересекающихся непустых подмножеств. Обозначим

$$A_{ij} = A[M_i, M_j] = (a_{rs})_{\substack{r\in M_i\\ s\in M_j}}, \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{1.2}$$

и представим A в следующем блочном виде:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

На протяжении данной работы для вещественной $t\times s$ матрицы $A = (a_{ij})$ мы используем обозначение

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}, \quad i = 1,\dots,t, \tag{1.4}$$

так что $r_i(A)$ – это сумма элементов i-й строки матрицы A.

Ключевые слова : PM-матрица, PH-матрица, обратная матрица, спектральный радиус, квази-PM-матрица, квази-PH-матрица, бесконечная норма.

Как обычно, для комплексной матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m \geqslant 1$, ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ определяется по формуле

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Комплексная матрица A называется H-матрицей, если $\mathcal{M}(A)$ – невырожденная M-матрица. Напомним, что если A является H-матрицей, то она невырождена (см., напр., [6, с. 131]). Кроме того, по теореме Островского [9] (см. также [6, с. 131]), обратные матрицы A^{-1} и $\mathcal{M}(A)^{-1}$ связаны следующим неравенством.

Теорема 1.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m \geqslant 1$, является H-матрицей. Тогда*

$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A)^{-1}. \tag{1.5}$$

В неравенстве (1.5) и на протяжении всей статьи для $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ мы полагаем $|A| = (|a_{ij}|)$; кроме того, в вещественном случае матричные и векторные неравенства понимаются как покомпонентные.

Пусть задана матрица $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m \geqslant 1$, и разбиение индексного множества

$$\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i, \quad 1 \leqslant n \leqslant m, \tag{1.6}$$

на непересекающиеся непустые подмножества. Представим A в виде (1.2)–(1.3) и определим следующий набор, состоящий из $m_1 \times \cdots \times m_n$ агрегированных матриц порядка n:

$$A^{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} = \begin{bmatrix} r_{i_1}(A_{11}) & r_{i_1}(A_{12}) & \ldots & r_{i_1}(A_{1n}) \\ r_{i_2}(A_{21}) & r_{i_2}(A_{22}) & \ldots & r_{i_2}(A_{2n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{i_n}(A_{n1}) & r_{i_n}(A_{n2}) & \ldots & r_{i_n}(A_{nn}) \end{bmatrix}, \quad i_k \in M_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Здесь $m_i = |M_i|$, $i = 1, \ldots, n$.

Будем говорить, что A является *PM-матрицей* относительно разбиения (1.6), если A есть Z-матрица (т.е. ее внедиагональные элементы неположительны) и все матрицы $A^{(i_1, \ldots, i_n)}$, $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$, определенные в соответствии с (1.7), являются невырожденными M-матрицами. Также мы будем говорить, что A является *PH-матрицей* относительно разбиения (1.6), если $\mathcal{M}(A)$ является PM-матрицей относительно того же самого разбиения.

Очевидно, матрица A является PM-матрицей (PH-матрицей) относительного наиболее мелкого (точечного) разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{m}\{i\}$ тогда и только тогда, когда A – невырожденная M-матрица (H-матрица). С другой стороны, для самого грубого разбиения $n = 1$, $\langle m\rangle = M_1$ матрица A является PH-матрицей тогда и только тогда, когда она обладает строгим диагональным преобладанием (по строкам).

В работе [2] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, является PH-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества, то A является H-матрицей.*

В частности, в применении к PM-матрицам, которые, по определению, являются Z-матрицами, из теоремы 1.2 вытекает следующий результат.

Следствие 1.1. *Если $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, является PM-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества, то A является невырожденной M-матрицей.*

Итак, PM- и PH-матрицы являются невырожденными, так что естественно встает вопрос о получении оценок для их обратных. Эта проблематика уже рассматривалась в статье [7], где были установлены двусторонние оценки для бесконечной нормы обратной к PM-матрице, а также верхняя оценка для бесконечной нормы обратной к PH-матрице. В этой работе мы усиливаем предыдущие результаты. В частности, в §2 мы выводим двусторонние оценки для строчных сумм блоков обратной $A^{-1} = (A'_{ij})$ к PM-матрице $A = (A_{ij})$ и описываем случаи равенства для неприводимой матрицы A. Верхние оценки для бесконечной нормы блоков обратной A^{-1} к PH-матрице A представлены в §3.

В §4 приведены оценки для спектральных радиусов обратных к PM- и PH-матрицам, а также двойственные им оценки для модулей ближайших к нулю собственных значений PM- и PH-матриц.

В §5 вводятся определения квази-PM- и квази-PH-матриц и устанавливаются оценки для обратных к таким матрицам. В частности, улучшается известная верхняя оценка Робера.

В §6 основные результаты статьи иллюстрируются на простом примере.

Заметим, что для PM- или PH-матрицы A полученные результаты позволяют оценить A^{-1}, $\rho(A^{-1})$ и наименьшее по модулю собственное значение A с помощью обратных к $n \times n$ агрегированным матрицам и их наименьших по модулю собственных значений. Хотя число агрегированных матриц может быть весьма велико, если m велико, при достаточно малом n вычисление предлагаемых оценок не требует больших затрат, в особенности, в контексте параллельных вычислений.

На практике основная задача состоит в том, чтобы определить, является ли заданная матрица PH-матрицей относительно некоторого разбиения индексного множества. Однако, поскольку матрица со строгим диагональным преобладанием является PH-матрицей относительно любого разбиения множества индексов, то для таких матриц предлагаемые оценки могут использоваться в сочетании с произвольным разбиением (или даже несколькими разбиениями одновременно).

В этой работе используются следующие обозначения.

- Для $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, мы полагаем $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$.
- I_l – единичная матрица порядка l.
- $e_k^{(l)}$ (или просто e_k) – это k-й координатный вектор размерности l.
- $e = e^{(l)} = \sum_{k=1}^{l} e_k^{(l)}$ – единичный вектор размерности l.
- Для заданного неотрицательного вектора $v = (v_j)_{j=1}^{m}$ и разбиения (1.6) множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества векторы $P(v) = (p_i)_{i=1}^{n}$ и $Q(v) = (q_i)_{i=1}^{n}$ определяются по формулам
$$p_i = \max_{j \in M_i} v_j, \quad q_i = \min_{j \in M_i} v_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.8}$$
- Для заданной неотрицательной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m \geqslant 1$, и разбиения (1.6) определим $n \times n$ матрицы
$$P(A) = (p_{ij}), \quad p_{ij} = \max_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{1.9}$$
и
$$Q(A) = (q_{ij}), \quad q_{ij} = \min_{k \in M_i} \sum_{l \in M_j} a_{kl}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{1.10}$$
составленные из строчных сумм блоков матрицы A, которые были введены в работе [3].

§2. Двусторонние оценки для строчных сумм блоков матрицы, обратной к PM-матрице

Следуя работе [7], введем в рассмотрение следующие $(m-1)\times(m-1)$ матрицы:

$$
\begin{aligned}
A_i^{(i)} &= \hat{A}_{i+1} \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-i-1} \end{bmatrix}, \\
A_i^{(i+1)} &= \hat{A}_{i} \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-i-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Здесь и ниже для матрицы $B \in \mathbb{C}^{t\times s}$, где $t \geqslant 2$, $s \geqslant 1$, через $\hat{B}_j$ обозначается ее $(t-1)\times s$ подматрица, получаемая в результате удаления из B ее j-й строки, $j = 1, \dots, t$. Переход от матрицы A к паре матриц $A_i^{(i)}$, $A_i^{(i+1)}$ мы называем агрегированием столбцов i и $i+1$ матрицы A. Заметим, что матрицы $A_i^{(i)}$ и $A_i^{(i+1)}$ образуют набор агрегированных матриц, ассоциированных с разбиением $\langle m\rangle = \bigcup_{k=1}^{m-1} M_k$, где $M_k = \{k\}$, $k = 1, \dots, i-1$; $M_i = \{i, i+1\}$; $M_k = \{k+1\}$, $k = i+1, \dots, m-1$, и в терминах матриц (1.7) мы имеем

$$
A_i^{(i)} = A^{(1,\dots,i,i+2,\dots,m)}, \quad A_i^{(i+1)} = A^{(1,\dots,i-1,i+1,\dots,m)}. \tag{2.2}
$$

Таким образом, по следствию 1.1, если обе матрицы $A_i^{(i)}$ и $A_i^{(i+1)}$ являются невырожденными M-матрицами, то и A – невырожденная M-матрица.

