Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

Х. Д. Икрамов

УЛУЧШЕННЫЕ ОЦЕНКИ ШИРИНЫ РЕКУРСИИ В МЕТОДАХ КОНГРУЭНТНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Многие итерационные методы для решения систем линейных уравнений неявно основаны на той или иной процедуре приведения матрицы системы к выбранной компактной форме. Если, например, говорить об унитарном приведении посредством подобий, то таким методам для эрмитовых систем, как алгоритм сопряженных градиентов, MINRES или SYMMLQ, соответствует приведение к трехдиагональному виду. Популярный метод GMRES для неэрмитовых систем использует приведение к форме Хессенберга. Избранный способ приведения сочетается в методах этого типа с той или иной процедурой выбора приближенных решений в промежуточных (пробных) подпространствах. В качестве такой процедуры чаще всего применяется принцип минимальной невязки.

Предположим, что матрица системы линейных уравнений

$$Ax = b \tag{1}$$

нормальна, т.е.

$$AA^* = A^*A. \tag{2}$$

Эта информация, к сожалению, не дает никаких преимуществ при решении системы (1) методом GMRES. Поэтому в [1] был разработан специальный метод MINRES-N для данного класса систем. В нем принцип минимальной невязки сочетается с приведением матрицы к блочно-трехдиагональной форме, реализуемым посредством так называемого обобщенного алгоритма Ланцоша. Последний представляет собой конечный процесс, сохраняющий унитарное подобие и использующий лишь арифметические операции и извлечения квадратных корней. Для краткости всякий процесс этого типа будем называть *конечным ортогональным процессом.*

Ключевые слова : унитарные подобия, унитарные конгруэнции, обобщенный алгоритм Ланцоша, компактные формы, нормальные матрицы, сопряженно-нормальные матрицы.

Теоретической основой метода MINRES-N является следующая теорема, доказанная в [2].

Теорема 1. *Нормальная* $n \times n$*-матрица* A *посредством конечного ортогонального процесса может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме*

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & & \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \\ & H_{32} & H_{33} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где диагональные блоки $H_{11}, H_{22}, \dots$ *квадратные и их порядки в типичном случае даются последовательными натуральными числами* $1, 2, 3, \dots$. *Если* A *удовлетворяет уравнению вида*

$$g(A, A^*) = 0, \tag{4}$$

где $g(x, y)$ – *многочлен степени* $m \ll n$, *то порядки диагональных блоков* H_{ii} *в матрице* (3), *начиная с* $i = m$, *стабилизируются на значении* m.

Порядок блока H_{ii} в дальнейшем обозначается через ω_{i-1} ($i = 1, 2, \dots$). Как будет видно из приводимого ниже объяснения, числа ω_i имеют важный геометрический смысл.

Для выбранного ненулевого вектора x построим *обобщенную степенную последовательность*

$$x, Ax, A^*x, A^2x, AA^*x, A^{*2}x, A^3x, \dots . \tag{5}$$

Удобно рассматривать эту последовательность как состоящую из сегментов длины соответственно $1, 2, 3, 4, \dots$. Сегмент с номером k, называемый k-м слоем, можно описать как совокупность векторов вида $u = W_k(A, A^*)x$, где $W_k(s, t)$ пробегает множество одночленов степени k от (коммутирующих) переменных s и t. Символ $W_0(s, t)$ обозначает пустое слово, так что $W_0(A, A^*)x$ есть попросту вектор x.

Подпространство

$$\mathcal{L}_m(A, x) = \operatorname{span}\{W(A, A^*)x : \deg W \le m\} \tag{6}$$

называется m-м *обобщенным подпространством Крылова.* Его размерность будем обозначать через ℓ_m. В этих обозначениях имеет место равенство

$$\omega_m = \ell_m - \ell_{m-1} \ (m \ge 1). \tag{7}$$

Таким образом, ω_m есть приращение размерности, получаемое при переходе от линейной оболочки первых $m-1$ слоев последовательности (5) к линейной оболочке ее первых m слоев.

