Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов

О ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦАХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ОДНОВРЕМЕННО НОРМАЛЬНЫМИ И СОПРЯЖЕННО–НОРМАЛЬНЫМИ

§1. Введение

Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных матриц порядка n. Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ называется нормальной, если

$$AA^* = A^*A, \qquad (1)$$

и сопряженно-нормальной, если

$$AA^* = \overline{A^*A}. \qquad (2)$$

Обозначим через $\mathcal{NT}_n$ и $\mathcal{CNT}_n$ пересечения множества теплицевых матриц порядка n с множествами соответственно нормальных и сопряженно-нормальных матриц. Эти пересечения были охарактеризованы авторами в [1, 2].

Теорема 1. *Пусть A – комплексная матрица, одновременно нормальная и теплицева. Тогда справедливо хотя бы одно из двух утверждений:*

а) *A – матрица вида $\alpha I + \beta H$, где α и β – комплексные числа, H – эрмитова теплицева матрица;*

б) *A представляет собой ϕ-циркулянт для некоторого комплексного числа ϕ, по модулю равного единице.*

Что касается множества теплицевых сопряженно-нормальных матриц, то его описание было дано в [2] в виде списка семи классов, в совокупности составляющих $\mathcal{CNT}_n$. Мы приведем этот список в §2.

Ключевые слова : Теплицевы матрицы, нормальные матрицы, сопряженно-нормальные матрицы, циркулянты.

Работа второго автора была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 08-01-00115) и программой фундаментальных исследований отделения математических наук РАН “Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач” по проекту “Матричные методы в интегральных и дифференциальных уравнениях”.

В настоящей заметке мы хотим охарактеризовать теплицевы матрицы, являющиеся одновременно нормальными и сопряженно-нормальными. Это будет сделано в §3 путем сопоставления теоремы 1 со списком из §2. Некоторые комментарии относительно (не обязательно теплицевых) матриц, удовлетворяющих обоим соотношениям (1) и (2), даны в заключительном §4.

§2. Теплицевы сопряженно-нормальные матрицы

Условимся называть теплицеву матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-3} & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-4} & t_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{-(n-1)} & t_{-(n-2)} & t_{-(n-3)} & \dots & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

λ-симметричной, если

$$t_{-j} = \lambda t_j, \qquad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Множество $\mathcal{CNT}_n$ есть объединение семи перечисляемых ниже классов, каждый из которых замкнут относительно умножения на комплексные константы.

Класс 1. Циркулянты, в спектральном разложении которых

$$T = F^* D F \tag{3}$$

диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$ удовлетворяет соотношениям

$$|d_m| = |d_{n+2-m}|, \qquad m = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{4}$$

В представлении (3) F – это матрица Фурье

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}} & e^{i\frac{2\pi}{n}2} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-2)} & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)} \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}2} & e^{i\frac{2\pi}{n}4} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{n}2(n-2)} & e^{i\frac{2\pi}{n}2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-2)} & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-2)2} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-2)(n-2)} & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-2)(n-1)} \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)} & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)2} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)(n-2)} & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Класс 2. Косые циркулянты, в спектральном разложении которых

$$T = G^* D G \tag{5}$$

диагональная матрица D удовлетворяет соотношениям

$$|d_1| = |d_2|, \quad |d_3| = |d_4|, \quad |d_5| = |d_6|, \dots . \tag{6}$$

В представлении (5) G – это унитарная матрица

$$G = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\frac{\pi}{n}} & e^{i\frac{\pi}{n}2} & \dots & e^{i\frac{\pi}{n}(n-2)} & e^{i\frac{\pi}{n}(n-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{\pi}{n}} & e^{-i\frac{\pi}{n}2} & \dots & e^{-i\frac{\pi}{n}(n-2)} & e^{-i\frac{\pi}{n}(n-1)} \\ 1 & e^{i\frac{3\pi}{n}} & e^{i\frac{3\pi}{n}2} & \dots & e^{i\frac{3\pi}{n}(n-2)} & e^{i\frac{3\pi}{n}(n-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{3\pi}{n}} & e^{-i\frac{3\pi}{n}2} & \dots & e^{-i\frac{3\pi}{n}(n-2)} & e^{-i\frac{3\pi}{n}(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Класс 3. Произвольные скалярные кратные унитарных λ-циркулянтов, где $|\lambda| = 1$ и $\lambda \neq \pm 1$.

Класс 4. Симметричные теплицевы матрицы.

Класс 5. Кососимметричные теплицевы матрицы и произвольные комплексные кратные матриц, получаемых из вещественных кососимметричных теплицевых матриц произвольными вещественными сдвигами по главной диагонали.