Ключевым результатом статьи является следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 2$, – невырожденная M-матрица, такая что для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant m-1$, обе матрицы $A_i^{(i)}$ и $A_i^{(i+1)}$, определенные в* (2.1), *являются невырожденными M-матрицами. Пусть $u = (u_i) \in \mathbb{R}^m$ – неотрицательный вектор и пусть*

$$
\max\left\{\left(A^{-1}u\right)_i, \left(A^{-1}u\right)_{i+1}\right\} = \left(A^{-1}u\right)_j, \quad j \in \{i, i+1\}. \tag{2.3}
$$

Тогда относительно разбиения

$$
\langle m\rangle = \{1\} \cup \dots \cup \{i-1\} \cup \{i, i+1\} \cup \{i+2\} \cup \dots \cup \{m\},
$$

мы имеем

$$P(A^{-1}u) = \begin{bmatrix} (A^{-1}u)_1 \\ \dots \\ (A^{-1}u)_{i-1} \\ (A^{-1}u)_j \\ (A^{-1}u)_{i+2} \\ \dots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix} \leqslant \left(A^{(1,\dots,i-1,j,i+2,\dots,m)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{i-1} \\ u_j \\ u_{i+2} \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

и

$$Q(A^{-1}u) = \begin{bmatrix} (A^{-1}u)_1 \\ \dots \\ (A^{-1}u)_{i-1} \\ (A^{-1}u)_{2i+1-j} \\ (A^{-1}u)_{i+2} \\ \dots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix} \geqslant \left(A^{(1,\dots,i-1,2i+1-j,i+2,\dots,m)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_{i-1} \\ u_{2i+1-j} \\ u_{i+2} \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба соотношения (2.4) и (2.5) являются равенствами тогда и только тогда, когда $P(A^{-1}u) = Q(A^{-1}u)$, т.е.

$$(A^{-1}u)_i = (A^{-1}u)_{i+1}; \tag{2.6}$$

в противном случае оба неравенства (2.4) и (2.5) строгие.

Доказательство. Переставляя (если это необходимо) строки и столбцы матрицы A и компоненты вектора u, мы можем считать, не теряя общности, что $i = 1$ и $j = 2$, т.е.

$$v_1 \leqslant v_2, \tag{2.7}$$

где мы полагаем $v = A^{-1}u$. В этом случае, с учетом (2.2), соотношения (2.4)–(2.6) можно записать в виде

$$P(v) = \hat{v}_1 \leqslant (A_1^{(2)})^{-1}\hat{u}_1; \tag{2.8}$$

$$Q(v) = \hat{v}_2 \geqslant (A_1^{(1)})^{-1}\hat{u}_2; \tag{2.9}$$

$$v_1 = v_2. \tag{2.10}$$

Используя (2.1) и (2.7) и принимая во внимание, что A – Z-матрица, мы выводим:

$$\begin{aligned} A_1^{(2)}\hat{v}_1 &= \hat{A}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & I_{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \\ &= \hat{A}_1 \begin{bmatrix} v_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \leqslant \hat{A}_1 v = \widehat{(Av)}_1 = \hat{u}_1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Заметим, что неравенство в (2.11) вытекает из условия (2.7) и того факта, что все элементы в первом столбце матрицы $\hat{A}_1$ неположительны. Поскольку, по предположению, $A_1^{(2)}$ – невырожденная M-матрица, мы имеем $(A_1^{(2)})^{-1} \geqslant 0$, и из (2.11) следует (2.8).

Аналогично, для того, чтобы доказать неравенство (2.9), мы выводим:

$$\begin{aligned} A_1^{(1)}\hat{v}_2 &= \hat{A}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & I_{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \\ &= \hat{A}_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \geqslant \hat{A}_2 v = \widehat{(Av)}_2 = \hat{u}_2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

откуда и следует (2.9).

Рассмотрим случаи равенства в (2.8) и (2.9).

Заметим сперва, что если выполнено условие (2.10), то из (2.11) и (2.12) вытекает, что

$$A_1^{(2)}\hat{v}_1 = \hat{A}_1 v = \hat{u}_1 \quad \text{и} \quad A_1^{(1)}\hat{v}_2 = \hat{A}_2 v = \hat{u}_2,$$

так что

$$(A_1^{(2)})^{-1}\hat{u}_1 = \hat{v}_1 = \hat{v}_2 = (A_1^{(1)})^{-1}\hat{u}_2.$$

Тем самым достаточность (2.10) установлена.

Докажем обратное. Пусть матрица A неприводима и пусть (2.8) является равенством, т.е.

$$\hat{v}_1 = (A_1^{(2)})^{-1}\hat{u}_1. \tag{2.13}$$

Ввиду соотношений (2.11) и (2.13), мы имеем

$$A_1^{(2)}\hat{v}_1 = \hat{A}_1 v,$$

что равносильно равенству

$$(v_2 - v_1)\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = 0. \tag{2.14}$$

Поскольку A является неприводимой M-матрицей, вектор $[a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1}]^T$ имеет отрицательную компоненту, и, следовательно, из (2.14) вытекает (2.10).

Тот случай, когда (2.9) является равенством, рассматривается аналогично.

Для доказательства последнего утверждения леммы предположим, что равенство (2.10) не имеет места, т.е. $v_2 > v_1$. Как уже было показано, в этом случае (2.8) не является равенством, т.е. для некоторого $k \geqslant 1$ мы имеем

$$v_{k+1} = (\hat{v}_1)_k < \left((A_1^{(2)})^{-1}\hat{u}_1\right)_k. \tag{2.15}$$

Обозначим

$$z = (A_1^{(2)})^{-1}\hat{u}_1 = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

и положим

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z \end{bmatrix}.$$

Как и в (2.11), мы выводим

$$\hat{u}_1 = A_1^{(2)} z = \hat{A}_1 \tilde{z} = \widehat{(A\tilde{z})}_1,$$

откуда следует, что

$$A\tilde{z} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \hat{u}_1 \end{bmatrix} = u + (\alpha - u_1)e_1.$$

Умножая это соотношение слева на A^{-1}, мы получаем

$$\tilde{z} = v + (\alpha - u_1)A^{-1}e_1. \tag{2.16}$$

Поскольку A – неприводимая M-матрица, обратная к ней положительна (см., напр., [4, глава 6, теорема 2.7]), и если $\alpha \leqslant u_1$, то, в силу (2.16),

$$z_k \leqslant v_k \quad \text{для всех} \quad k \geqslant 2,$$

что противоречит неравенству (2.15). Следовательно, $\alpha > u_1$, и справедливо строгое неравенство

$$\hat{v}_1 < \widehat{(\tilde{z})}_1 = z = (A_1^{(2)})^{-1}\hat{u}_1.$$

Тот факт, что неравенство (2.9) является строгим, устанавливается аналогично. □

Из леммы 2.1 легко выводится следующий результат, в котором значение j, определенное в (2.3), не используется.

Следствие 2.1. *В условиях леммы* 2.1

$$P(A^{-1}u) \leqslant \max_{k=i,i+1} \left\{ \left(A^{(1,\ldots,i-1,k,i+2,\ldots,m)} \right)^{-1} \hat{u}_{2i+1-k} \right\} \tag{2.17}$$

и

$$Q(A^{-1}u) \geqslant \min_{k=i,i+1} \left\{ \left(A^{(1,\ldots,i-1,k,i+2,\ldots,m)} \right)^{-1} \hat{u}_{2i+1-k} \right\}. \tag{2.18}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то каждое из этих соотношений является равенством тогда и только тогда, когда $P(A^{-1}u) = Q(A^{-1}u)$; в противном случае оба неравенства строгие.

Докажем следующее обобщение леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, является PM-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества и пусть $u = (u_i) \in \mathbb{R}^m$ – неотрицательный вектор. Предположим, что*

$$P(A^{-1}u) = [(A^{-1}u)_{i_1}, \dots, (A^{-1}u)_{i_n}]^T,$$
$$Q(A^{-1}u) = [(A^{-1}u)_{j_1}, \dots, (A^{-1}u)_{j_n}]^T.$$

Тогда

$$P(A^{-1}u) \leqslant \left(A^{(i_1,\dots,i_n)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

и

$$Q(A^{-1}u) \geqslant \left(A^{(j_1,\dots j_n)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{j_1} \\ \vdots \\ u_{j_n} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба соотношения (2.19) и (2.20) являются равенствами тогда и только тогда, когда $P(A^{-1}u) = Q(A^{-1}u)$, т.е. вектор $A^{-1}u$ имеет одинаковые элементы в каждой из блочных компонент; в противном случае оба неравенства (2.19) и (2.20) строгие.

Доказательство. Предположим, не теряя общности, что все множества M_i, $i = 1, \dots, n$, состоят из последовательных чисел, т.е.

$$M_i = \left\{ \sum_{k\leqslant i-1} m_k + 1, \dots, \sum_{k\leqslant i} m_k \right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $m_0 = 0$ и $m_i = |M_i| \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$.