Возвращаясь к компактной форме (3), заметим, что параметры ω_i определяют максимальное число ненулевых элементов в каждом столбце (и каждой строке) H. Эти числа (будем обозначать их через c_i и r_i) играют в обобщенном алгоритме Ланцоша особую роль. В процессе ортогонализации, составляющем основу этого алгоритма, они указывают локальную *ширину рекурсии*, т.е. количество векторов текущей ортонормальной системы, используемых при вычислении очередного ортогонального вектора. Чем меньше параметры ω_i, тем меньше числа c_i и r_i; тем, следовательно, меньше ширина рекурсии и трудоемкость отдельного шага.

Как следует из теоремы 1, для нормальной матрицы A общего вида числа ω_i медленно возрастают. Вместе с ними растет и локальная ширина рекурсии. Однако второе утверждение теоремы описывает более благоприятную ситуацию стабилизации этих чисел, приводящую к стабилизации ширины рекурсии. Практически важный случай, когда стабилизация имеет место, указан в [2].

Предположим, что матрица A системы (1) имеет малое число k невещественных собственных значений

$$\lambda_j = x_j + iy_j,\ y_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда весь спектр этой матрицы принадлежит объединению прямых

$$y = 0 \quad \text{и} \quad x = x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

иначе говоря, вырожденной алгебраической кривой

$$(x - x_1) \cdots (x - x_k) y = 0$$

степени $k+1$. В таком случае сама матрица A удовлетворяет уравнению

$$g(A, A^*) = (A - x_1 I) \cdots (A - x_k I) A^* = 0.$$

В соответствии со вторым утверждением теоремы 1, порядки диагональных блоков H_{ii} в компактной форме (3) нашей матрицы A должны стабилизироваться на значении $k+1$.

Однако в данном случае о компактной форме H можно сказать нечто большее. Здесь нам поможет еще один результат из [2].

Теорема 2. *Пусть нормальная $n \times n$-матрица A представлена в виде*

$$A = B + C, \quad \text{где} \quad B = B^*, \ C = -C^*. \tag{8}$$

Если

$$k = \operatorname{rank}\ C < \frac{n-1}{2},$$

то блоки H_{ii} в матрице (3), начиная с $i = k+1$, имеют порядок 1. Иначе говоря, нижняя часть матрицы H, начинающаяся с $(k+1)$-й блочной строки, является обычной трехдиагональной матрицей.

Для нашей нормальной матрицы A косоэрмитова матрица C в разложении (8) имеет ровно k ненулевых собственных значений и, следовательно, ранг k. Согласно теореме 2, компактная форма H матрицы A должна иметь трёхдиагональный "хвост."

2. Обобщенный алгоритм Ланцоша может быть применен и к анормальной матрице A. Существенное отличие от нормального случая состоит в том, что A и A^* более не коммутируют. Поэтому k-й слой обобщенной степенной последовательности следует теперь определить как совокупность векторов вида $u = W_k(A, A^*)x$, где $W_k(s,t)$ – произвольный одночлен степени k от *некоммутирующих* переменных s и t. В результате вместо оценки

$$\omega_i \leqslant i+1, \quad i = 0, 1, 2, \dots ,$$

справедливой для любой нормальной матрицы, имеет место лишь неравенство

$$\omega_i \leqslant 2^i, \qquad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Если это неравенство реалистически отображает ситуацию с конкретной матрицей A, то применение обобщенного алгоритма Ланцоша к такой матрице едва ли оправданно. Однако для некоторых классов анормальных матриц числа ω_i, независимо от индекса i, можно ограничить небольшой константой. Один из таких классов описывается следующей теоремой (см. [3]).

Теорема 3. *Пусть A – матрица вида* (8), *где косоэрмитова матрица C имеет ранг $k \geqslant 1$. Тогда посредством конечного ортогонального процесса A может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме* (3), *в которой порядки всех диагональных блоков H_{ii} не превосходят числа $k+1$.*

Отличие этой теоремы от ситуации, описываемой теоремой 2, состоит в том, что A уже не обязана быть нормальной матрицей (т.е. матрицы B и C в представлении (8) не обязаны коммутировать).

