Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

Ю. К. Демьянович, О. М. Косогоров

СПЛАЙНЫ И БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Введение

Сплайны и сплайн-вэйвлетные разложения постоянно находятся в центре внимания исследователей (см. [1–4] и имеющуюся там литературу). Предлагаемая работа лежит в русле исследований по сплайнам и сплайн-вэйвлетным разложениям, выводимым из аппроксимационных соотношений, см. [5–7]. В этих работах рассматривались сплайны лагранжева типа на открытом интервале (α, β), определяемые бесконечной сеткой X, бесконечной цепочкой векторов $\mathbf{A}$ и вектор-функцией $\varphi(t)$, заданной на (α, β). Вектор-функциям $\varphi(t)$ с полиномиальными компонентами соответствовали пространства полиномиальных сплайнов, а при определенном выборе цепочки $\mathbf{A}$ (в зависимости от априори заданных X и $\varphi(t)$) получались пространства гладких сплайнов. Все упомянутые пространства бесконечномерны, что не всегда удобно для численной реализации.

В данной работе строятся координатные сплайны на отрезке $[a, b]$, даются некоторые реализации соответствующей им биортогональной системы и строятся конечномерные пространства (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов класса C^1. Конечномерность упомянутых пространств позволяет получить сплайн-вэйвлетное разложение на отрезке $[a, b]$ с помощью сужения рассматриваемых функций с интервала (α, β) на отрезок $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

2. О представлениях (X, A, φ)-сплайнов

2.1. На интервале (α, β) вещественной оси $\mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку

$$X: \ \cdots x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots,$$

где $\alpha = \lim\limits_{j\to-\infty} x_j$, $\beta = \lim\limits_{j\to+\infty} x_j$ (случаи $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ не исключаются).

Ключевые слова : сплайны, вэйвлеты, биортогональные системы, аппроксимационные соотношения.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 04-01-00451 и 04-01-00269 .

Каждому $j \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие вектор-столбец $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$ и введем квадратную матрицу третьего порядка $A_j \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$.

Определение 1. *Бесконечная цепочка векторов* $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *называется полной, если* $\det A_j \neq 0 \ \forall j \in \mathbb{Z}$.

Множество всех бесконечных полных цепочек обозначим $\mathbb{A}_\infty$.

Пусть цепочка $\mathbf{A}$ лежит в $\mathbb{A}_\infty$, а $\varphi(t)$ – трехкомпонентная вектор-функция, которая задана на интервале (α, β) и компоненты которой линейно независимы на любом подинтервале (c, d) интервала (α, β).

Координатными $(X, \mathbf{A}, \varphi)$-сплайнами второго порядка называются функции $\omega_j(t)$, удовлетворяющие аппроксимационным соотношениям

$$\sum_j \mathbf{a}_j \omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \quad \operatorname{supp}\ \omega_j \subset [x_j, x_{j+3}].$$

Этим соотношениям можно придать вид

$$\mathbf{a}_{k-2}\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1}\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k\omega_k(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (x_k, x_{k+1}), \tag{2.1}$$

где

$$\operatorname{supp}\ \omega_j \subset [x_j, x_{j+3}]. \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Если* $\mathbf{A} \in \mathbb{A}_\infty$, *то из соотношений* (2.1)–(2.2), *рассматриваемых при всех* $k \in \mathbb{Z}$, *однозначно определяются сплайны* $\omega_j(t)$:

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)} \qquad \textit{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{2.3}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \varphi(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})} \qquad \textit{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{2.4}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{a}_{j+2})} \qquad \textit{при} \quad t \in (x_{j+2}, x_{j+3}), \tag{2.5}$$

$$\omega_j(t) = 0 \qquad \textit{при} \quad t \notin [x_j, x_{j+3}], \tag{2.6}$$

где $j \in \mathbb{Z}$ *и* $t \in (\alpha, \beta)\backslash X$.

Доказательство. Из условий (2.1)–(2.2) находим

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)}, \quad \omega_{k-1}(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \varphi(t), \mathbf{a}_k)}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)},$$

$$\omega_k(t) = \frac{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \varphi(t))}{\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_k)},$$

откуда однозначно выводится представление (2.3)–(2.6) функции ω_j для указанных в теореме j и t. $\square$

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{A}_\infty$. Линейная оболочка $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi)$ функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется пространством сплайнов второго порядка на сетке X:

$$\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Big\{ u \mid u = \sum_j c_j \omega_j \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}.$$

Нетрудно видеть, что для вектора

$$\mathbf{d}_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\det \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{k-2}]_1 & [\mathbf{a}_{k-1}]_1 \\ [\mathbf{a}_{k-2}]_2 & [\mathbf{a}_{k-1}]_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{k-2}]_0 & [\mathbf{a}_{k-1}]_0 \\ [\mathbf{a}_{k-2}]_2 & [\mathbf{a}_{k-1}]_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} [\mathbf{a}_{k-2}]_0 & [\mathbf{a}_{k-1}]_0 \\ [\mathbf{a}_{k-2}]_1 & [\mathbf{a}_{k-1}]_1 \end{pmatrix} \right)^T$$

справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-3} \neq 0, \quad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-2} = \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j-1} = 0, \quad \mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j \neq 0 \tag{2.7}$$

(первое и последнее соотношения следуют из полноты цепочки, а второе и третье очевидны).

Таким образом, цепочка векторов $\mathbf{d}_j$ локально ортогональна[1] цепочке $\mathbf{a}_j$.