Если $m_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$, то доказывать нечего. Поэтому предположим, что $m_1 > 1$ (в противном случае мы симметрично переставляем блочные строки и столбцы матрицы A), и рассмотрим следующую последовательность разбиений множества $M_1 = \{1, \dots, m_1\}$ на $m_1, \dots, 1$ непересекающихся непустых подмножеств:

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^{m_1}\{i\}; \quad M_1 = \{1,2\}\cup\bigcup_{i=3}^{m_1}\{i\}; \quad \dots \quad M_1 = \{1, 2, \dots, m_1\}. \tag{2.21}$$

Каждое из этих разбиений получается путем объединения первых двух подмножеств в предшествующем множестве и является более грубым, чем все предшествующие разбиения. В соответствии с (1.7), каждая из агрегированных матриц, ассоциированных с фиксированным разбиением множества M_1 в (2.21) (за исключением первого), получается из агрегированной матрицы, ассоциированной с предшествующим разбиением, посредством агрегирования первых двух столбцов. Следовательно, с помощью леммы 2.1 и индукции, для самого грубого разбиения множества $M_1 = \{1, 2, \ldots, m_1\}$ мы получаем

$$\left(A^{(j_1, m_1+1, \ldots, m)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{m_1+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} (A^{-1}u)_{j_1} \\ (A^{-1}u)_{m_1+1} \\ \vdots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix}$$
$$\leqslant \begin{bmatrix} (A^{-1}u)_{i_1} \\ (A^{-1}u)_{m_1+1} \\ \vdots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix} \leqslant \left(A^{(i_1, m_1+1, \ldots, m)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ u_{m_1+1} \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Теперь неравенства (2.19) и (2.20) легко доказываются индукцией по числу n подмножеств в исходном разбиении множества индексов.

Рассмотрим случаи равенств. Заметим сперва, что если $P(A^{-1}u) = Q(A^{-1}u)$, то, очевидно, для произвольного набора индексов $k_1, \ldots, k_n$, где $k_j \in M_j$, $j = 1, \ldots, n$, мы имеем

$$A^{(k_1, \ldots, k_n)} P(A^{-1}u) = (A \cdot A^{-1}u)[k_1, \ldots, k_n] = u[k_1, \ldots, k_n] = \begin{bmatrix} u_{k_1} \\ \vdots \\ u_{k_n} \end{bmatrix},$$

откуда следует, что

$$P(A^{-1}u) = Q(A^{-1}u) = \left(A^{(k_1, \ldots, k_n)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{k_1} \\ \vdots \\ u_{k_n} \end{bmatrix}.$$

Тем самым показано, что если $P(A^{-1}u) = Q(A^{-1}u)$, то оба соотношения (2.19) и (2.20) являются равенствами.

Наконец, пусть матрица A неприводима и пусть

$$P(A^{-1}u) \neq Q(A^{-1}u).$$

Тогда для некоторого $k \in \langle n \rangle$ мы имеем $m_k > 1$ и

$$(A^{-1}u)_{i_k} = \max_{i \in M_k} \left\{ \left(A^{-1}u\right)_i \right\} > \min_{i \in M_k} \left\{ \left(A^{-1}u\right)_i \right\} = \left(A^{-1}u\right)_{j_k}.$$

Предполагая (что не ведет к потере общности), что

$$i_k = \sum_{i=1}^{k-1} m_i + 1, \quad j_k = i_k + 1$$

и применяя лемму 2.1, мы получаем

$$\left(A^{(1,\ldots,i_k-1,j_k,\ldots,m)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_{i_k-1} \\ u_{j_k} \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} (A^{-1}u)_1 \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_{i_k-1} \\ (A^{-1}u)_{j_k} \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix}$$

$$\leqslant \begin{bmatrix} (A^{-1}u)_1 \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_{i_k} \\ (A^{-1}u)_{i_k+2} \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix} < \left(A^{(1,\ldots,i_k,i_k+2,\ldots,m)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_{i_k} \\ u_{i_k+2} \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Поскольку матрицы $A^{(i_1,\ldots,i_n)}$ и $A^{(j_1,\ldots,j_n)}$ получаются в результате агрегирования столбцов матриц, стоящих в правой и левой частях (2.22), то применяя (2.19) и (2.20) к этим матрицам, мы получаем

$$\left(A^{(j_1,\ldots,j_n)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{j_1} \\ \vdots \\ u_{j_n} \end{bmatrix} \leqslant Q \left(\left(A^{(1,\ldots,i_k-1,j_k,\ldots,m)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_{i_k-1} \\ u_{j_k} \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix} \right)$$

$$< Q \left(\begin{bmatrix} (A^{-1}u)_1 \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_{i_k-1} \\ (A^{-1}u)_{j_k} \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix} \right) = Q(A^{-1}u) \leqslant P(A^{-1}u) = P \left(\begin{bmatrix} (A^{-1}u)_1 \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_{i_k} \\ (A^{-1}u)_{i_k+2} \\ \cdots \\ (A^{-1}u)_m \end{bmatrix} \right)$$

$$< P\left(\left(A^{(1,\dots,i_k,i_k+2,\dots,m)}\right)^{-1}\begin{bmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_{i_k} \\ u_{i_k+2} \\ \cdots \\ u_m \end{bmatrix}\right) \leqslant \left(A^{(i_1,\dots i_n)}\right)^{-1}\begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix}.$$

Лемма 2.2 доказана полностью. □

Следствие 2.2. *В условиях леммы* 2.2 *справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}\min_{i_1,\dots i_n}\left\{\left(A^{(i_1,\dots,i_n)}\right)^{-1}\begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix}\right\} \leqslant Q(A^{-1}u) \\ \leqslant P(A^{-1}u) \leqslant \max_{i_1,\dots i_n}\left\{\left(A^{(i_1,\dots i_n)}\right)^{-1}\begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix}\right\},\end{gathered} \tag{2.23}$$

где минимум и максимум берутся по всем $i_j \in M_j$, $j = 1, \dots, n$.

Кроме того, если матрица A *неприводима, то либо все соотношения в* (2.23) *являются равенствами, либо* $P(A^{-1}u) \neq Q(A^{-1}u)$, *а правое и левое неравенства в* (2.23) *строгие.*

Доказательство. Неравенства (2.23) тривиально следуют из (2.19) и (2.20).

Докажем второе утверждение, предполагая, что матрица A неприводима. Если $P(A^{-1}u) = Q(A^{-1}u)$, то, как было установлено при доказательстве леммы 2.2, все соотношения в (2.23) являются равенствами.

Если же $P(A^{-1}u) \neq Q(A^{-1}u)$, то, по лемме 2.2, как (2.19) так и (2.20) – строгие неравенства, так что левое и правое неравенства в (2.23) тем более являются строгими, что и завершает доказательство. □

Первым основным результатом работы является следующая теорема, которая дает двусторонние оценки для строчных сумм в k-м блочном столбце матрицы, обратной к PM-матрице, в терминах k-х столбцов обратных к соответствующим агрегированным матрицам.

Теорема 2.1. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, *является* PM*-матрицей относительно некоторого разбиения* $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, *множе-*

ства индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Предположим, что $k \in \langle n \rangle$ *и что*

$$P(A^{-1})e_k^{(n)} = \left[\sum_{s\in M_k} a'_{i_1 s}, \ldots, \sum_{s\in M_k} a'_{i_n s}\right]^T,$$
$$Q(A^{-1})e_k^{(n)} = \left[\sum_{s\in M_k} a'_{j_1 s}, \ldots, \sum_{s\in M_k} a'_{j_n s}\right]^T. \tag{2.24}$$

Тогда

$$\left(A^{(j_1,\ldots,j_n)}\right)^{-1} e_k^{(n)} \leqslant Q(A^{-1})e_k^{(n)} \leqslant P(A^{-1})e_k^{(n)} \leqslant \left(A^{(i_1,\ldots,i_n)}\right)^{-1} e_k^{(n)}. \tag{2.25}$$

Кроме того, если матрица A *неприводима, то либо все соотношения в* (2.25) *являются равенствами, либо* $Q(A^{-1})e_k^{(n)} \neq P(A^{-1})e_k^{(n)}$, *а правое и левое неравенства в* (2.25) *строгие.*

Доказательство. Применим лемму 2.2 с вектором

$$u = \sum_{r\in M_k} e_r^{(m)} \tag{2.26}$$

и заметим, что

$$P(A^{-1}u) = P(A^{-1})e_k^{(n)}, \quad Q(A^{-1}u) = Q(A^{-1})e_k^{(n)},$$
$$[u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}]^T = [u_{j_1}, \ldots, u_{j_n}]^T = e_k^{(n)}.$$

□

Подставляя вектор (2.26) в следствие 2.2, мы немедленно приходим к следующему результату.