3. Матрица A в теореме 3 есть малоранговое возмущение эрмитовой матрицы B. Пусть теперь N – неэрмитова нормальная матрица, допускающая унитарное приведение к блочно-трехдиагональной форме (3), в которой порядки всех блоков H_{ii} не превосходят числа δ_0, где $2 \le \delta_0 < n/6$. Рассмотрим матрицу

$$A = N + R, \tag{9}$$

где R – произвольная матрица ранга 1. Ввиду произвольности R, матрица A может не быть нормальной, однако, в отличие от ситуации в теореме 3, косоэрмитова компонента в ее представлении (8) не обязана иметь малый ранг. Оказывается, что и такую матрицу можно привести к блочно-трехдиагональной форме (см. [4]).

Теорема 4. *При условиях, наложенных выше на нормальную матрицу N, матрица* (9) *посредством конечного ортогонального процесса может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме* (3), *в которой порядки всех блоков H_{ii} не превосходят числа*

$$\max\{3 + \delta_0, 3\delta_0\}. \tag{10}$$

Существенное обобщение этого результата получено в [5].

Теорема 5. *Пусть нормальная $n \times n$-матрица N такова, что обобщенный алгоритм Ланцоша при любом выборе начального вектора приводит N к блочно-трехдиагональной форме, в которой порядки диагональных блоков не превосходят числа δ_0. Тогда для любой матрицы R ранга k матрица*

$$A = N + R \tag{11}$$

может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме, в которой порядки диагональных блоков не превосходят числа $\hat{\delta} = (2k + 1)\delta_0$.

4. Приводить матрицу к компактным формам можно и посредством унитарных конгруэнций, т.е. преобразований вида

$$A \longrightarrow F = Q^T A Q, \tag{12}$$

где преобразующая матрица Q унитарная. Так, всякая (комплексная) симметричная матрица A может быть преобразована в трехдиагональную матрицу посредством конечной последовательности конгруэнций (12), использующих элементарные унитарные матрицы Q. Итерационный вариант такого приведения в сочетании с принципом минимальной невязки составляет алгоритм CSYM, предложенный в [6].

CSYM есть хронологически первый пример алгоритма для решения линейных систем, который мы относим к методам конгруэнтного типа, т.е. к методам, в основе которых лежит приведение к компактным формам посредством унитарных конгруэнций. Поскольку речь в дальнейшем идет преимущественно о такого рода приведении, то мы расширим понятие конечного ортогонального процесса. К подобным процессам мы будем теперь относить и всякий эквивалент конечной последовательности элементарных унитарных конгруэнций, иначе говоря, всякий конечный процесс, сохраняющий унитарную конгруэнтность и использующий лишь арифметические операции и извлечения квадратных корней.

Унитарные конгруэнции не сохраняют свойство матрицы быть нормальной; однако они сохраняют свойство сопряженной нормальности, выражаемое равенством

$$AA^* = \overline{A^*A}. \tag{13}$$

Сопряженно-нормальными являются, в частности, симметричные матрицы.

Сопряженно-нормальные матрицы играют в теории унитарных конгруэнций такую же роль, какую обычные нормальные матрицы выполняют относительно унитарных подобий. Поэтому естественно поставить вопрос о существовании аналога метода MINRES-N, рассчитанного на системы с сопряженно-нормальными матрицами коэффициентов. Такой метод под названием MINRES-CN был построен в [7]. Его теоретической основой является следующий результат, полученный в [8].

Теорема 6. *Сопряженно-нормальная $n \times n$-матрица A посредством конечного ортогонального процесса может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме* (3), *где диагональные блоки $H_{11}, H_{22}, \ldots$ квадратные и их порядки в типичном случае даются последовательными натуральными числами* $1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 6 есть аналог первого утверждения теоремы 1. Второе утверждение теоремы 1 также имеет аналог в теории унитарных конгруэнций. Однако наиболее естественная формулировка этого аналога потребовала бы привлечения псевдособственных значений матрицы A, чего в данной статье нам хотелось бы избежать.

Подобно MINRES-N, алгоритм MINRES-CN является методом минимальных невязок. Однако его пробные подпространства существенно отличаются от обобщенных крыловских подпространств, используемых в MINRES-N, и представляют собой линейные оболочки начальных отрезков последовательности

$$x, \bar{A}\bar{q}, A^*\bar{q}, \bar{A}Ax, \bar{A}A^Tx, A^*A^Tx, \bar{A}A\bar{A}\bar{q}, \dots . \tag{14}$$

Тем не менее связь с обобщенными крыловскими подпространствами имеется и мы обсудим ее в следующем разделе.