Умножая (2.1) на $\mathbf{d}_k^T$ слева, ввиду (2.7) находим

$$\omega_k(t) = \frac{\mathbf{d}_k^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k}. \tag{2.8}$$

При умножении (2.1) слева на $\mathbf{d}_{k-1}^T$ имеем

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}} \frac{\mathbf{d}_k^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k}. \tag{2.9}$$

[1] Цепочка $\{\mathbf{d}_i\}$ ненулевых векторов пространства $\mathbb{R}^3$ называется локально ортогональной цепочке $\{\mathbf{a}_j\}$, если существует фиксированное число $s \in \mathbb{Z}$ такое, что справедливы соотношения $\mathbf{d}_{j+s}^T \mathbf{a}_{j-2} = \mathbf{d}_{j+s}^T \mathbf{a}_{j-1} = 0$ при тех j, при которых определены векторы, входящие в эти соотношения (см. [6]).

Наконец, умножая слева обе части соотношения (2.1) на $\mathbf{d}_{k-2}$ и используя предыдущие формулы, получаем

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k-2}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-2}} - \frac{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-2}}\left(\frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k}}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}}\cdot\frac{\mathbf{d}_{k}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k}^T\mathbf{a}_{k}}\right) - \frac{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{d}_{k-2}^T\mathbf{a}_{k-2}}\cdot\frac{\mathbf{d}_{k}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k}^T\mathbf{a}_{k}}. \tag{2.10}$$

Заметим, что отыскание функций ω_j можно проводить в последовательности ω_{k-2}, ω_{k-1}, ω_k; при этом получается другая форма представления этих функций. Умножение обеих частей соотношения (2.1) на $\mathbf{d}_{k+1}^T$ дает

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}. \tag{2.11}$$

Умножая (2.1) на $\mathbf{d}_{k+2}^T$ слева, ввиду предыдущего имеем

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}}\,\frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}. \tag{2.12}$$

Наконец, умножая слева обе части соотношения (2.1) на $\mathbf{d}_{k+3}$, получаем

$$\omega_{k}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+3}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k}} - \frac{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k-1}}{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k}}\left(\frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k+2}^T\mathbf{a}_{k-1}}\,\frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}\right) - \frac{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k-2}}{\mathbf{d}_{k+3}^T\mathbf{a}_{k}}\cdot\frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}. \tag{2.13}$$

Из (2.8)–(2.13) легко вывести следующее утверждение.

Теорема 2. *Для функций ω_j, $j = k-2, k-1, k$, на промежутке (x_k, x_{k+1}) справедливы представления*

$$\omega_{k-2}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}}, \tag{2.14}$$

$$\omega_{k-1}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}} - \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k}}{\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}}\,\frac{\mathbf{d}_{k}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k}^T\mathbf{a}_{k}}, \tag{2.15}$$

$$\omega_{k}(t) = \frac{\mathbf{d}_{k}^T\varphi(t)}{\mathbf{d}_{k}^T\mathbf{a}_{k}}, \tag{2.16}$$

причем каждое из них зависит лишь от векторов $\mathbf{a}_{k-2}$, $\mathbf{a}_{k-1}$, $\mathbf{a}_k$.

Доказательство. Доказываемые формулы являются одним из вариантов, представленных в формулах (2.8)–(2.13). Их зависимость разве лишь от перечисленных в теореме векторов очевидна, ибо при фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1})$ они представляют собой решение системы линейных уравнений (2.1). □

Замечание. Сравнение представлений (2.8)–(2.10) и (2.11)–(2.13) приводит к определенным детерминантным тождествам; здесь на них останавливаться не будем.

Теорема 3. *Для функции* ω_j *справедливы представления*

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} \qquad \text{при} \quad t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{2.17}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} - \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j} \frac{\mathbf{d}_{j+1}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}} \quad \text{при} \quad t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{2.18}$$

$$\omega_j(t) = \frac{\mathbf{d}_{j+3}^T \varphi(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j} \qquad \text{при} \quad t \in (x_{j+2}, x_{j+3}). \tag{2.19}$$

Координатная функция $\omega_j(t)$ *определяется узлами* x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3} *и векторами* $\mathbf{a}_{j-2}$, $\mathbf{a}_{j-1}$, $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_{j+1}$, $\mathbf{a}_{j+2}$.

Доказательство. Представления (2.17)–(2.19) очевидным образом вытекают из формул (2.14)–(2.16), где следует взять $k = j$, $j+1$, $j+2$. Зависимость от перечисленных узлов очевидна, а зависимость от указанных в теореме векторов получается из предыдущей теоремы (при $k = j$, $j+1$, $j+2$). □

Теорема 4. *Пусть вектор-функция* $\varphi(t)$ s*-кратно кусочно дифференцируема на интервале* (α, β) *и ее* s*-я производная может быть продолжена на интервал* (α, β) *непрерывным образом. Для того, чтобы* s*-ю производную функции* $\omega_j(t)$ *можно было продолжить на* (α, β) *непрерывным образом, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det(\mathbf{a}_{k-2}, \mathbf{a}_{k-1}, \varphi^{(s)}(x_k)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.20}$$

Доказательство эквивалентности соотношений (2.20) и s-кратной дифференцируемости $\omega_j(t)$ аналогично доказательству, приведенному в [6]. □

Замечание. Если $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, то ω_j – полиномиальный сплайн второй степени с носителем $\operatorname{supp} \omega_j = [x_j, x_{j+3}]$.

2.2. Из бесконечной сетки X выделим конечную сетку X_N,

$$X_N : x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N,$$

а из полной бесконечной цепочки $\mathbf{A}$ выделим конечную цепочку векторов $\mathbf{A}_N$,

$$\mathbf{A}_N = \{\mathbf{a}_{-2}, \mathbf{a}_{-1}, \ldots, \mathbf{a}_{N-1}\}.$$

Введем обозначения

$$a \overset{\text{def}}{=} x_0, \quad b \overset{\text{def}}{=} x_N, \quad J_s \overset{\text{def}}{=} \{-2, -1, 0, \ldots, s\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Сузим все функции пространства $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi)$ на множество $[a,b]\backslash X$. Совокупность этих сужений представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}_{[a,b]}(X_N, \mathbf{A}_N, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \Big\{u \mid u = \sum_{j \in J_{N-1}} c_j \omega_j \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1, \ j \in J_{N-1}\Big\}.$$

Для измеримого (по Лебегу) множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^1$ обозначим $\operatorname{mes}(\mathcal{M})$ его лебегову меру.