Следствие 2.3. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, *является* PM*-матрицей относительно некоторого разбиения* $\langle m \rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, *множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда для любого* $k \in \langle n \rangle$ *справедливы неравенства*

$$\min_{i_1,\ldots,i_n} \{(A^{(i_1,\ldots,i_n)})^{-1}e_k^{(n)}\} \leqslant Q(A^{-1})e_k^{(n)} \leqslant P(A^{-1})e_k^{(n)} \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_n} \{(A^{(i_1,\ldots,i_n)})^{-1}e_k^{(n)}\}, \tag{2.27}$$

где минимум и максимум берутся по всем $i_j \in M_j,\ j = 1, \ldots, n$.

Кроме того, если матрица A *неприводима, то для любого фиксированного* k *либо все соотношения в* (2.27) *являются равенствами, либо* $Q(A^{-1})e_k^{(n)} \neq P(A^{-1})e_k^{(n)}$, *а правое и левое неравенства в* (2.27) *строгие.*

Заметим, что в том случае, когда $m_k = |M_k| = 1$, теорема 2.1 и следствие 2.3 дают двусторонние оценки для блочных компонент k-го столбца обратной матрицы A^{-1}.

В заключение данного параграфа отметим, что если в следствии 2.2 мы положим $u = e^{(m)}$, то

$$(A^{-1}u)_i = \sum_{j \in \langle m \rangle} a'_{ij}, \quad i \in \langle m \rangle.$$

В этом случае неравенства (2.23) принимают вид

$$\begin{gathered}\min_{i_1, \ldots i_n} \left\{ \left(A^{(i_1, \ldots, i_n)} \right)^{-1} e^{(n)} \right\} \leqslant Q(A^{-1} e^{(m)}) \\ \leqslant P(A^{-1} e^{(m)}) \leqslant \max_{i_1, \ldots i_n} \left\{ \left(A^{(i_1, \ldots i_n)} \right)^{-1} e^{(n)} \right\},\end{gathered} \tag{2.28}$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered}\min_{i_1, \ldots, i_n} \left\| \left(A^{(i_1, \ldots, i_n)} \right)^{-1} \right\|_\infty \leqslant \left\| Q\left(A^{-1} e^{(m)} \right) \right\|_\infty \\ \leqslant \left\| P\left(A^{-1} e^{(m)} \right) \right\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{i_1, \ldots, i_n} \left\| \left(A^{(i_1, \ldots, i_n)} \right)^{-1} \right\|_\infty.\end{gathered} \tag{2.29}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то, по следствию 2.2, либо все четыре вектора в (2.28) совпадают, так что (2.29) является цепочкой равенств, либо крайние неравенства в (2.28) строгие, откуда следует, что

$$\min_{i_1, \ldots, i_n} \left\| \left(A^{(i_1, \ldots, i_n)} \right)^{-1} \right\|_\infty < \|A^{-1}\|_\infty < \max_{i_1, \ldots, i_n} \left\| \left(A^{(i_1, \ldots, i_n)} \right)^{-1} \right\|_\infty.$$

Тем самым мы показали, что теорема 2.1 из работы [7] является почти очевидным следствием леммы 2.2.

§3. Верхние оценки для бесконечных норм блоков матрицы, обратной к PH-матрице

Первый результат этого параграфа обобщает верхнюю оценку леммы 2.2 на случай PH-матрицы.

Лемма 3.1. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, является PH-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества и пусть $u = (u_i) \in \mathbb{R}^m$ – неотрицательный вектор. Если*

$$P\left(\mathcal{M}(A)^{-1}u\right) = \left[(\mathcal{M}(A)^{-1}u)_{i_1}, \ldots, (\mathcal{M}(A)^{-1}u)_{i_n}\right]^T, \tag{3.1}$$

то

$$P(|A^{-1}|u) \leqslant \left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Доказательство. По теореме 1.2, A является H-матрицей. Следовательно, по теореме 1.1,

$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A)^{-1},$$

откуда следует, что

$$|A^{-1}|u \leqslant \mathcal{M}(A)^{-1}u,$$
$$P\left(|A^{-1}|u\right) \leqslant P\left(\mathcal{M}(A)^{-1}u\right).$$

Остается лишь заметить, что, по лемме 2.2, для PM-матрицы $\mathcal{M}(A)$ мы имеем

$$P\left(\mathcal{M}(A)^{-1}u\right) \leqslant \left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix}.$$

□

Следующий результат, который непосредственно вытекает из леммы 3.1, является аналогом верхней оценки из следствия 2.2.

Следствие 3.1. *В условиях леммы* 3.1,

$$P(|A^{-1}|u) \leqslant \max_{i_1,\dots,i_n} \left\{ \left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} u_{i_1} \\ \vdots \\ u_{i_n} \end{bmatrix} \right\}, \tag{3.3}$$

где максимум берется по всем $i_j \in M_j$, $j = 1\dots,n$.

Верхние оценки для бесконечных норм блоков матрицы, обратной к PH-матрице, приведены в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, *является* PH*-матрицей относительно некоторого разбиения* $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, *множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Если* $k \in \langle n\rangle$ *и*

$$P\left(\mathcal{M}(A)^{-1}\right) e_k^{(n)} = \left[\sum_{s\in M_k} b_{i_1 s}, \dots, \sum_{s\in M_k} b_{i_n s}\right]^T,$$

где мы обозначаем $\mathcal{M}(A)^{-1} = (b_{ij})$, *то*

$$P(|A^{-1}|)e_k^{(n)} \leqslant \left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}\right)^{-1} e_k^{(n)}. \tag{3.4}$$

Доказательство. В лемме 3.1 положим

$$u = \sum_{r\in M_k} e_r^{(m)}$$

и заметим, что

$$P\left(\left|A^{-1}\right| u\right) = P\left(\left|A^{-1}\right|\right) e_k^{(n)}$$

и

$$[u_{i_1},\dots,u_{i_n}]^T = e_k^{(n)}.$$

□

Следствие 3.2. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, *является* PH*-матрицей относительно некоторого разбиения* $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, *множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда для каждого* $k \in \langle n\rangle$ *справедливо неравенство*

$$P(|A^{-1}|)e_k^{(n)} \leqslant \max_{i_1,\dots,i_n} \left\{ \left[\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}\right]^{-1} e_k^{(n)} \right\}, \tag{3.5}$$

где максимум берется по всем $i_j \in M_j$, $j = 1\dots,n$.

§4. Оценки для спектральных радиусов матриц, обратных к PM- и PH-матрицам

В этом параграфе мы выводим двусторонние оценки для перроновского корня (неотрицательной) обратной к PM-матрице и верхнюю оценку для спектрального радиуса обратной к PH-матрице. Также мы приводим двойственные оценки для наименьших по модулю собственных значений PM- и PH-матриц и устанавливаем монотонность полученных оценок относительно разбиения индексного множества.

Теорема 4.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $m \geqslant 1$, является PM-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества и пусть $u = (u_i)$ – правый перроновский вектор обратной матрицы A^{-1}. Тогда для перроновского корня $\rho(A^{-1})$ матрицы A^{-1} справедлива верхняя оценка*

$$\rho(A^{-1}) \leqslant \rho\Big(\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}\Big), \tag{4.1}$$

где

$$[u_{i_1},\dots,u_{i_n}]^T = P(u),$$

и если вектор u положителен, то справедлива также и нижняя оценка

$$\rho(A^{-1}) \geqslant \rho\Big(\big[A^{(j_1,\dots,j_n)}\big]^{-1}\Big), \tag{4.2}$$

где

$$[u_{j_1},\dots,u_{j_n}]^T = Q(u).$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба соотношения (4.1) и (4.2) являются равенствами тогда и только тогда, когда $P(u) = Q(u)$; в противном случае оба неравенства (4.1) и (4.2) строгие.

Доказательство. Поскольку

$$A^{-1}u = \rho(A^{-1})u,$$

то, по лемме 2.2, мы имеем

$$\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}P(u) \geqslant \rho(A^{-1})P(u) \tag{4.3}$$

и

$$\big[A^{(j_1,\dots,j_n)}\big]^{-1}Q(u) \leqslant \rho(A^{-1})Q(u). \tag{4.4}$$

Как хорошо известно (см., напр., [4, глава 2, теорема 1.11]), поскольку вектор $P(u)$ неотрицательный и ненулевой, то из неравенства (4.3) следует, что
$$\rho\Big(\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}\Big) \geqslant \rho(A^{-1}).$$
Тем самым неравенство (4.1) доказано.

Что касается неравенства (4.2), то сперва мы заметим, что, вообще говоря, (4.2) не следует из (4.4); более того, вектор $Q(u)$ даже может оказаться нулевым. Однако, если перроновский вектор u положителен, то вектор $Q(u)$ также положителен, и из (4.4) следует (4.2) (см., напр., [4, глава 2, теорема 1.11]).