5. Сопоставим матрице A матрицу удвоенного порядка

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{A} \\ A & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Если A – сопряженно-нормальная матрица, то матрица (15) нормальна в обычном смысле.

Фиксируем ненулевой вектор $x \in \mathbf{C}^n$ и сопоставим ему вектор удвоенной размерности

$$v = \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Рассмотрим обобщенную степенную последовательность, порождаемую матрицей $\hat{A}$ и вектором (16):

$$v, \quad \hat{A}v = \begin{pmatrix} \bar{A}\bar{q} \\ Ax \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^*v = \begin{pmatrix} A^*\bar{q} \\ A^Tx \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^2v = \begin{pmatrix} A_Lx \\ A_R\bar{q} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\hat{A}^*v = \begin{pmatrix} \bar{A}A^Tx \\ AA^*\bar{q} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{*2}v = \begin{pmatrix} A^*A^Tx \\ A^TA^*\bar{q} \end{pmatrix}, \cdots . \tag{17}$$

Символами A_L и A_R обозначены матрицы $\bar{A}A$ и $A\bar{A}$.

Теперь очевидно, что последовательность (14) составлена из верхних половин векторов последовательности (17). Разобьем (14) на слои, считая k-м слоем совокупность векторов, отвечающих k-му слою последовательности (17). Аналогично, m-му подпространству $\mathcal{L}_m(\hat{A}, v)$ сопоставим подпространство $\tilde{\mathcal{L}}_m(A, x)$, образованное верхними половинами векторов $z \in \mathcal{L}_m(\hat{A}, v)$. Размерность $\tilde{\mathcal{L}}_m(A, x)$ обозначим через $\tilde{\ell}_m$, а число $\tilde{\omega}_m = \tilde{\ell}_m - \tilde{\ell}_{m-1}$ $(m \geqslant 1)$ назовем шириной m-го слоя в (14). Очевидно, что

$$\tilde{\omega}_m \leqslant \omega_m, \qquad m = 1, 2, \dots , \tag{18}$$

где ω_m есть ширина m-го слоя в (17).

Параметры $\tilde{\omega}_i$ есть в точности порядки диагональных блоков в блочно-трехдиагональной матрице H теоремы 6. Как и в MINRES-N, они определяют максимальное число ненулевых элементов в каждом столбце (и каждой строке) H, и эти числа снова указывают локальную ширину рекурсии в своеобразном процессе ортогонализации, составляющем основу алгоритма MINRES-CN.

6. Аналогом представления (8) в теории унитарных конгруэнций является разложение

$$A = S + K, \quad S = S^T, \quad K = -K^T. \tag{19}$$

Для краткости будем называть (19) SSS-разложением матрицы A (от Symmetric-Skew-Symmetric decomposition). SSS-разложение сохраняется унитарными конгруэнциями в том смысле, что

$$\tilde{A} = Q^T A Q = \tilde{S} + \tilde{K},$$

где

$$\tilde{S} = Q^T S Q = \tilde{S}^T \quad \text{и} \quad \tilde{K} = Q^T K Q = -\tilde{K}^T.$$

В [9] доказано утверждение, которое можно рассматривать как аналог теоремы 2.

Теорема 7. *Пусть в SSS-разложении сопряженно-нормальной $n \times n$-матрицы A кососимметричная компонента K имеет ранг $k < n/2$. Тогда в блочно-трехдиагональной форме* (3) *все блоки H_{ii}, начиная с $i = 2k + 1$, имеют порядок 1.*

Имеется соответствие и теореме 3, также доказанное в [9].

Теорема 8. *Пусть A – матрица вида* (19), *где кососимметричная матрица K имеет ранг $k \geqslant 1$. Тогда посредством конечного ортогонального процесса A может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме* (3), *в которой порядки всех диагональных блоков H_{ii} не превосходят числа $2k + 1$.*

Наконец, утверждение, аналогичное теореме 5, было установлено в [5].

