Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 367, 2009 г.

Ю. А. Альпин

ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРРОНОВА ВЕКТОРА СТОХАСТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Неотрицательная матрица $P = (p_{ik})$ порядка n называется стохастической, если её строчные суммы равны единице. Стохастические матрицы служат основным инструментом в теории конечных цепей Маркова. При этом число p_{ik} понимается как вероятность перехода цепи из i-го состояния в k-е за один такт времени. Вероятности перехода за t тактов даются матрицей $P^t = (p_{ik}^{(t)})$. Если для всех i, k существуют предельные вероятности

$$\lim_{t\to\infty} p_{ik}^{(t)} = p_k^{\infty},$$

не зависящие от i, то матрица $P = (p_{ik})$ называется эргодической. Существует замечательная формула для предельных вероятностей, использующая миноры диагональных элементов матрицы $P(1)=I-P$:

$$p_k^{\infty} = \frac{P_{kk}(1)}{\sum\limits_{l=1}^{n} P_{kk}(1)}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Формула (1) приводится в книге [1]. Её можно также извлечь из формул для предельных стохастических матриц, которые приводятся в книгах [2, 3]. Однако в современных, в том числе достаточно подробных (как, например, в [4]), изложениях теории цепей Маркова эта формула не встречается. Возможная причина заключается в том, что в книге [1] формула (1) получается как предельный случай громоздкой формулы Перрона для элементов матрицы P^t. В книгах же [2] и [3] применительно к стохастическим матрицам используется общая теория функций от матриц, излагаемая в предыдущих главах. Цель этой заметки – вывести формулу (1) простыми линейно-алгебраическими средствами.

Ключевые слова : теорема Перрона–Фробениуса, перронов вектор, стохастическая матрица.

На самом деле наш вывод даёт несколько больше: формула (1) определяет *стационарное* распределение $\mu = (\mu_k)$ вероятностей состояний для цепи Маркова в том случае, когда это распределение единственно.

Перейдём к подробному изложению. Согласно теореме Перрона–Фробениуса спектральный радиус $\rho(A)$ неотрицательной матрицы A является её собственным значением, так называемым перроновым корнем A. Существует неотрицательный собственный вектор (левый и правый), отвечающий перронову корню. Этот вектор будем называть перроновым, если он нормирован. Под нормой в этой заметке подразумевается ∞-норма, определённая на прямоугольных матрицах. Норма стохастической матрицы равна 1 и для квадратной матрицы совпадает с её перроновым корнем, которому отвечает правый перронов вектор $e = (1, \dots, 1)^T$. Заметим, что, в отличие от определения перронова вектора в [5], приведённое выше определение допускает неединственность перронова вектора.

Для того, чтобы определить цепь Маркова, помимо матрицы P переходных вероятностей задают начальное распределение вероятностей состояний – стохастическую строку

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \mu_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = 1.$$

Начальное распределение вероятностей μ называется стационарным относительно переходных вероятностей p_{ij}, если $\mu P = \mu$, то есть, если μ – перронов вектор для P. В теории цепей Маркова существенным является вопрос единственности стационарного распределения при данных переходных вероятностях цепи [4, кн. 2]. Известным достаточным (но не необходимым) условием единственности является эргодичность матрицы P. В этом случае предельное распределение вероятностей $p^\infty = (p_1^\infty, \dots, p_n^\infty)$ – единственное стационарное распределение. Действительно, переходя к пределу в равенстве $P^t P = P^{t+1}$, получаем $P^\infty P = P^\infty$, где P^∞ – матрица, все строки которой равны p^∞. Последнее равенство равносильно записывается как $p^\infty P = p^\infty$. Пусть μ – любое стационарное распределение. Из равенств $\mu = \mu P = \mu P^k = \mu P^\infty = p^\infty$ следует, что стационарное распределение совпадает с предельным распределением, и потому оно единственно.