Определение 2. *Пусть система $\{f_j\}$ состоит из функций $f_j(t)$, заданных почти всюду на промежутке (α, β) и пусть $[a,b] \subset (\alpha, \beta)$. Система функций $\{f_j \mid \operatorname{mes}(\operatorname{supp} f_j \cap (a,b)) > 0\}$ называется сужением системы $\{f_j\}$ на промежуток $[a,b]$.*

Теорема 5. *Пусть цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ полная, а компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ представляют собой линейно независимую систему функций на любом интервале $(c,d) \subset (\alpha,\beta)$. Тогда сужение системы функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ на любой интервал $(c,d) \subset (\alpha,\beta)$ является линейно независимой системой на упомянутом интервале.*

Доказательство. Из полноты цепочки $\{\mathbf{a}_j\}_{j\in Z}$ следует однозначная разрешимость аппроксимационных соотношений (2.1)–(2.2), а из линейной независимости компонент правой части – линейная независимость системы функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. $\square$

Для дальнейших построений кроме векторов цепочки $\mathbf{A}$ потребуется привлечь еще и векторы $\mathbf{a}_{-5}$, $\mathbf{a}_{-4}$, $\mathbf{a}_{-3}$, $\mathbf{a}_N$, $\mathbf{a}_{N+1}$, $\mathbf{a}_{N+2}$; заметим, что благодаря полноте[2] бесконечной цепочки $\mathbf{A}$ конечная

[2] Можно не использовать бесконечную цепочку $\mathbf{A}$, а ограничиться вводимой ниже цепочкой $\mathbf{A}'$

цепочка векторов $\mathbf{A}' \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_{-5}, \mathbf{a}_{-4}, \dots, \mathbf{a}_{N+2}\}$ обладает свойством $\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0 \ \forall j \in \{-3, -2, \dots, N+2\}$.

Теперь построим цепочку $\{\mathbf{d}_j\}$, полагая

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{x}), \quad \text{где} \quad j = -3, -2, \dots, N, N+1, N+2.$$

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 сужения функций ω_j образуют линейно независимую систему на $[a,b]$, для них справедливы формулы (2.8)–(2.13) при $(x_k, x_{k+1}) \subset [a,b]$, а также справедливы заключения теорем 2 и 3; кроме того, $\dim \mathbb{S}_{[a,b]}(X_N, \mathbf{A}_N, \varphi) = N+2$.*

Доказательство получается из определения сужения системы функций и из определения пространства $\mathbb{S}_{[a,b]}(X_N, \mathbf{A}_N, \varphi)$ применением теоремы 5. □

Теорема 7. *Функция $u_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=-2}^{N-1} c_j \omega_j(t)$, $t \in [a,b]$, является следом функции $u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j c_j \omega_j$ на отрезке $[a,b]$, лежит в пространстве $\mathbb{S}_{[a,b]}(X_N, \mathbf{A}_N, \varphi)$ и полностью определяется набором узлов $\{x_j\}_{j \in \{0,1,\dots,N\}}$, набором векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{N-1}}$ и набором коэффициентов $\{c_j\}_{j \in J_{N-1}}$.*

Доказательство очевидным образом вытекает из теоремы 2. □

3. Биортогональная система функционалов и ее реализации

3.1. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ полная, а компоненты вектор-функции $\varphi(t)$ представляют собой линейно независимую систему функций на любом интервале $(c,d) \subset (\alpha, \beta)$. Тогда для того, чтобы система функционалов $\{g_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ была биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ (а именно, $\langle g_i, \omega_j \rangle = \delta_{i,j}$ $i,j \in \mathbb{Z}$), необходимо и достаточно, чтобы $\langle g_i, \varphi \rangle = \mathbf{a}_i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Поскольку условия теоремы 5 выполнены, то система $\{\omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ линейно независимая, а значит существует биортогональная ей система функционалов. Теперь доказываемое утверждение легко получается применением функционалов этой системы к аппроксимационным соотношениям. □

Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{B}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{B}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{B}$. Значение функционала f на элементе

$v \in \mathfrak{V}$ обозначается $\langle f, v\rangle$. Множество трехкомпонентных векторов-столбцов $\mathbf{u}$ с компонентами $[\mathbf{u}]_i$, $i = 0, 1, 2$, из пространства $\mathfrak{V}$ обозначим $\mathfrak{V}^3$. Будем рассматривать также трехкомпонентные вектор-столбцы $\mathbf{f}$, компоненты $[\mathbf{f}]_j$ которых лежат в пространстве $\mathfrak{V}^*$, $j = 0, 1, 2$; образуемое этими векторами линейное пространство обозначим $\mathfrak{V}^{*3}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{f} \in \mathfrak{V}^{*3}$ и $\mathbf{v} \in \mathfrak{V}^3$ таковы, что матрица $\mathbf{f}\mathbf{v}^T$ неособенная; пусть вектор $\mathbf{u} \in \mathfrak{V}^3$ удовлетворяет соотношению*

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}, \tag{3.1}$$

где A – неособенная квадратная числовая матрица. Тогда система из компонентов $[\mathbf{l}]_r$, $r = 0, 1, 2$, вектора $\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}$ представляет собой систему функционалов, биортогональную к системе элементов $[\mathbf{u}]_i$, $i = 0, 1, 2$, так что $\mathbf{l}\mathbf{u}^T = I$, где I – единичная матрица третьего порядка.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T$; поскольку из (3.1) следует соотношение $\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{v}$, то из определения вектора $\mathbf{l}$ находим

$$\begin{aligned}\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T &= A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{u}^T = A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}(A^{-1}\mathbf{v})^T \\ &= A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{v}^T(A^{-1})^T = I,\end{aligned}$$