Наконец, пусть матрица A неприводима, так что векторы u, $P(u)$ и $Q(u)$ положительны.

Если $P(u) = Q(u)$, то, по лемме 2.2, мы имеем
$$\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1} P(u) = \rho(A^{-1}) P(u),$$
$$\big[A^{(j_1,\dots,j_n)}\big]^{-1} Q(u) = \rho(A^{-1}) Q(u).$$
Умножая эти соотношения слева на некоторые левые перроновские векторы v^T и w^T матриц $[A^{(i_1,\dots,i_n)}]^{-1}$ и $[A^{(j_1,\dots,j_n)}]^{-1}$ соответственно и учитывая, что $v^t P(u) > 0$ и $w^T Q(u) > 0$, мы приходим к равенствам
$$\rho(A^{-1}) = \rho\Big(\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}\Big) = \rho\Big(\big[A^{(j_1,\dots,j_n)}\big]^{-1}\Big).$$

Если $P(u) \neq Q(u)$, то, опять же по лемме 2.2, соотношения (4.3) и (4.4) являются строгими неравенствами. Применяя те же рассуждения, что и выше, мы получаем
$$\rho\left(\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}\right) > \rho(A^{-1}) > \rho\left(\big[A^{(j_1,\dots,j_n)}\big]^{-1}\right),$$
что и завершает доказательство теоремы 4.1. □

Следствие 4.1. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ является PM-матрицей относительно разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда для перроновского корня $\rho(A^{-1})$ матрицы A^{-1} справедливы двусторонние оценки*
$$\begin{aligned}\min_{i_1,\dots,i_n} \left\{\rho\left(\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}\right)\right\} &\leqslant \rho(A^{-1}) \\ &\leqslant \max_{i_1,\dots,i_n} \left\{\rho\left(\big[A^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба соотношения в (4.5) являются равенствами тогда и только тогда, когда перроновский вектор u матрицы A^{-1} удовлетворяет условию $P(u) = Q(u)$; в противном случае оба неравенства в (4.5) строгие.

Доказательство. Верхняя оценка в (4.5) немедленно следует из теоремы 4.1.

Рассмотрим нижнюю оценку в (4.5). Если матрица A неприводима, то эта оценка непосредственно вытекает из (4.2). Если же матрица A приводима, то рассмотрим близкую матрицу A_ε, которая получается заменой нулевых элементов A на $-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Заметим, что при достаточно малом ε матрица A_ε является PM-матрицей, так же как и A. Пусть u_ε – правый перроновский вектор положительной матрицы A_ε^{-1}. Этот вектор положителен и является единственным с точностью до положительного множителя.

Как уже было показано, для некоторых $j'_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$, мы имеем

$$\rho\left(\left[A_\varepsilon^{(j'_1,\ldots,j'_n)}\right]^{-1}\right) \leqslant \rho(A_\varepsilon^{-1}).$$

Но тогда, по непрерывности, мы также имеем

$$\rho\left(\left[A^{(j'_1,\ldots,j'_n)}\right]^{-1}\right) \leqslant \rho(A^{-1}),$$

откуда и следует нижняя оценка из (4.5).

Наконец, пусть A неприводима. Если $P(u) = Q(u)$, то, по следствию 2.2, для произвольных $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$, справедливо равенство

$$\left[A^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^{-1} P(u) = \rho(A^{-1}) P(u),$$

так что

$$\rho\left(\left[A^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^{-1}\right) = \rho(A^{-1}).$$

Значит, если $P(u) = Q(u)$, то оба соотношения в (4.5) являются равенствами.

Если же $P(u) \neq Q(u)$, то, по теореме 4.1, оба неравенства (4.1) и (4.2) строгие, а значит оба неравенства в (4.5) тем более являются строгими. $\square$

Из следствия 4.1 легко легко выводятся следующие двусторонние оценки для наименьшего по модулю собственного значения PM-матрицы, которое есть величина, обратная к перроновскому корню обратной матрицы.

Следствие 4.2. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ является PM-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда*

$$\min_{i_1,\ldots,i_n} \left\{\lambda_n\left(A^{(i_1,\ldots,i_n)}\right)\right\} \leqslant \lambda_m(A) \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_n} \left\{\lambda_n\left(A^{(i_1,\ldots,i_n)}\right)\right\}. \qquad (4.6)$$

Кроме того, если матрица A неприводима, то оба соотношения в (4.6) являются равенствами тогда и только тогда, когда правый собственный вектор u матрицы A, ассоциированный с собственным значением $\lambda_m(A)$, удовлетворяет условию $P(u) = Q(u)$; в противном случае оба неравенства в (4.6) строгие.

В следствии 4.2 и ниже мы предполагаем, что собственные значения матрицы $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ занумерованы в порядке невозрастания их модулей, т.е.

$$|\lambda_k(B)| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_1(B)|.$$

Замечание 4.1. Стоит отметить, что, в действительности, оба утверждения следствия 4.2 справедливы не только для PM-матрицы и соответствующего разбиения множества индексов, но и для произвольной невырожденной M-матрицы A и произвольного разбиения индексного множества. Действительно, представим A в виде

$$A = \alpha I_m - B,$$

где $B \geqslant 0$ и $\rho(B) < \alpha$. Тогда

$$\lambda_m(A) = \alpha - \rho(B),$$

$$\lambda_n\left(A^{(i_1,\ldots,i_n)}\right) = \alpha - \rho\left(B^{(i_1,\ldots,i_n)}\right),$$

и оба утверждения следствия 4.2 немедленно вытекают из теоремы 2.1 работы [2], устанавливающей двусторонние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы в терминах перроновских корней агрегированных матриц. Подчеркнем, однако, что в условиях следствия 4.2 нижняя оценка в (4.6) заведомо нетривиальна (поскольку все агрегированные матрицы $A^{(i_1,\ldots,i_n)}$ являются невырожденными M-матрицами), что в общем случае невырожденной M-матрицы, вообще говоря, неверно.

Замечание 4.2. Непосредственное применение теоремы 2.1 из [2] к матрице, обратной к невырожденной M-матрице A, приводит к оценкам

$$\min_{i_1,\dots,i_n}\left\{\rho\left((A^{-1})^{(i_1,\dots,i_n)}\right)\right\}\leqslant \rho(A^{-1})\leqslant \max_{i_1,\dots,i_n}\left\{\rho\left((A^{-1})^{(i_1,\dots,i_n)}\right)\right\},$$

представляющим гораздо меньший практический интерес, чем оценки (4.5).

Следующий результат обобщает верхнюю оценку следствия 4.1 на спектральный радиус PH-матрицы.

Следствие 4.3. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ является PH-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle=\bigcup_{i=1}^n M_i$, $1\leqslant n\leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда*

$$\rho(A^{-1})\leqslant \max_{i_1,\dots,i_n}\left\{\rho\Big(\big[\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}\big]^{-1}\Big)\right\}. \tag{4.7}$$

Доказательство. По лемме Виландта (см., напр., [1, с. 358]), теореме 1.1 и свойству монотонности перроновского корня (см., напр., [4, глава 2, следствие 1.5]), мы имеем

$$\rho(A^{-1})\leqslant\rho(|A^{-1}|)\leqslant\rho(\mathcal{M}(A)^{-1}),$$

и мы получаем нужный результат, применяя верхнюю оценку из (4.5) к PM-матрице $\mathcal{M}(A)$. □

Из следствия 4.3 немедленно вытекает следующая нетривиальная нижняя оценка для наименьшего по модулю собственного значения PH-матрицы.

Следствие 4.4. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ является PH-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle=\bigcup_{i=1}^n M_i$, $1\leqslant n\leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда*

$$|\lambda_m(A)|\geqslant \min_{i_1,\dots,i_n}\left\{\lambda_n\Big(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}\Big)\right\}. \tag{4.8}$$

Если A является Z-матрицей и имеет строгое диагональное преобладание, то, очевидно, для произвольного разбиения $\langle m\rangle=\bigcup_{i=1}^n M_i$,

$1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов все ассоциированные агрегированные матрицы $A^{(i_1,\ldots,i_n)}$, $i_j \in M_j$, $j = 1,\ldots n$, также являются Z-матрицами и имеют строгое диагональное преобладание. Следовательно, все они являются невырожденными M-матрицами, так что A является PM-матрицей относительно произвольного разбиения индексного множества. В частности, A является PM-матрицей относительно наиболее грубого разбиения $\langle m\rangle = M_1$. Агрегированные матрицы, соответствующие этому разбиению, – это положительные числа

$$A^{(i)} = (Ae)_i = |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1,\ldots,m,$$

характеризующие диагональное преобладание в A, а оценки из следствий 4.1 и 4.2 принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ \Big(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\Big)^{-1} \right\} &\leqslant \rho(A^{-1}) \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ \Big(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\Big)^{-1} \right\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

и

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\} \leqslant \lambda_m(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\}. \tag{4.10}$$

Заметим, что оценки (4.9) также можно получить, применяя двусторонние оценки Фробениуса для перроновского корня (см., напр., [8, III.3.1.1]) к неотрицательной матрице $D^{-1}A^{-1}D$, где $D = \operatorname{diag}(|a_{11}| - \sum_{j\neq 1} |a_{1j}|, \ldots, |a_{nn}| - \sum_{j\neq n} |a_{nj}|)$.