Класс 6. Теплицевы λ-симметричные $n \times n$-матрицы с нулевыми элементами в позициях $(i, 1)$, $i = 1, 2, ..., [n/2] + 1$. Здесь $|\lambda| = 1$ и $\lambda \neq \pm 1$.

Класс 7 имеет наиболее сложное описание. Он также состоит из λ-симметричных матриц, где $|\lambda| = 1$ и $\lambda \neq \pm 1$. В качестве образующих элементов этого класса можно рассматривать матрицы T с диагональным элементом

$$\frac{\lambda - \overline{\lambda}}{\overline{\lambda} - 1}.$$

Пусть L – строго нижнетреугольная матрица, совпадающая с нижнетреугольной частью матрицы T. Представим L в алгебраической форме $L = L_1 + iL_2$, где матрицы L_1 и L_2 вещественны. Матрицу L_2 (т.е. определяющие ее $n-1$ вещественные числа) можно выбрать произвольно; после этого L_1 однозначно определяется уравнением

$$2L_1 = L_1 L_1 + L_2 L_2. \tag{7}$$

Весь класс 7 состоит из всевозможных скалярных кратных построенных указанным способом образующих матриц T.

§3. Пересечение множеств $\mathcal{NT}_n$ и $\mathcal{CNT}_n$

Сопоставим теорему 1 со списком сопряженно-нормальных матриц, приведенным в §2. Очевидно, что первые три класса в этом списке укладываются в описание случая б) теоремы 1 и потому входят в пересечение $\mathcal{NT}_n \cap \mathcal{CNT}_n$.

Для остальных четырех классов достаточно исследовать их пересечение с множеством теплицевых линейных многочленов от эрмитовых матриц (случай а) теоремы). Такое исследование облегчается следующим приемом: если матрица

$$A = \alpha H + \beta I, \qquad H = H^*,$$

принадлежит указанному пересечению, то, ввиду замкнутости каждого класса относительно умножения на комплексные числа, матрицу A при ненулевом $\alpha \neq 1$ можно заменить матрицей

$$B = H + \gamma I, \quad \gamma = \beta/\alpha.$$

Преимущество этой матрицы перед исходной матрицей A состоит в том, что, по крайней мере, ее внедиагональная часть устроена так же, как в эрмитовой матрице.

Итак, рассматривая матрицы класса 4, удовлетворяющие условиям случая а) теоремы 1, мы можем ограничиться теплицевыми матрицами T, для которых одновременно выполняются условия

$$t_{-j} = t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \tag{8}$$

и

$$t_{-j} = \overline{t_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{9}$$

Таким образом, все числа t_j вещественны, и пересечение класса 4 с множеством теплицевых линейных многочленов от эрмитовых матриц можно описать как

Класс 4′. Симметричные теплицевы матрицы с вещественными внедиагональными элементами и произвольные их комплексные кратные.

При аналогичном исследовании класса 5 формулы (8) нужно заменить равенствами

$$t_{-j} = -t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Вместе с формулами (9) они означают, что все числа t_j чисто мнимые. Тем самым пересечение класса 5 с множеством теплицевых линейных многочленов от эрмитовых матриц можно описать как

Класс $5'$. Матрицы, получаемые из вещественных кососимметричных теплицевых матриц посредством произвольных вещественных сдвигов по главной диагонали и умножения на произвольные комплексные числа.

Пусть теперь T есть λ-симметричная матрица с $|\lambda| = 1$ и $\lambda \neq \pm 1$. Объединяя равенства

$$t_{-j} = \lambda t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

с формулами (9), имеем

$$\lambda t_j = \overline{t_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{10}$$

Полагая в (10)

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad t_j = a_j + ib_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и учитывая, что $\lambda_2 \neq 0$, приходим к соотношениям

$$b_j = \beta a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \tag{11}$$

и

$$t_j = (1 + i\beta) a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2}.$$

Мы можем теперь описать пересечение класса 6 с множеством теплицевых линейных многочленов от эрмитовых матриц как

Класс $6'$. Теплицевы λ-симметричные $n \times n$-матрицы с нулевыми элементами в позициях $(i, 1)$, $i = 1, 2, ..., [n/2] + 1$; прочие элементы первого столбца выражаются формулами

$$t_{-j} = (1 - i\beta) a_j, \qquad j = [n/2] + 2, \dots, n-1,$$

где a_j $(j = [n/2] + 2, \dots, n-1)$ – произвольные вещественные числа.