где I – единичная матрица четвертого порядка. Итак, получено соотношение $\mathbf{l}\,\mathbf{u}^T = I$. □

Замечание. Очевидно, что $\mathbf{l}\,\mathbf{v}^T = A^T$; действительно,

$$\mathbf{l}\,\mathbf{v}^T = A^T(\mathbf{f}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{f}\mathbf{v}^T = A^T.$$

3.2. В дальнейшем потребуется линейное пространство $C\langle c, d\rangle$, состоящее из функций $u(t)$ пространства $C(c, d)$, которые имеют конечные пределы $\lim\limits_{t\to c+0} u(t)$ и $\lim\limits_{t\to d-0} u(t)$. Введем также пространства

$$\mathbb{C}_X \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{k\in\mathbb{Z}} C\langle x_k, x_{k+1}\rangle, \quad \mathbb{C}_X^S \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in \mathbb{C}_X, \ \ \forall i = 0, 1, \ldots, S\}.$$

Символом $(\mathbb{C}_X^S)^*$ обозначается пространство, сопряженное к пространству $\mathbb{C}_X^S$. При $\varphi \in \mathbb{C}^S(\alpha, \beta)$ пространства $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \varphi)$ лежат в пространстве $\mathbb{C}_X^S$.

Для функционала $f \in (\mathbb{C}_X^S)^*$ будем писать $\operatorname{supp} f \subset [c, d]$, если значение $\langle f, u\rangle$ определяется значениями функции $u \in \mathbb{C}_X^S$ на интервале (c, d).

Теорема 9. *Пусть* $\varphi \in \mathbb{C}_X^S$, $\mathbf{A} \in \mathbb{A}_\infty$ *и для каждого фиксированного* $k \in \mathbb{Z}$ *определен вектор-столбец* $\mathbf{f}_k$, *компонентами которого служат функционалы* $[\mathbf{f}_k]_i \in (\mathbb{C}_X^S)^*$, $i = 0,1,2$, *такие, что* $\operatorname{supp}[\mathbf{f}_k]_i \subset [x_k, x_{k+1}]$. *Пусть матрица* $\mathbf{f}_k\varphi^T$ *со столбцами вида*

$$\Big(\langle[\mathbf{f}_k]_0,[\varphi]_i\rangle, \langle[\mathbf{f}_k]_1,[\varphi]_i\rangle, \langle[\mathbf{f}_k]_2,[\varphi]_i\rangle\Big)^T,$$

$i = 0,1,2$, *неособенная. Тогда при каждом фиксированном* $r \in \{0,1,2\}$ *система* $\{g_{\langle r\rangle}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *функционалов* $g_{\langle r\rangle}^{(k)} \in (\mathbb{C}_X^S)^*$, *определяемых равенствами*

$$g_{\langle r\rangle}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \Big[A_{k-r+2}^T\Big(\mathbf{f}_{k-r+2}\varphi^T\Big)^{-1}\mathbf{f}_{k-r+2}\Big]_r, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

представляет собой продолжение на $\mathbb{C}_X^S$ *системы функционалов, биортогональной системе минимальных* $(X,\mathbf{A},\varphi)$*-сплайнов* $\{\omega_{k'}\}_{k'\in\mathbb{Z}}$, *и*

$$\begin{aligned} &\langle g_{\langle r\rangle}^{(k)}, \omega_{k'}\rangle = \delta_{k,k'} \quad \forall k,\ k' \in \mathbb{Z}, \\ &\operatorname{supp} g_{\langle r\rangle}^{(k)} \subset [x_{k-r+2}, x_{k-r+3}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство. Зафиксируем число $k \in \mathbb{Z}$ и для данного $r \in \{0,1,2\}$ применим лемму 1, полагая в ней

$$\mathfrak{B} = C^S\langle x_{k-r+2}, x_{k-r+3}\rangle, \quad A = A_{k-r+2}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_{k-r+2}, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{v} = \varphi, \quad l_r = g_{\langle r\rangle}^{(k)}, \quad u_j = \omega_{k-r+j}, \quad j = 0,1,2. \tag{3.5}$$

Проверим условия леммы. Матрица $\mathbf{f}\mathbf{v}^T$ неособенная, ибо ввиду формул (3.4)–(3.5) $\mathbf{f}\mathbf{v}^T = \mathbf{f}_{k-r+2}\varphi^T$, а матрица $\mathbf{f}_{k-r+2}\varphi^T$ неособенная по условию теоремы. Условие (3.1) выполнено, т.к., согласно упомянутым формулам и тождеству (2.1), оно представляет собой аппроксимационное соотношение, записанное на промежутке (x_{k-r+2}, x_{k-r+3}):

$$\mathbf{a}_{k-r}\omega_{k-r}(t) + \mathbf{a}_{k-r+1}\omega_{k-r+1}(t) + \mathbf{a}_{k-r+2}\omega_{k-r+2}(t) = \varphi(t)$$

$$\forall t \in (x_{k-r+2}, x_{k-r+3}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, $\langle l_r, u_j\rangle = \delta_{r,j}$, $j = 0,1,2$, что ввиду (3.4)–(3.5) может быть переписано в виде $\langle g^{(k)}_{\langle r\rangle}, \omega_{k-r+j}\rangle = \delta_{r,j}$, $j = 0,1,2$; делая здесь замену индекса j на j' по формуле $j' = k - r + j$, находим

$$\langle g^{(k)}_{\langle r\rangle}, \omega_{j'}\rangle = \delta_{r,j'-k+r} = \delta_{j',k}, \quad j' \in \{k-r, k-r+1, k-r+2\}. \tag{3.6}$$

Заметим, что ввиду предположения $r \in \{0,1,2\}$ число k содержится в множестве $\{k-r, k-r+1, k-r+2\}$, так что среди соотношений (3.6) существует одно (и только одно), правая часть которого равна единице; правые части остальных соотношений – нули.