В противоположном крайнем случае, когда $n = m$, оценки (4.5) и (4.6), очевидно, являются точными (и тривиальными).

Итак, для M-матрицы, имеющей строгое диагональное преобладание, оценки (4.5) и (4.6) становятся более точными при переходе от наиболее грубого разбиения к самому мелкому. В действительности, имеет место следующее более общее свойство монотонности.

Теорема 4.2. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ является PM-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда она является PM-матрицей и относительно любого разбиения*

$\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n'} M_i'$, *более мелкого, чем исходное, причем верны следующие соотношения:*

$$\min_{i_1,\dots,i_n}\left\{\lambda_n\left(A^{(i_1,\dots,i_n)}\right)\right\}\leqslant \min_{i_1',\dots,i_{n'}'}\left\{\lambda_{n'}\left(A^{(i_1',\dots,i_{n'}')}\right)\right\}\leqslant \lambda_m(A)$$

$$\leqslant \max_{i_1',\dots,i_{n'}'}\left\{\lambda_{n'}\left(A^{(i_1',\dots,i_{n'}')}\right)\right\}\leqslant \max_{i_1,\dots,i_n}\left\{\lambda_n\left(A^{(i_1,\dots,i_n)}\right)\right\}; \tag{4.11}$$

$$\min_{i_1,\dots,i_n}\left\{\rho\left([A^{(i_1,\dots,i_n)}]^{-1}\right)\right\}\leqslant \min_{i_1',\dots,i_{n'}'}\left\{\rho\left(\left[A^{(i_1',\dots,i_{n'}')}\right]^{-1}\right)\right\}\leqslant \rho(A^{-1})$$

$$\leqslant \max_{i_1',\dots,i_{n'}'}\left\{\rho\left(\left[A^{(i_1',\dots,i_{n'}')}\right]^{-1}\right)\right\}\leqslant \max_{i_1,\dots,i_n}\left\{\rho\left(\left[A^{(i_1,\dots,i_n)}\right]^{-1}\right)\right\}. \tag{4.12}$$

Здесь максимумы и минимумы берутся по всем $i_k \in M_k$, $k = 1,\dots,n$, *и по всем* $i_k' \in M_k'$, $k = 1,\dots,n'$.

Доказательство. Тот факт, что A является PM-матрицей, был установлен в работе [7]. Неравенства (4.11), очевидно, эквивалентны (4.12), а промежуточные неравенства в (4.12) следуют из следствия 4.1. Поэтому нам остается лишь доказать крайние справа и слева неравенства в (4.12). Для этого мы заметим, что поскольку разбиение $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n'} M_i'$ мельче, чем исходное разбиение $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, то набор матриц $\{A^{(i_1,\dots,i_n)},\ i_j \in M_j,\ j = 1,\dots,n\}$ совпадает с объединением наборов агрегированных матриц, ассоциированных с матрицами $A^{(i_1',\dots,i_{n'}')}$ по всем $i_j' \in M_j'$, $j = 1\dots,n'$, откуда и следуют крайние справа и слева неравенства в (4.12). □

Свойство монотонности для PH-матриц, представленное ниже, легко следует из теоремы 4.2 и следствий 4.3 и 4.4.

Следствие 4.5. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *является* PH*-матрицей относительно некоторого разбиения* $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, *множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда она является* PH*-матрицей и относительно любого разбиения* $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n'} M_i'$, *более мелкого, чем исходное, причем верны следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}|\lambda_m(A)| &\geqslant \min_{i_1',\dots,i_{n'}'}\left\{\lambda_{n'}\left(\mathcal{M}(A)^{(i_1',\dots,i_{n'}')}\right)\right\}\\ &\geqslant \min_{i_1,\dots,i_n}\left\{\lambda_n\left(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}\right)\right\},\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\rho(A^{-1}) &\leqslant \max_{i'_1,\dots,i'_{n'}} \left\{\rho\left([\mathcal{M}(A)^{(i'_1,\dots,i'_{n'})}]^{-1}\right)\right\} \\ &\leqslant \max_{i_1,\dots,i_n} \left\{\rho\left([\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_n)}]^{-1}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь максимумы и минимумы берутся по всем $i_k \in M_k$, $k = 1,\dots,n$, и по всем $i'_k \in M'_k$, $k = 1,\dots,n'$.

§5. Оценки обратных к квази-PM- и квази-PH-матрицам

Пусть $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – блочная $n \times n$ матрица, $1 \leqslant n \leqslant m$. Из общего результата, установленного в работе [10], в частном случае бесконечной нормы следует, что если блочно диагональная часть матрицы A,

$$D_A = \mathrm{Diag}\,(A_{11},\dots,A_{nn}),$$

невырождена, а $n \times n$ матрица

$$N(A) = \mathrm{diag}\,\left(\|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1},\dots,\|A_{nn}^{-1}\|_\infty^{-1}\right)\ R(A), \tag{5.1}$$

где

$$R(A) = (r_{ij}), \quad r_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|_\infty, & i \neq j, \end{cases} \tag{5.2}$$

является невырожденной M-матрицей, то и A невырождена, а для ее обратной справедлива верхняя оценка

$$P(|A^{-1}|) \leqslant N(A)^{-1}. \tag{5.3}$$

В этом параграфе мы устанавливаем более общее достаточное условие невырожденности, справедливое для более широкого класса матриц, из которого следует вышеупомянутый результат Робера. Также мы получаем новые оценки для обратных к так называемым квази-PM- и квази-PH-матрицам, улучшая, в частности, верхнюю оценку Робера (5.3).

Введем следующие определения. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и пусть $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, – некоторое разбиение множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Представим A в блочном виде $A = (A_{ij})$, где $A_{ij} = A[M_i, M_j]$, $i, j = 1,\dots,n$. Будем говорить, что A является *квази-PM-матрицей* относительно рассматриваемого разбиения, если D_A невырождена и монотонна, а блочно диагонально масштабированная по Якоби матрица $D_A^{-1}A$ является

PM-матрицей относительно того же разбиения. Также мы будем говорить, что A является *квази-PH-матрицей* относительно рассматриваемого разбиения, если D_A невырождена, а матрица $D_A^{-1}A$ является PH-матрицей относительно этого разбиения.

Теорема 5.1. *Если матрица A является квази-PM-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов, то A невырождена и монотонна.*

Доказательство. Действительно, квази-PM-матрица $A = D_A \cdot (D_A^{-1}A)$ является невырожденной и монотонной, поскольку D_A невырождена и монотонна по определению, а $D_A^{-1}A$ невырождена и монотонна, поскольку PM-матрица $D_A^{-1}A$ является невырожденной M-матрицей по следствию 1.1. □

Теорема 5.2. *Пусть A является квази-PH-матрицей относительно некоторого разбиения множества индексов. Тогда матрица A невырождена.*

Доказательство. Поскольку $D_A^{-1}A$ есть PH-матрица, то она является H-матрицей по теореме 1.2, откуда следует, что матрица $A = D_A \cdot (D_A^{-1}A)$ невырождена. □

Заметим, что квази-PM-матрица, очевидно, является квази-PH-матрицей относительно того же самого разбиения.