Теорема 9. *Пусть сопряженно-нормальная $n \times n$-матрица N такова, что при любом выборе начального вектора ортогональный процесс, лежащий в основе алгоритма MINRES-CN, приводит N к блочно-трехдиагональной форме, в которой порядки диагональных блоков не превосходят числа δ_0. Тогда для любой матрицы R ранга $k < n$ матрица*

$$A = N + R \tag{20}$$

может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме, в которой порядки диагональных блоков не превосходят числа $\breve{\delta} = 2(4k+1)\delta_0$.

7. Хотя теоремы 7–9 действительно схожи с соответствующими теоремами для нормальных матриц, между ними есть и существенные различия. Например, в теореме 7 стабилизация порядков диагональных блоков начинается с $i = 2k + 1$, а не с $i = k + 1$, как в теореме 2. Оценка для порядков диагональных блоков в теореме 8 примерно вдвое больше аналогичной оценки в теореме 2: $2k + 1$ вместо $k + 1$. Еще хуже соотношение между оценками для порядков диагональных блоков в теоремах 9 и 5: оно равно приблизительно четырем.

Мы покажем сейчас, что различие теорем 2 и 7 вызвано не существом дела, а недостатками подхода, принятого при доказательстве теоремы 7. В действительности, “правильная” версия этой теоремы должна быть полностью аналогична теореме 2. Иначе говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть в SSS-разложении сопряженно-нормальной $n \times n$-матрицы A кососимметричная компонента K имеет ранг $k < \frac{n-1}{2}$. Тогда в блочно-трехдиагональной форме (3) все блоки H_{ii}, начиная с $i = k + 1$, имеют порядок 1.*

Что касается теорем 8 и 9, то улучшить установленные в них оценки для порядков диагональных блоков нам удается пока лишь при дополнительном предположении о матрицах возмущения K и R. Это предположение будет сформулировано ниже.

8. Наше обоснование теоремы 10 опирается на следующие положения.

Предложение 1. *Если матрица A в теореме 1 вещественная, то ее приведение к блочно-трехдиагональной форме (3) можно осуществить посредством вещественного ортогонального (а не комплексного унитарного) подобия.*

Действительно, выбирая вещественный начальный вектор x, мы можем провести обобщенный алгоритм Ланцоша целиком в $\mathbf{R}^n$, а не в $\mathbf{C}^n$.

Теорема 11. *Всякая сопряженно-нормальная матрица унитарно конгруэнтна вещественной нормальной матрице.*

Доказательство этой теоремы дано в [10].

Доказательство теоремы 10. Выполним унитарную конгруэнцию (12), которая, в соответствии с теоремой 11, преобразует сопряженно-нормальную матрицу A в вещественную нормальную матрицу F. Кососимметричная компонента SSS-разложения при этом сохраняет ранг k. Заметим, что для вещественной матрицы F представление (8) совпадает с SSS-разложением. Поэтому нормальная матрица F удовлетворяет условиям теоремы 2 и, согласно предложению 1, может быть преобразована в свою блочно-трехдиагональную форму H посредством вещественного ортогонального подобия. Но вещественные ортогональные подобия совпадают с ортогональными конгруэнциями. Итак, A и H унитарно конгруэнтны. Остается заметить, что порядки диагональных блоков в H стабилизируются на значении 1, начиная с $i = k + 1$.

Матрица A из теоремы 8 не является сопряженно-нормальной, поэтому теорему 11 следует применять к ее симметричной компоненте S. Пусть унитарная конгруэнция

$$S \longrightarrow \tilde{S} = Q^T S Q \tag{21}$$

превращает S в вещественную нормальную матрицу $\tilde{S}$. Поскольку конгруэнции сохраняют симметрию, $\tilde{S}$ в действительности является вещественной симметричной матрицей. (Здесь уместно вспомнить классическую теорему Такаги (см. [11, раздел 4.4.4]), согласно которой Q в (21) можно выбрать так, чтобы $\tilde{S}$ была диагональной матрицей с неотрицательными диагональными элементами.)