Осталось рассмотреть случай, когда $j' \notin \{k-r, k-r+1, k-r+2\}$. В этом случае носитель функции $\omega_{j'}$ не пересекается с интервалом (x_{k-r+2}, x_{k-r+3}), а поэтому

$$\langle g^{(k)}_{\langle r\rangle}, \omega_{j'}\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j' \notin \{k-r, k-r+1, k-r+2\}. \tag{3.7}$$

Только что установленные соотношения (3.6)–(3.7) доказывают первое из соотношений (3.3); второе соотношение из (3.3) очевидным образом следует из формулы (3.2). □

Введем обозначения

$$\mathcal{W}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t)), \quad W(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det \mathcal{W}(t) \quad \forall t \in (\alpha,\beta)\backslash X.$$

Следствие 1. *Пусть* $\varphi \in \mathbb{C}^2_X$, $\mathbf{A} \in \mathbb{A}_\infty$, $\langle [\mathbf{f}_k]_i, u\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} u^{(i)}(x_k + 0)$, $i = 0,1,2$, *и*

$$W(x_k + 0) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Тогда при каждом фиксированном $\sigma \in \{0,1,2\}$ *функционалы*

$$g_{k\langle\sigma\rangle} \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^{(k)}_{\langle 2-\sigma\rangle} \tag{3.9}$$

обладают свойством

$$\langle g_{k\langle\sigma\rangle}, \omega_{k'}\rangle = \delta_{k,k'} \quad \forall k, \quad k' \in \mathbb{Z}; \tag{3.10}$$

кроме того,

$$\operatorname{supp} g_{k\langle\sigma\rangle} \subset [x_{k+\sigma}, x_{k+\sigma} + \varepsilon] \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Проверим условия теоремы 9. В рассматриваемом случае $S = 2$; очевидны соотношения $[\mathbf{f}_k]_i \in (\mathbb{C}_X^2)^*$ и $\operatorname{supp}[\mathbf{f}_k]_i \subset [x_k, x_{k+1}]$, $i = 0, 1, 2$. Установим, что матрица $\mathbf{f}_k \varphi^T$ неособенная. С учетом условия $\varphi \in \mathbb{C}_X^2$ имеем

$$\mathbf{f}_k \varphi^T = \begin{pmatrix} [\varphi]_0(x_k+0) & [\varphi]_1(x_k+0) & [\varphi]_2(x_k+0) \\ [\varphi]_0'(x_k+0) & [\varphi]_1'(x_k+0) & [\varphi]_2'(x_k+0) \\ [\varphi]_0''(x_k+0) & [\varphi]_1''(x_k+0) & [\varphi]_2''(x_k+0) \end{pmatrix},$$

откуда выводим $\mathbf{f}^{(k)}\varphi^T = [\mathcal{W}(x_k+0)]^T$. Используя предположение (3.8), получаем $\det \mathbf{f}^{(k)}\varphi^T \neq 0$. Из (3.3) с учетом обозначения (3.9) находим (3.10) и (3.11). Следствие доказано. $\square$

3.3. Здесь снова используем линейные пространства $C\langle c, d\rangle$, состоящие из функций $u(t)$ пространства $C(c, d)$, которые имеют конечные пределы $\lim\limits_{t\to c+0} u(t)$ и $\lim\limits_{t\to d-0} u(t)$. Введем еще пространства

$$\mathbb{C}_{X,\,N} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{k\in\{0,1,\dots,N-1\}} C\langle x_k, x_{k+1}\rangle,$$
$$\mathbb{C}_{X,\,N}^S \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{u \mid u^{(i)} \in \mathbb{C}_X, \quad \forall i = 0, 1, \dots, S\Big\}.$$

Символом $(\mathbb{C}_{X,\,N}^S)^*$ обозначается пространство, сопряженное к пространству $\mathbb{C}_{X,\,N}^S$. При $\varphi \in \mathbb{C}^S(\alpha, \beta)$ пространства $\mathbb{S}_{[a,b]}(X_N, \mathbf{A}_N, \varphi)$ лежат в пространстве $\mathbb{C}_{X,\,N}^S$.

Аналогично предыдущему для функционала $f \in (\mathbb{C}_{X,\,N}^S)^*$ будем писать $\operatorname{supp} f \subset [c, d]$, если значение $\langle f, u\rangle$ определяется значениями функции $u \in \mathbb{C}_{X,\,N}^S$ на интервале (c, d).

Выделим из множества функционалов, описанных в следствии 1 из теоремы 9, набор g из $N+2$ функционалов, полагая $g \stackrel{\text{def}}{=} \{g_{-2}, g_{-1}, \dots, g_{N-1}\}$, где

$$\begin{aligned} g_{-2} &\stackrel{\text{def}}{=} g_{-2,\langle 2\rangle}, \quad g_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} g_{-1,\langle 1\rangle}, \\ g_0 &\stackrel{\text{def}}{=} g_{0,\langle 0\rangle}, \quad g_0 \stackrel{\text{def}}{=} g_{1,\langle 0\rangle}, \dots, g_{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} g_{N-1,\langle 0\rangle}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Теорема 10. *Система функционалов $g = \{g_i\}_{i\in J_{N-1}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_j\}_{j\in J_{N-1}}$, и носитель каждого функционала этой системы лежит внутри отрезка $[a, b]$, $\operatorname{supp} g_i \subset [a, b]$, $i \in J_{N-1}$.*

Докательство получается с использованием формул (3.10)–(3.11). $\square$

4. Непрерывно дифференцируемые сплайны

4.1. В дальнейшем будем считать, что компоненты вектора $\varphi(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы на интервале (α, β).