Теперь мы покажем, что класс матриц, удовлетворяющих условию невырожденности Робера, является подклассом класса квази-PH-матриц. Действительно, по определению, если D_A невырождена, то A является квази-PH-матрицей в том и только том случае, когда все агрегированные матрицы

$$\left[\mathcal{M}(D_A^{-1}A)\right]^{(i_1,\dots,i_n)} = \begin{bmatrix} 1 & -(|A_{11}^{-1}A_{12}|e)_{i_1} & \dots & -(|A_{11}^{-1}A_{1n}|e)_{i_1} \\ -(|A_{22}^{-1}A_{21}|e)_{i_2} & 1 & \dots & -(|A_{22}^{-1}A_{2n}|e)_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(|A_{nn}^{-1}A_{n1}|e)_{i_n} & -(|A_{nn}^{-1}A_{n2}|e)_{i_n} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad i_k \in M_k, \quad k = 1,\dots,n, \tag{5.4}$$

являются невырожденными M-матрицами. Поскольку, очевидно, для всех значений $k, j = 1,\dots,n$ мы имеем

$$(|A_{kk}^{-1}A_{kj}|e)_{i_k} \leqslant \|A_{kk}^{-1}A_{kj}\|_\infty \quad \text{для всех} \quad i_k \in M_k,$$

то для произвольных значений индексов $i_k \in M_k$, $k = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство

$$\left[\mathcal{M}(D_A^{-1}A)\right]^{(i_1,\ldots,i_n)} \geqslant R(A). \tag{5.5}$$

Следовательно, если $N(A)$ – невырожденная M-матрица, то и $R(A)$ – невырожденная M-матрица, так что и все матрицы (5.4) тем более являются невырожденными M-матрицами. Итак, любая матрица с невырожденной блочно диагональной частью, удовлетворяющая условию Робера, является квази-PH-матрицей, так что класс квази-PH-матриц содержит класс матриц A таких, что матрица $N(A)$ корректно определена и является невырожденной M-матрицей. Кроме того, как показывает следующий пример, это включение строгое. Действительно, пусть

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Относительно разбиения $\{1,2,3,4\} = \{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$ мы имеем

$$R(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & -2/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det R(A) = -1/3$, то $R(A)$ и $N(A)$ не являются M-матрицами. Однако соответствующие агрегированные матрицы (5.4), а именно, матрицы

$$A^{(1,3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A^{(2,3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

обе являются невырожденными M-матрицами (например потому, что все их главные миноры порядков 1, 2 и 3 положительны). Итак, класс матриц, удовлетворяющих условию Робера, является собственным подклассом класса квази-PH-матриц.

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 5.3. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ является квази-PM-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда*

$$\min_{i\in M_k}\left\{\left(A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\}\min_{i_1,\dots,i_n}\left\{\left[(D_A^{-1}A)^{(i_1,\dots,i_n)}\right]^{-1}e_k^{(n)}\right\} \leqslant Q(A^{-1})e_k^{(n)}$$
$$\leqslant P(A^{-1})e_k^{(n)} \leqslant \|A_{kk}^{-1}\|_\infty \max_{i_1,\dots,i_n}\left\{\left[(D_A^{-1}A)^{(i_1,\dots,i_n)}\right]^{-1}e_k^{(n)}\right\}, \qquad (5.6)$$
$$k = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Мы имеем

$$A^{-1} = (D_A^{-1}A)^{-1}D_A^{-1} = B^{-1}D_A^{-1}, \quad \text{где} \quad B = D_A^{-1}A,$$

откуда вытекает, что

$$P(A^{-1})e_k^{(n)} = P(B^{-1}D_A^{-1})e_k^{(n)} = \begin{bmatrix} \max_{i\in M_1}\left\{\left(B'_{1k}A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\} \\ \cdots \\ \max_{i\in M_n}\left\{\left(B'_{nk}A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\}\end{bmatrix}$$
$$\leqslant \max_{i\in M_k}\left\{\left(A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\}P(B^{-1})e_k^{(n)} = \|A_{kk}^{-1}\|_\infty\, P(B^{-1})e_k^{(n)}, \qquad (5.7)$$
$$k = 1,\dots,n.$$

Здесь и ниже мы используем обозначение $B^{-1} = (B'_{ij})$ и учитываем неотрицательность матриц A^{-1} и B^{-1}.

Аналогично, учитывая очевидные неравенства

$$\min_{i\in M_j}\left\{\left(B'_{jk}A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\}$$
$$\geqslant \min_{i\in M_k}\left\{\left(A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\}\ \min_{i\in M_j}\left\{\left(B'_{jk}e^{(m_k)}\right)_i\right\}, \quad j = 1,\dots,n,$$

мы выводим

$$Q(A^{-1})e_k^{(n)} = Q(B^{-1}D_A^{-1})e_k^{(n)} = \begin{bmatrix} \min_{i\in M_1}\left\{\left(B'_{1k}A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\} \\ \cdots \\ \min_{i\in M_n}\left\{\left(B'_{nk}A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\}\end{bmatrix} \qquad (5.8)$$
$$\geqslant \min_{i\in M_k}\left\{\left(A_{kk}^{-1}e^{(m_k)}\right)_i\right\}Q(B^{-1})e_k^{(n)}, \quad k = 1,\dots,n.$$

Поскольку $B = D_A^{-1}A$ является PM-матрицей, мы можем применить следствие 2.3, что дает нам

$$\min_{i_1,\ldots,i_n}\left\{\left[(D_A^{-1}A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^{-1} e_k^{(n)}\right\} \leqslant Q\left((D_A^{-1}A)^{-1}\right) e_k^{(n)}$$

$$\leqslant P\left((D_A^{-1}A)^{-1}\right) e_k^{(n)} \leqslant \max_{i_1,\ldots,i_n}\left\{\left[(D_A^{-1}A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^{-1} e_k^{(n)}\right\}, \qquad (5.9)$$
$$k = 1,\ldots,n,$$

и нужные неравенства (5.6) немедленно следуют из (5.7), (5.8) и (5.9). □

Верхняя оценка для столбцов обратной к квази-PH-матрице представлена в следующей теореме.

Теорема 5.4. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ является квази-PH-матрицей относительно некоторого разбиения $\langle m\rangle = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $1 \leqslant n \leqslant m$, множества индексов на непересекающиеся непустые подмножества. Тогда*

$$P(|A^{-1}|)e_k^{(n)} \leqslant \|A_{kk}^{-1}\|_\infty \max_{i_1,\ldots,i_n}\left\{\left[\mathcal{M}(D_A^{-1}A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^{-1} e_k^{(n)}\right\}, \quad k = 1,\ldots,n. \qquad (5.10)$$

Доказательство. Неравенство (5.10) устанавливается аналогично правому неравенству в (5.6). Мы имеем

$$P(|A^{-1}|)e_k^{(n)} \leqslant P(|B^{-1}|\cdot|D_A^{-1}|)e_k^{(n)} \leqslant \|A_{kk}^{-1}\|_\infty\, P(|B^{-1}|)e_k^{(n)}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Для завершения доказательства остается применить следствие 3.2 к PH-матрице $B = D_A^{-1}A$. □

Заметим, что если $R(A)$ – невырожденная M-матрица, то из (5.5) следует (см., напр., [6, теорема 2.5.4 (b)], что

$$\left[\mathcal{M}(D_A^{-1}A)^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^{-1} \leqslant R(A)^{-1}, \quad i_j \in M_j, \quad j = 1,\ldots,n, \qquad (5.11)$$

так что, в силу теоремы 5.4 и (5.11), мы имеем

$$P(|A^{-1}|)e_k^{(n)} \leqslant \|A_{kk}^{-1}\|_\infty R(A)^{-1}e_k^{(n)} = N(A)^{-1}e_k^{(n)}, \quad k = 1,\ldots,n,$$

т.е.

$$P(|A^{-1}|) \leqslant N(A)^{-1}.$$

Тем самым показано, что оценка Робера (5.3) вытекает из теоремы 5.4.

В заключение этого параграфа упомянем один близкий результат, являющийся частным случаем общей теоремы Фидлера и Птака [5]. Для блочной $n \times n$ матрицы $A = (A_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ определим $n \times n$ матрицу

$$\tilde{N}(A) = (n_{ij}), \quad n_{ij} = \begin{cases} \|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1}, & i = j, \\ -\|A_{ij}\|_\infty, & i \neq j. \end{cases} \tag{5.12}$$

В частном случае бесконечной нормы из результата работы [5] следует, что если $\tilde{N}(A)$ есть невырожденная M-матрица, то A невырождена, а ее обратная удовлетворяет верхней оценке

$$P(|A^{-1}|) \leqslant \tilde{N}(A)^{-1}. \tag{5.13}$$

Поскольку из неравенства

$$\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|_\infty \leqslant \|A_{ii}^{-1}\|_\infty \|A_{ij}\|_\infty$$

вытекает, что

$$\|A_{ij}\|_\infty \geqslant \|A_{ii}^{-1}\|_\infty^{-1} \|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|_\infty,$$

то мы приходим к заключению, что при $n \geqslant 2$ из того факта, что $\tilde{N}(A)$ – невырожденная M-матрица, следует, что и $N(A)$ – невырожденная M-матрица, так что оценка Фидлера–Птака (5.13) является следствием оценки Робера (5.3), а значит также и оценки (5.10).

