Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

Х. Д. Икрамов

О ПРОВЕРКЕ УНИТАРНОЙ КОНГРУЭНТНОСТИ ПСЕВДОИНВОЛЮЦИЙ, КОСЫХ ПСЕВДОИНВОЛЮЦИЙ И ПСЕВДОНИЛЬПОТЕНЦИЙ ИНДЕКСА ДВА

1. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно подобны, если подобие между ними можно осуществить посредством унитарной матрицы U:

$$B = U^* AU. \tag{1}$$

Проверить, что A и B унитарно подобны, можно с помощью классического критерия Шпехта (см., например, [1]).

Критерий Шпехта. Матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \tag{2}$$

для любого слова $W(s, t)$ от некоммутирующих переменных s и t.

Критерий Шпехта неэффективен, поскольку сводится к проверке бесконечного множества условий (2). Пирси (см. [2]) придал ему эффективную форму, показав, что для $n \times n$-матриц A и B проверку равенств (2) можно ограничить словами длины, не превосходящей 2^{n^2}. Однако и такая проверка при сколько-нибудь значительном n требует огромной вычислительной работы.

Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ конгруэнтны, если $B = S^T AS$ для некоторой невырожденной матрицы S. Если конгруэнцию между A и B можно осуществить посредством унитарной матрицы U, т.е.

$$B = U^T AU, \tag{3}$$

то говорят, что A и B унитарно конгруэнтны.

В отличие от ситуации с унитарным подобием, в настоящее время не известен никакой (даже неэффективный) критерий унитарной конгруэнтности для матриц общего вида. Рассмотрим, например, следующий результат из [3].

Ключевые слова : унитарные подобия, унитарные конгруэнции, псевдоинволюции, косые псевдоинволюции, псевдонильпотентные матрицы.

Теорема 1. *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда существует унитарная матрица V такая, что*

$$BB^* = V^*(AA^*)V, \quad B\bar{B} = V^*(A\bar{A})V, \quad B^T\bar{B} = V^*(A^T\bar{A})V.$$

Унитарное подобие для каждой из пар (AA^*, BB^*), $(A\bar{A}, B\bar{B})$, $(A^T\bar{A}, B^T\bar{B})$ можно проверить, пользуясь критерием Шпехта–Пирси. Однако не видно способа для проверки того, что все эти три унитарные подобия могут быть осуществлены с помощью одной и той же унитарной матрицы V.

Предположим, что о матрицах A и B известно, что они не вполне произвольны, а принадлежат некоторому специальному матричному классу. В этом случае унитарное подобие между A и B можно иногда проверить значительно экономичней, чем прибегая к критерию Шпехта–Пирси. Матричный класс, наиболее близкий к тематике данной статьи, – это матрицы с квадратичными минимальными многочленами. В [4] показано, что матрицы A и B из этого класса унитарно подобны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же собственные значения и сингулярные числа (с учетом кратностей тех и других). Совпадение собственных значений и сингулярных чисел можно проверить, сравнивая $2n$ следов

$$\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} A^2, \dots \operatorname{tr} A^n$$

и

$$\operatorname{tr}(A^*A), \operatorname{tr}(A^*A)^2, \dots, \operatorname{tr}(A^*A)^n$$

с $2n$ следами того же вида, вычисленными для матрицы B. (Еще более экономичный способ указан Ю. А. Альпиным в [5].)

Всякая матрица с квадратичным минимальным многочленом удовлетворяет уравнению вида

$$X^2 + \beta X + \gamma I = 0. \tag{4}$$

Аналогом этого уравнения в теории унитарных конгруэнций является уравнение

$$\alpha X\overline{X} + \gamma I = 0, \qquad \alpha \neq 0, \tag{5}$$

а не, казалось бы, более близкое к (4) уравнение

$$\alpha X\overline{X} + \beta X + \gamma I = 0. \tag{6}$$

Дело в том, что, в отличие от (5), уравнение (6) не сохраняет своего вида при унитарных конгруэнциях, применяемых к матрице X.

Деля (5) на α, запишем это уравнение в виде

$$X\overline{X} = \delta I. \tag{7}$$

Заметим, что число δ в правой части обязано быть вещественным. В самом деле, если матрица вида $X\overline{X}$ имеет невещественное собственное значение δ, то она должна иметь и собственное значение $\overline{\delta}$ той же кратности (см. [1, §4.6, задача 5]) и, следовательно, никак не может быть скалярной матрицей δI.

Матрицы A, решающие уравнение (7) при некоторых конкретных значениях δ, имеют специальные названия. Так, при $\delta = 1$ получаем псевдоинволютивные матрицы (coninvolutions; см. [6]), а случаю $\delta = -1$ соответствуют косые псевдоинволюции (skew-coninvolutory matrices; см. [7]). При $\delta = 0$ уравнение (7) является аналогом уравнения $X^2 = 0$, описывающего нильпотентные матрицы индекса два. По этой причине решения уравнения $X\overline{X} = 0$ будем называть псевдонильпотентными матрицами индекса два.

Цель настоящего сообщения – указать экономичный критерий унитарной конгруэнтности двух решений уравнения (7), основанный на следующем предложении.

Теорема 2. *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, решающие уравнение* (7) *при одном и том же $\delta \in \mathbf{R}$, унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же сингулярные числа (с учетом кратностей).*

Теорема 2 является немедленным следствием теорем о канонических формах псевдоинволюций, косых псевдоинволюций и псевдонильпотенций индекса два относительно унитарных конгруэнций. Мы напоминаем эти теоремы в разделе 2. В разделе 3 формулируется критерий унитарной конгруэнтности, основанный на теореме 2.

2. Пусть вначале $\delta = 0$.