Введем обозначения $\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_k)$, $\varphi'_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(x_k)$, $\varphi''_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi''(x_k)$ и рассмотрим символический определитель

$$\widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \varphi_{j+1} & \varphi'_{j+1} \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Положим $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^\#$, где

$$\mathbf{a}_j^\# \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathbf{a}}(\varphi_{j+1}, \varphi'_{j+1}, \varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}). \quad (4.2)$$

Предполагая, что при любых целых s векторы φ_s и φ'_s линейно независимы, рассмотрим вектор-столбцы $\mathbf{b}_s^T$, определяемые соотношениями $\mathbf{b}_s^T \mathbf{x} \equiv \det(\varphi_s, \varphi'_s, \mathbf{x})$. Очевидно,

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{a}_j^\# = \det \begin{pmatrix} \det(\varphi_s, \varphi'_s, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_s, \varphi'_s, \varphi'_{j+1}) \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) & \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

4.2. Если $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, то $\varphi'(t) = (0, 1, 2t)^T$, и

$$\begin{aligned} \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) &= (\varphi_{j+1} - \varphi_{j+2})^2, \\ \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) &= 2(\varphi_{j+1} - \varphi_{j+2}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Теперь из (4.1) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_j^\# &= \varphi_{j+1} \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) - \varphi'_{j+1} \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1}) \\ &= 2(x_{j+1} - x_{j+2})\varphi_{j+1} - (x_{j+1} - x_{j+2})^2 \varphi'_{j+1}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

итак, имеем

$$\mathbf{a}_j^\# = 2(x_{j+1} - x_{j+2}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x_{j+1} + x_{j+2}}{2} \\ x_{j+1} x_{j+2} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Найдем также выражение $\mathbf{b}_s^T \mathbf{a}_j^\#$ в рассматриваемом полиномиальном случае; ввиду (4.4) и (4.5) из (4.3) имеем

$$\mathbf{b}_s^T \mathbf{a}_j^\# = 2(x_{j+1} - x_s)(x_{j+1} - x_{j+2})(x_{j+2} - x_s), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{b}_s^T \varphi(t) = \det(\varphi_s, \varphi_s, \varphi(t)) = (t - x_s)^2. \quad (4.8)$$

4.3. Возвращаясь к общему случаю, видим, что цепочка $\{\mathbf{b}_s^T\}$ локально ортогональна цепочке векторов $\{\mathbf{a}_j^\#\}$, т.е. $\mathbf{b}_j^T \neq 0$, $\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_{j-2}^\# = \mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_{j-1}^\# = 0\ \forall j \in \mathbb{Z}$. Если выполнено условие

$$|W(t)| \geq c = \mathrm{const} > 0 \quad \forall t \in (\alpha, \beta), \tag{4.9}$$

то при достаточно малом $h_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1} - x_j)$ рассматриваемая в этом пункте цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j^\#\}_{j\in\mathbb{Z}}$, определенная формулами (4.1), полная (см. [1]), а следовательно, применимы формулы пункта 2. Полагая в формулах (2.17)–(2.19) $\mathbf{d}_j = \mathbf{b}_j$ и снабжая получаемые сплайны верхним индексом $^\#$, имеем систему сплайнов $\{\omega_j^\#\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Теорема 11. *Сплайны $\omega_{k-2}^\#$, $\omega_{k-1}^\#$, $\omega_k^\#$ на интервале (x_k, x_{k+1}) могут быть представлены равенствами*

$$\omega_{k-2}^\#(t) = \frac{\mathbf{b}_{k+1}^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_{k+1}^T\mathbf{a}_{k-2}^\#}, \tag{4.10}$$

$$\omega_{k-1}^\#(t) = \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^\#} - \frac{\mathbf{b}_{k-1}^T\mathbf{a}_k^\#}{\mathbf{b}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^\#}\frac{\mathbf{b}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_k^T\mathbf{a}_k^\#}, \tag{4.11}$$

$$\omega_k^\#(t) = \frac{\mathbf{b}_k^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_k^T\mathbf{a}_k^\#}, \tag{4.12}$$

причем их правые части зависят лишь от векторов

$$\varphi_{k-1},\ \ \varphi'_{k-1},\ \ \varphi_k,\ \ \varphi'_k,\ \ \varphi_{k+1},\ \ \varphi'_{k+1},\ \ \varphi_{k+2},\ \ \varphi'_{k+2}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Формулы (4.10)–(4.12) получаются с помощью теоремы 2 с учетом соотношений (4.2) и равенств $\mathbf{d}_j = \mathbf{b}_j$. Согласно упомянутой теореме, правые части этих формул определяются векторами $\mathbf{a}_{k-2}^\#$, $\mathbf{a}_{k-1}^\#$, $\mathbf{a}_k^\#$, которые, в свою очередь, определяются соотношениями (4.2) при $j = k-2, k-1, k$; таким образом, установлена их зависимость от векторов (4.13). □

Теорема 12. *Справедливы формулы*

$$\omega_j^\#(t) = \frac{\mathbf{b}_j^T\varphi(t)}{\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_j^\#} \qquad \text{при} \ \ t \in (x_j, x_{j+1}), \tag{4.14}$$

$$\omega_j^{\#}(t) = \frac{\mathbf{b}_j^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^{\#}} - \frac{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^{\#}}{\mathbf{b}_j^T \mathbf{a}_j^{\#}} \frac{\mathbf{b}_{j+1}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^{\#}} \quad \textit{при} \ \ t \in (x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{4.15}$$

$$\omega_j^{\#}(t) = \frac{\mathbf{b}_{j+3}^T \varphi(t)}{\mathbf{b}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^{\#}} \qquad \textit{при} \ \ t \in (x_{j+2}, x_{j+3}), \tag{4.16}$$

$$\operatorname{supp} \omega_j^{\#} = [x_j, x_{j+3}]. \tag{4.17}$$

Правые части формул (4.14)–(4.17) *определяются векторами*

$$\varphi_s, \ \varphi_s', \quad \text{где} \quad s = j-1, \ j, \ j+1, \ j+2, \ j+3, \ j+4.$$