Неотрицательная матрица A называется субстохастической, если её строчные суммы не превышают единицы. Ясно, что $\rho(A) \leq 1$. Следующее утверждение – частный случай известного неравенства (см., например, [2, с. 366]).

Лемма 1. *Если A – субстохастическая матрица, то* $\det(I - A) \geq 0$.

Доказательство. Поскольку $\rho(A) \leq 1$, то характеристический многочлен $\det(\lambda I - A)$ матрицы A не обращается в 0 при $\lambda > 1$. Ясно, что $\det(\lambda I - A) > 0$ при достаточно больших значениях λ. Стало быть, в точке $\lambda = 1$ значение этого многочлена неотрицательно. □

Применяя лемму 1 к субстохастическим матрицам, получаемым из стохастической матрицы P вычёркиванием k-й строки и k-го столбца, получаем

Следствие. *Если P – стохастическая матрица порядка n, то миноры диагональных элементов матрицы $I - P$ неотрицательны.*

Лемма 2. *Необходимое и достаточное условие единственности перронова вектора для стохастической матрицы P порядка n состоит в том, чтобы хотя бы один из миноров диагональных элементов матрицы $P(1) = I - P$:*

$$P_{11}(1), \ldots , P_{nn}(1), \tag{2}$$

был положителен.

Доказательство. *Необходимость.* Произведение матрицы B и присоединённой к ней матрицы $B^\vee$ равно $(\det B) \cdot I$. Поскольку единица – перронов корень P, то $\det(I - P) = \det P(1) = 0$, следовательно,

$$P(1)^\vee P(1) = P(1)(P(1)^\vee = 0. \tag{3}$$

Соответствующее корню 1 собственное подпространство неподвижных векторов (как правых, так и левых) в нашем случае одномерно, то есть дефект матрицы $P(1)$ равен 1. Следовательно, $\operatorname{rank} P(1) = n - 1$, и можно заключить, что $P(1)^\vee \neq 0$, поскольку эта матрица составлена из алгебраических дополнений элементов $P(1)$. Как видно из равенств (3), ненулевые столбцы $P(1)^\vee$ – правые неподвижные векторы для P, а ненулевые строки этой матрицы — левые неподвижные векторы для A. Столбцы $P(1)^\vee$ пропорциональны столбцу e, поэтому элементы в каждом столбце равны. Последнее означает, что строки матрицы $P(1)^\vee$ совпадают. Нетрудно видеть, что все строки равны неотрицательной строке (2), в которой есть положительные элементы.

Достаточность. Среди элементов (2) есть положительные, следовательно, $\operatorname{rank} P(1) = n - 1$, то есть дефект $P(1)$ равен 1. Это значит, что пространство неподвижных векторов одномерно, причём пространство левых неподвижных векторов содержит ненулевую неотрицательную строку (2). Следовательно, для P есть только один левый перронов вектор, он получается нормированием строки (2). $\square$

Из леммы 1 и доказательства леммы 2 вытекает основной результат данной заметки.

Теорема. *Если стохастическая матрица P имеет единственный перронов вектор-строку $\mu = (\mu_k)$ (единственное стационарное распределение), то его элементы определяются равенствами* (1).

Литература

1. В. И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова.* Гостехиздат, М., 1949.
2. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М., 1967.
3. П. Ланкастер, *Теория матриц.* Наука, М., 1978.
4. А. Н. Ширяев, *Вероятность*–1, *Вероятность*–2. МЦНМО, М., 2004.
5. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир., М., 1989.

Al'pin Yu. A. A formula for the Perron vector of a stochastic matrix.

The paper suggests a new linear-algebraic proof of a formula for the Perron vector (stationary distribution) of a stochastic matrix, known in the theory of Markov chains.

Казанский
государственный университет
Кремлевская ул. 18, 420008 Казань, Россия
E-mail: Yuri.Alpin@ksu.ru

Поступило 19 октября 2009 г.