Применим конгруэнцию (21) ко всей матрице $A = S + K$:

$$\tilde{A} = Q^T A Q = Q^T S Q + Q^T K Q = \tilde{S} + \tilde{K}.$$

Кососимметричная матрица $\tilde{K}$ сохраняет ранг k. Если бы при этом она была вещественной, то к вещественной матрице $\tilde{A}$ можно было бы применить аналог предложения 1. Тогда все рассуждения в доказательстве теоремы 10 (с заменой ссылки на теорему 2 ссылкой на теорему 3) можно было бы повторить и здесь. В результате оценку $2k+1$ для порядков диагональных блоков можно было бы заменить на $k+1$. Повторим, что условием для этого является возможность овеществления матриц S и K посредством одной и той же унитарной конгруэнции.

В теореме 9 имеется сопряженно-нормальная матрица N. Пусть, в соответствии с теоремой 11, конгруэнция

$$N \longrightarrow \tilde{N} = Q^T N Q \tag{22}$$

преобразует N в вещественную нормальную матрицу $\tilde{N}$. Применим конгруэнцию (22) ко всей матрице $A = N + R$:

$$\tilde{A} = Q^T A Q = Q^T N Q + Q^T R Q = \tilde{N} + \tilde{R}.$$

Матрица $\tilde{R}$ сохраняет ранг k. Если бы при этом она была вещественной, то к вещественной матрице $\tilde{A}$ можно было бы применить аналог предложения 1. Далее можно было бы повторить рассуждения теоремы 10 (с заменой ссылки на теорему 2 ссылкой на теорему 5). В результате оценку $\breve{\delta}$ для порядков диагональных блоков можно было бы заменить на $\hat{\delta}$. Условием справедливости этой аргументации является возможность овеществления матриц N и R посредством одной и той же унитарной конгруэнции.

В заключение хочу выразить благодарность М. Гасеми Камалванду, численные эксперименты которого с методом MINRES-CN заставили автора вначале предположить, а затем обосновать неадекватность оценки на момент начала стабилизации в теореме 7.

Литература

1. М. Дана, А. Г. Зыков, Х. Д. Икрамов, *Метод минимальных невязок для специального класса линейных систем с нормальными матрицами коэффициентов.* — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **45** (2005), 1928–1937.
2. L. Elsner, Kh. D. Ikramov, *On a condensed form for normal matrices under finite sequences of elementary unitary similarities.* — Linear Algebra Appl. **254** (1997), 79–98.
3. М. Дана, Х. Д. Икрамов, *Еще раз о решении систем линейных уравнений, матрицы которых являются малоранговыми возмущениями эрмитовых матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **334** (2005), 68–77.

4. Х. Д. Икрамов, Л. Эльзнер, *О матрицах, допускающих унитарное приведение к ленточному виду.* — Мат. заметки **64** (1998), 871–880.
5. М. Гасеми Камалванд, Х. Д. Икрамов, *Малоранговые возмущения нормальных и сопряженно-нормальных матриц и их компактные формы относительно унитарных подобий и конгруэнций.* — Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15 “Вычисл. математика и кибернетика,” No. 3 (2009), 5–11.
6. A. Bunse-Gerstner, R. Stöver, *On a conjugate-gradient type method for solving complex symmetric linear systems.* — Linear Algebra Appl. **287** (1999), 105–123.
7. М. Гасеми Камалванд, Х. Д. Икрамов, *Об одном методе конгруэнтного типа для линейных систем с сопряженно-нормальными матрицами коэффициентов.* — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **49** (2009), 211–224.
8. Х. Д. Икрамов, *О приведении комплексных матриц к компактным формам посредством унитарных конгруэнций.* — Мат. заметки **82** (2007), 550–559.
9. М. Гасеми Камалванд, Х. Д. Икрамов, *Малоранговые возмущения симметричных матриц и их компактные формы относительно унитарных конгруэнций.* — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **49** (2009), 595–600.
10. H. Fassbender, Kh. D. Ikramov, *Some observations on the Youla form and conjugate-normal matrices.* — Linear Algebra Appl. **422** (2007), 29–38.
11. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.

Ikramov Kh. D. Improved bounds for the recursion width in congruent type methods for solving systems of linear equations.

The iterative method MINRES-CN is examined as a tool for solving systems of linear equations whose coefficient matrices are low-rank perturbations of symmetric and conjugate-normal matrices. Certain possibilities of improving a priori bounds for the recursion width in this method are indicated.

Московский государственный университет
ГСП-1, Ленинские горы,
19991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 10 июня 2009 г.