Доказательство легко вытекает из теоремы 11. □

Сплайны $\omega_j^{\#}$ называются координатными (X, B_φ)-сплайнами второго порядка. Пространство, натянутое на функции $\omega_j^{\#}$, будем обозначать $\mathbb{S}^{\#}(X,\varphi)$,

$$\mathbb{S}^{\#}(X,\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ u \mid u = \sum_j c_j \omega_j^{\#} \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}.$$

Используя теорему 4, нетрудно установить, что сплайны $\omega_j^{\#}$ непрерывно дифференцируемы на интервале (α,β), и потому $\mathbb{S}^{\#}(X,\varphi) \subset C^1(\alpha,\beta)$.

Если выполнено условие (4.9), то, согласно следствию 1, при каждом фиксированном $\sigma \in \{0,1,2\}$ существует система функционалов $\{g_{i\langle\sigma\rangle}^{\#}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ со свойствами

$$\langle g_{i\langle\sigma\rangle}^{\#}, \omega_j^{\#} \rangle = \delta_{i,j}, \quad \operatorname{supp} g_{i\langle\sigma\rangle}^{\#} \subset [x_{i+\sigma}, x_{i+\sigma} + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

4.4. Если $\varphi(t) = (1, t, t^2)^T$, $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^{\#}$, то сплайн ω_j – известный непрерывно дифференцируемый кусочно-квадратичный сплайн. Дальнейшие выкладки в этом пункте приводят к известным формулам и служат для иллюстрации полученных ранее соотношений.

Для отыскания сплайна ω_j воспользуемся формулами (4.14)–(4.17), принимая во внимание ранее полученные соотношения (4.7) и (4.8); в результате находим

$$\omega_j^{\#}(t) = \frac{(t-x_j)^2}{2(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_j)} \quad \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{4.18}$$

$$\omega_j^{\#}(t) = \frac{(t-x_j)^2}{2(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_j)} - \frac{(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+3})(x_{j+3}-x_j)}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_j)} \times \frac{(t-x_{j+1})^2}{2(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+2}-x_{j+3})(x_{j+3}-x_{j+1})} \quad \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \tag{4.19}$$

$$\omega_j^{\#}(t) = \frac{(t-x_{j+3})^2}{(x_{j+1}-x_{j+3})(x_{j+1}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_{j+3})} \quad \text{при} \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}], \tag{4.20}$$

$$\omega_j^{\#}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin [x_j, x_{j+3}], \quad \text{так что} \quad \operatorname{supp} \omega_j^{\#} = [x_j, x_{j+3}]. \tag{4.21}$$

Рассматривая функцию $\omega_j^{\#}(t)$ лишь на промежутке $[x_{j+1}, x_{j+2})$ и приводя к общему знаменателю правую часть в (4.19), находим

$$\omega_j^{\#}(t) = [(t-x_j)^2(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1}) - (t-x_{j+1})^2(x_{j+2}-x_j)(x_{j+3}-x_j)]$$

$$\times[2(x_{j+1}-x_j)(x_{j+1}-x_{j+2})(x_{j+2}-x_j)(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})]^{-1} \quad \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \tag{4.22}$$

В полученном только что выражении применим тождество

$$(t-a)^2(c-b)(d-b) - (t-b)^2(c-a)(d-a)$$

$$\equiv (b-a)[t^2(a+b-c-d) + 2t(cd-ab) + ac(b-d) + bd(a-c)] \tag{4.23}$$

при следующих значениях параметров:

$$a = x_j, \quad b = x_{j+1}, \quad c = x_{j+2}, \quad d = x_{j+3};$$

в этом случае левая часть (4.23) совпадет с числителем правой части (4.22), и после замены на правую часть тождеств (4.23) (с упомянутыми значениями параметров) выражение $b-a = x_{j+1}-x_j$ сократится с таким же выражением в знаменателе. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \omega_j^\#(t) = {} & [t^2(x_j + x_{j+1} - x_{j+2} - x_{j+3}) + 2t(x_{j+2}x_{j+3} - x_j x_{j+1}) \\ & + x_j x_{j+2}(x_{j+1} - x_{j+3}) + x_{j+1}x_{j+3}(x_j - x_{j+2})] \\ & \times [2(x_{j+1} - x_{j+2})(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+3} - x_{j+1})]^{-1} \\ & \qquad \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Теперь обратим внимание на то, что в знаменателях правых частей формул (4.18), (4.20), (4.21) и (4.24) для функции $\omega_j^\#(t)$ всюду фигурирует константа $c_j \stackrel{\text{def}}{=} (x_{j+1}-x_{j+2}) \neq 0$. Поскольку от умножения координатных функций $\omega_j^\#$ на ненулевые константы пространство сплайнов не меняется, то естественно рассмотреть функции $\omega_j^@ \stackrel{\text{def}}{=} c_j\omega_j^\#$ с более простым представлением

$$\omega_j^@(t) = (t - x_j)^2(x_{j+1} - x_j)^{-1}(x_{j+2} - x_j)^{-1} \qquad \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} \omega_j^@(t) = {} & (x_{j+2} - x_j)^{-1}(x_{j+2} - x_{j+1})^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1})^{-1} \\ & \times \Big[(x_j - x_{j+2} - x_{j+3} + x_{j+1})\, t^2 \\ & - 2(x_{j+1}x_j - x_{j+2}x_{j+3})\, t + x_j x_{j+1} x_{j+3} \\ & - x_j x_{j+2} x_{j+3} + x_j x_{j+1} x_{j+2} - x_{j+1} x_{j+2} x_{j+3}\Big] \\ & \qquad \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\omega_j^@(t) = (t - x_{j+3})^2(x_{j+3} - x_{j+2})^{-1}(x_{j+3} - x_{j+1})^{-1} \qquad \text{при} \quad t \in [x_{j+2}, x_{j+3}], \tag{4.27}$$

$$\omega_j^@(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin [x_j, x_{j+3}], \quad \text{так что} \quad \operatorname{supp} \omega_j^@ = [x_j, x_{j+3}]. \tag{4.28}$$

Заметим, что функции $\omega_j^@$ вида (4.25)–(4.28) получаются из аппроксимационных соотношений (2.1)–(2.2), если положить $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^@$, где $\mathbf{a}_j^@ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_j^\#/c_j$.