Теорема 3. *Псевдонильпотентная матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$, имеющая индекс два и ранг $r < \frac{n}{2}$, посредством подходящей унитарной конгруэнции может быть приведена к прямой сумме нулевой матрицы порядка $d = n - 2r$ и 2×2-блоков*

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, r. \tag{8}$$

Числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ суть ненулевые сингулярные числа матрицы A.

Доказательство теоремы 3 можно найти в [8, раздел 3.1].

Предположим теперь, что $\delta > 0$. Матрица A, решающая уравнение (7) с таким δ, может иметь или не иметь сингулярное число $\sqrt{\delta}$. Пусть m – кратность этого сингулярного числа. Все прочие сингулярные числа можно разбить на пары

$$(\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}), \tag{9}$$

где

$$\tilde{\gamma} > \sqrt{\delta}, \qquad \hat{\gamma} = \frac{\delta}{\tilde{\gamma}} < \sqrt{\delta}. \tag{10}$$

Таким образом, A всегда имеет четное количество сингулярных чисел, отличающихся от $\sqrt{\delta}$.

Теорема 4. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$, решающая уравнение (7) с $\delta > 0$, посредством подходящей унитарной конгруэнции может быть приведена к прямой сумме скалярной матрицы $\sqrt{\delta} I_m$ и 2×2-блоков*

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \frac{\delta}{\gamma_i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, r. \tag{11}$$

Здесь m – кратность $\sqrt{\delta}$ как сингулярного числа матрицы A,

$$r = \frac{n-m}{2}$$

и каждое из чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ больше, чем $\sqrt{\delta}$.

Доказательство теоремы 4 при $\delta = 1$ можно найти в [6]. Ситуация, когда $\delta > 0$, но $\delta \neq 1$, легко сводится к случаю $\delta = 1$ (об этом см. [8, раздел 3.2]).

Пусть, наконец, $\delta < 0$. Отрицательные собственные значения матрицы вида $X\overline{X}$ всегда имеют четную кратность (см. [1, § 4.6, задача 7]). Поэтому в рассматриваемом случае матрица A, решающая уравнение (7), должна иметь четный порядок. У нее может быть (а может и не быть) сингулярное число $\sqrt{|\delta|}$. Если такое число есть, то его кратность $m = 2s$ необходимо четная. Все прочие сингулярные числа можно разбить на пары вида (9), где $\tilde{\gamma}$ и $\hat{\gamma}$ удовлетворяют соотношениям (10) с δ, замененным на $|\delta|$.

Теорема 5. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$, решающая уравнение (7) с $\delta < 0$, посредством подходящей унитарной конгруэнции может быть приведена к прямой сумме s кососимметричных 2×2-блоков вида*

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{|\delta|} \\ -\sqrt{|\delta|} & 0 \end{pmatrix}$$

и 2×2-блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \frac{\delta}{\gamma_i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, r.$$

Здесь $m = 2s$ есть кратность сингулярного числа $\sqrt{|\delta|}$ матрицы A,

$$r = \frac{n-m}{2}$$

и каждое из чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ больше, чем $\sqrt{|\delta|}$.

Доказательство теоремы 5 при $\delta = -1$ можно найти в [7]. Ситуация, когда $\delta < 0$, но $\delta \neq -1$, легко сводится к случаю $\delta = -1$ (об этом см. [8, раздел 3.3]).

3. Теорема 2 обосновывает следующий легко проверяемый критерий унитарной конгруэнтности двух решений уравнения (7).

Теорема 6. *Матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, решающие уравнение (7) при одном и том же δ, унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{tr}(A^*A)^k = \operatorname{tr}(B^*B)^k, \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{12}$$

Действительно, равенства (12) дают необходимое и достаточное условие для того, чтобы матрицы A^*A и B^*B имели один и тот же характеристический многочлен, иначе говоря, для того, чтобы A и B имели одни и те же сингулярные числа.

В заключение отметим, что если $n \times n$-матрица A удовлетворяет уравнению (7), то соответствующее число δ можно найти, вычисляя еще один след, а именно

$$\delta = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(A\overline{A}).$$

Литература

1. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
2. C. Pearcy, *A complete set of unitary invariants for operators generating finite* W^**-algebras of type* I. — Pacific J. Math. **12** (1962), 1405–1416.
3. Y. Hong and R. A. Horn, *A characterization of unitary congruence.* — Linear and Multilinear Algebra **25** (1989), 105–119.
4. A. George, Kh. D. Ikramov, *Unitary similarity of matrices with quadratic minimal polynomials.* — Linear Algebra Appl. **349** (2002), 11–16.
5. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Об унитарном подобии алгебр, порождаемых парами ортопроекторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 5–14.
6. R. A. Horn, D. I. Merino, *A real-coninvolutory analog of the polar decomposition.* — Linear Algebra Appl. **190** (1993), 209–227.
7. M. N. M. Abara, D. I. Merino, A. T. Paras, *Skew-coninvolutory matrices.* — Linear Algebra Appl. **426** (2007), 540–557.
8. Х. Д. Икрамов, Х. Фассбендер, *Квадратично-нормальные и конгруэнтно-нормальные матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 45–66.

Ikramov Kh. D. Verifying unitary congruence of coninvolutions, skew-coninvolutions, and connilpotent matrices of index two.

It is shown that $n \times n$ solutions A and B of the matrix equation

$$X\overline{X} = \delta I,$$

where δ is one and the same scalar for both matrices, are unitarily congruent if and only if

$$\operatorname{tr}(A^*A)^k = \operatorname{tr}(B^*B)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Московский государственный университет
ГСП-1, Ленинские горы,
19991 Москва, Россия

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 3 февраля 2009 г.