Наконец, мы покажем, что пересечение класса 7 с множеством теплицевых линейных многочленов от эрмитовых матриц не содержит матриц, отличных от тех, что описаны выше. Пусть T – матрица из этого пересечения и L – строго нижнетреугольная матрица, совпадающая с нижнетреугольной частью матрицы T. Тогда вещественные матрицы L_1 и L_2 в представлении $L = L_1 + iL_2$ должны быть связаны соотношением (7). С другой стороны, формула (11) означает, что

$$L_2 = -\beta L_1. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (7), получаем

$$2L_1 = (1+\beta^2)L_1^2,$$

или

$$[2I - (1+\beta^2)L_1]L_1 = 0.$$

Треугольная матрица с диагональным элементом 2, выписанная внутри квадратных скобок, невырожденна. Отсюда следует, что $L_1 = 0$ и, следовательно, $L_2 = 0$ (см. (7)). Итак, всякая матрица из рассматриваемого пересечения является скалярной, но такие матрицы уже учтены нами в описании класса $4'$.

Результаты анализа, проведенного в этом параграфе, можно подытожить в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Множество $\mathcal{NT}_n \cap \mathcal{CNT}_n$ есть объединение классов* 1–3 *и* $4'$–$6'$.

§4. Пересечение множеств нормальных и сопряженно-нормальных матриц

Опустим условие теплицевости и посмотрим, что содержательное можно сказать о матрицах, являющихся одновременно нормальными и сопряженно-нормальными. Множество таких матриц обозначим через $\mathcal{M}$.

Очевидно, что для вещественных матриц определения (1) и (2) совпадают, т.е. всякая вещественная нормальная матрица автоматически является сопряженно-нормальной.

Пусть теперь A – комплексная матрица из $\mathcal{M}$. Сличая (1) и (2), видим, что матрица AA^* должна быть вещественной.

Рассмотрим полярное разложение матрицы A:

$$A = HU. \tag{13}$$

Эрмитов сомножитель H разложения (13) определен однозначно и является единственным положительно полуопределенным квадратным корнем из AA^*. Поскольку AA^* – вещественная симметричная матрица, это же верно для матрицы H.

Пусть Q – вещественная ортогональная матрица, приводящая H к диагональному виду:

$$Q^T HQ = \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n). \tag{14}$$

Поскольку сомножители полярного разложения любой нормальной матрицы перестановочны, Σ должна коммутировать с унитарной матрицей

$$V = Q^T UQ.$$

Предположим, что H есть матрица в общем положении, т.е. все ее собственные значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ попарно различны. (Напомним, что по отношению к A те же значения выступают как сингулярные числа.) Тогда перестановочная с Σ матрица V сама должна быть диагональной матрицей. Но тогда диагональна и матрица

$$B = Q^T AQ.$$

Иными словами, в этом случае матрица $A \in \mathcal{M}$ имеет ортонормированный базис из вещественных собственных векторов.

Если некоторые из чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ совпадают, то без ограничения общности можно считать, что

$$\Sigma = \sigma_1 I_{k_1} \oplus \cdots \oplus \sigma_m I_{k_m}, \qquad k_1 + \cdots + k_m = n, \tag{15}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ – все попарно различные сингулярные числа матрицы A. В частности, возможен случай $m = 1$, означающий, что, с точностью до скалярного множителя σ_1, матрица A является унитарной. Именно эту ситуацию мы наблюдали при выделении классов 1–3 в §2.

Пусть $m > 1$. Тогда матрица V, коммутирующая с Σ, должна быть прямой суммой того же вида, что и матрица (15):

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

Здесь блоки $V_1, \ldots, V_m$ суть унитарные матрицы соответствующих порядков. Но тогда

$$B = \sigma_1 V_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_m V_m.$$

Другими словами, ортонормированный базис из вещественных собственных векторов матрицы H позволяет представить A в виде прямой суммы скалярных кратных унитарных матриц меньшего порядка.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, В. Н. Чугунов, *Критерий нормальности комплексной теплицевой матрицы.* — Ж. вычисл. матем. матем. физ. **36** (1996), 3–10.
2. V. N. Chugunov, Kh. D. Ikramov, *The conjugate-normal Toeplitz problem.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 2467–2473.

Chugunov V. N., Ikramov Kh. D. On Toeplitz matrices that are simultaneously normal and conjugate-normal.

A complete description of the set of Toeplitz matrices that are simultaneously normal and conjugate-normal is provided.

Поступило 4 февраля 2009 г.

Московский
государственный университет
ГСП-1, Ленинские горы,
19991 Москва, Россия

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Институт вычислительной математики РАН
ул. Губкина 8, 119333 Москва, Россия

E-mail: vadim@bach.inm.ras.ru