4.5. Используем сужение построенных ранее сплайнов (4.14)–(4.17) на отрезок $[a,b]$, обозначая эти сужения по-прежнему $\omega_j^\#(t)$, $t \in [a,b]$.

Пространство, натянутое на функции $\omega_j^\#$, $j \in J_{N-1}$, будем обозначать $\mathbb{S}^\#_{[a,b]}(X_N, A_N, \varphi)$,

$$\mathbb{S}^\#_{[a,b]}(X_N, A_N, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ u \mid u = \sum_{j \in J_{N-1}} c_j \omega_j^\# \quad \forall c_j \in \mathbb{R}^1 \Big\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{S}^\#_{[a,b]}(X_N, A_N, \varphi) \subset C^1[a,b]$.

Теорема 13. *Функция* $u_N^\#(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=-2}^{N-1} c_j \omega_j^\#(t)$, $t \in [a,b]$, *на отрезке* $[a,b]$ *является следом функции* $u^\#(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_j c_j \omega_j^\#(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, *лежит в пространстве* $\mathbb{S}^\#_{[a,b]}(X_N, A_N, \varphi)$ *и полностью определяется набором узлов* $\{x_j\}_{j \in \{-1,0,\dots,N+1\}}$, *набором векторов*

$$\{\varphi_j, \varphi'_j\}_{j \in \{-1,0,\dots,N+1\}} \tag{4.29}$$

и набором коэффициентов $\{c_j\}_{j \in J_{N-1}}$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что все координатные сплайны, носители которых имеют непустое пересечение с интервалом (x_k, x_{k+1}), а именно $\omega^\#_{k-2}$, $\omega^\#_{k-1}$, $\omega^\#_k$, определяются на этом интервале векторами $\mathbf{a}^\#_{k-2}$, $\mathbf{a}^\#_{k-1}$, $\mathbf{a}^\#_k$. Из формулы (4.2) следует, что вектор $\mathbf{a}^\#_j$ определяется векторами φ_{j+1}, φ'_{j+1}, φ_{j+2} и φ'_{j+2}. Придавая индексу k значения $0, 1, 2, \dots, N-1$ (соответствующие исчерпанию множества $[a,b] \backslash X_N$ промежутками (x_k, x_{k+1})), а индексу j, в свою очередь, значения $k-2$, $k-1$, k, приходим к совокупности, указанной в формуле (4.29). Остальные утверждения доказываемой теоремы очевидны. $\square$

Согласно теореме 10, существует система функционалов $g^\# = \{g^\#_{-2}, \dots, g^\#_{N-1}\}$, биортогональная системе сплайнов $\{\omega_j^\#(t)\}_{j \in J_{N-1}}$, $t \in [a,b]$ и такая, что $\operatorname{supp} g_i^\# \subset [a,b]$, $i \in J_{N-1}$, а именно:

$$\langle g_i^\#, \omega_j^\# \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i,j \in J_{N-1}, \quad \operatorname{supp} g^\#_{-2} \subset [x_0, x_0 + \varepsilon),$$

$\operatorname{supp} g^\#_{-1} \subset [x_0, x_0 + \varepsilon)$, $\operatorname{supp} g_i^\# \subset [x_i, x_i + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Аналогично (3.12) можно положить $g^\#_{-2} \stackrel{\text{def}}{=} g^\#_{-2,\langle 2 \rangle}$, $g^\#_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} g^\#_{-1,\langle 1 \rangle}$, $g^\#_0 \stackrel{\text{def}}{=} g^\#_{0,\langle 0 \rangle}$, $g^\#_0 \stackrel{\text{def}}{=} g^\#_{1,\langle 0 \rangle}$, $\dots$, $g^\#_{N-1} \stackrel{\text{def}}{=} g^\#_{N-1,\langle 0 \rangle}$.

Литература

1. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* М., 1980.
2. G. Mühlbach, *ECT-B-splines defined by generalized divided differences.* — J. Comput. Appl. Math. **187** (2006), 96–122.
3. A. Aldroubi, Q. Sun, W.-S. Tang, *Nonuniform average sampling and reconstruction in multiply generated shift-invariant spaces.* — Constr. Approx. **20** (2004), 173–189.
4. С. Малла, *Вэйвлеты в обработке сигналов.* М., 2005.
5. Ю. К. Демьянович, *Всплески и минимальные сплайны.* СПб., 2003.
6. Ю. К. Демьянович, *Всплесковые (вэйвлетные) разложения на неравномерной сетке.* — Труды СПбМО **13** (2007), 27–51.
7. Ю. К. Демьянович, *Минимальные сплайны и всплески.* — Вестник СПбГУ **2** (2008), 8–22.

Demjanovich Yu. K., Kosogorov O. M. Splines and biorthogonal systems.

The paper constructs coordinate splines on a closed interval, provides realizations of the corresponding biorthogonal system, and constructs finite-dimensional spaces of splines (nonpolynomial in general) of the class C^1.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Yuri.Demjanovich@JD16531.spb.edu

Поступило 15 октября 2009 г.