§6. Пример

Рассмотрим 3×3 матрицу

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Эта матрица является неприводимой Z-матрицей и имеет строгое диагональное преобладание. Следовательно, она является PM-матрицей относительно разбиения $\{1, 2, 3\} = \{1, 2\} \cup \{3\}$. С этим разбиением ассоциированы две агрегированные матрицы:

$$A_1 = A^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = A^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Используя MATLAB, мы находим:

$$\lambda_2(A_1) = 2.4384, \quad \lambda_2(A_2) = 2.2679,$$

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.1250 \\ 0.1250 & 0.2500 \end{bmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3846 & 0.0769 \\ 0.1538 & 0.2308 \end{bmatrix},$$

$$\rho(A_1^{-1}) = 0.4101, \quad \rho(A_2^{-1}) = 0.4409,$$

$$\lambda_3(A) = 2.3726, \quad \rho(A^{-1}) = 0.4215,$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0.2526 & 0.0737 & 0.1158 \\ 0.1158 & 0.2421 & 0.0947 \\ \hline 0.0737 & 0.0632 & 0.2421 \end{array}\right],$$

$$P(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.3579 & 0.1158 \\ 0.1368 & 0.2421 \end{bmatrix}, \quad Q(A^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.3263 & 0.0947 \\ 0.1368 & 0.2421 \end{bmatrix}.$$

По следствию 2.3, мы имеем

$$\begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.1250 \end{bmatrix} < Q(A^{-1})e_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.3263 \\ 0.1368 \end{bmatrix}$$

$$\leqslant P(A^{-1})e_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.3579 \\ 0.1368 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0.3846 \\ 0.1538 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 0.0769 \\ 0.2308 \end{bmatrix} < Q(A^{-1})e_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0947 \\ 0.2421 \end{bmatrix}$$

$$\leqslant P(A^{-1})e_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1158 \\ 0.2421 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0.1250 \\ 0.2500 \end{bmatrix},$$

так что

$$\begin{bmatrix} 0.3125 & 0.0769 \\ 0.1250 & 0.2308 \end{bmatrix} < Q(A^{-1}) \leqslant P(A^{-1}) < \begin{bmatrix} 0.3846 & 0.1250 \\ 0.1538 & 0.2500 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Отметим, что, как показывает данный пример, в отличие от рассматриваемых по-отдельности столбцов матриц $P(A^{-1})$ и $Q(A^{-1})$, ни одна из этих матриц целиком не может быть оценена с помощью обратной к одной из агрегированных матриц, т.е.

$$P(A^{-1}) \nleqq A_1^{-1}, \quad P(A^{-1}) \nleqq A_2^{-1}, \quad Q(A^{-1}) \ngeqq A_1^{-1}, \quad Q(A^{-1}) \ngeqq A_2^{-1}.$$

По следствию 4.1, для перроновского корня матрицы A^{-1} мы имеем

$$0.4101 < \rho(A^{-1}) = 0.4215 < 0.4409,$$

что эквивалентно оценкам

$$2.2679 < \lambda_3(A) = 2.3726 < 2.4384.$$

Заметим, что указанные оценки для наименьшего по модулю собственного значения матрицы A значительно точнее, чем оценки гершгоринского типа

$$2 = \min_{i=1,2,3} \left\{ a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} \leqslant \lambda_3(A) \leqslant \max_{i=1,2,3} \left\{ a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} = 3,$$

соответствующие наиболее грубому разбиению $M_1 = \{1, 2, 3\}$, для которого три ассоциированные матрицы имеют вид $A^{(1)} = 2$, $A^{(2)} = 2$, $A^{(3)} = 3$. Для последнего разбиения мы также имеем

$$P(A^{-1}) = \max_{i=1,2,3} \left(A^{-1} e^{(3)} \right)_i = \|A^{-1}\|_\infty = 0.4526,$$

$$Q(A^{-1}) = \min_{i=1,2,3} \left(A^{-1} e^{(3)} \right)_i = 0.3789,$$

так что, по следствию 2.3,

$$1/3 < Q(A^{-1}) \leqslant P(A^{-1}) < 1/2.$$

В связи с оценками из §5, для исходного разбиения мы вычисляем:

$$D_A^{-1} A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -0.4783 \\ 0 & 1 & -0.3913 \\ \hline -0.2 & -0.2 & 1 \end{array} \right];$$

$$\min_{i=1,2}(A_{11}^{-1}e)_i = 0.2609, \quad \|A_{11}^{-1}\|_\infty = 0.3043, \quad \|A_{11}^{-1}\|_\infty^{-1} = 3.2862,$$

$$N(A) = \begin{bmatrix} 3.2862 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.4783 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2862 & -1.5718 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$N(A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3763 & 0.1183 \\ 0.1505 & 0.2473 \end{bmatrix}.$$

Тем самым, $N(A)$ является невырожденной M-матрицей, и оценка Робера (5.3) дает

$$P(A^{-1}) \leqslant \begin{bmatrix} 0.3763 & 0.1183 \\ 0.1505 & 0.2473 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Заметим, что оценка Робера (6.2) является более точной, чем верхняя оценка в (6.1).

Для матрицы Фидлера–Птака (5.12) мы имеем

$$\tilde{N}(A) = \begin{bmatrix} 3.2862 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{N}(A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4022 & 0.1609 \\ 0.1609 & 0.2644 \end{bmatrix},$$

откуда следует, что $\tilde{N}(A)$ – невырожденная M-матрица, и оценка Фидлера–Птака (5.13) дает

$$P(A^{-1}) \leqslant \begin{bmatrix} 0.4022 & 0.1609 \\ 0.1609 & 0.2644 \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Заметим, что оценка (6.3) существенно проигрывает не только оценке (6.2), но также и оценке (6.1).

Наконец, поскольку $N(A)$ и D_A – невырожденные M-матрицы, то A является квази-PM-матрицей, и ее обратную можно оценить с помощью теоремы 5.3. Для этого мы находим

$$(D_A^{-1}A)^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 1 & -0.4783 \\ -0.4000 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(D_A^{-1}A)^{(2,3)} = \begin{bmatrix} 1 & -0.3913 \\ -0.4000 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[(D_A^{-1}A)^{(1,3)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2366 & 0.5915 \\ 0.4946 & 1.2366 \end{bmatrix},$$

$$\left[(D_A^{-1}A)^{(2,3)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.1856 & 0.4639 \\ 0.4742 & 1.1856 \end{bmatrix},$$

$$P(A^{-1})e_1 \leqslant 0.3043 \begin{bmatrix} 1.2366 \\ 0.4946 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3763 \\ 0.1505 \end{bmatrix},$$

$$P(A^{-1})e_2 \leqslant 0.2 \begin{bmatrix} 0.5915 \\ 1.2366 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1183 \\ 0.2473 \end{bmatrix},$$

$$Q(A^{-1})e_1 \geqslant 0.2609 \begin{bmatrix} 1.1856 \\ 0.4742 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3093 \\ 0.1237 \end{bmatrix},$$

$$Q(A^{-1})e_2 \geqslant 0.2 \begin{bmatrix} 0.4639 \\ 1.1856 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0928 \\ 0.2371 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} 0.3093 & 0.0928 \\ 0.1237 & 0.2371 \end{bmatrix} \leqslant Q(A^{-1}) \leqslant P(A^{-1}) \leqslant \begin{bmatrix} 0.3763 & 0.1183 \\ 0.1505 & 0.2473 \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Остается заметить, что верхняя оценка из (6.4) совпадает с оценкой Робера (6.2) (поскольку для данного примера $R(A) = (D_A^{-1}A)^{(1,3)} \leqslant (D_A^{-1}A)^{(2,3)}$) и лучше, чем верхняя оценка из (6.1). С другой стороны, нижние оценки для $Q(A^{-1})$ из (6.4) и (6.1) несравнимы между собой; оценка для первого столбца матрицы $Q(A^{-1})$ из (6.4) хуже, чем соответствующая ей оценка из (6.1), но для второго столбца $Q(A^{-1})$ оценка из (6.4) лучше, чем оценка из (6.1).

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М., 1967.
2. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
3. В. П. Чистяков, *К оценке перронова корня неотрицательных матриц.* — Докл. АН СССР **246** (1979), 548–550.
4. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
5. M. Fiedler, V. Pták, *Generalized norms of matrices and the location of the spectrum.* — Czech. Math. J. **12** (1962), 558–571.
6. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1991.
7. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 692–702.

8. M. Marcus, H. Minc, *Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.
9. A. M. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
10. F. Robert, *Blocs H-matrices et convergence des méthodes itérative classiques par blocs.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.

Kolotilina L. Yu. Bounds for the inverses of PM- and PH-matrices.

The paper presents new bounds for the inverses of the so-called PM- and PH-matrices. Also bounds for the spectral radii of the inverses to PM- and PH-matrices are obtained, and the monotonicity of these bounds with respect to the underlying partition of the index set is established. Finally, the so-called quasi-PM- and quasi-PH-matrices are introduced, and bounds for the inverses of such matrices are suggested.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 26 марта 2009 г.