Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 366, 2009 г.

Д. В. Руцкий

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О СВЯЗИ BMO–РЕГУЛЯРНОСТИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕТОК ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Эта заметка восполняет некоторые пробелы в изложении теории вещественной интерполяции пространств типа Харди, с которой можно подробно ознакомиться по обзору [4]. Во введении приведены компактные формулировки результатов, являющихся предметом данной заметки.

В первой части приведено доказательство необходимости основного условия $\log \frac{w_1}{w_2} \in \mathrm{BMO}$ для "правильной" интерполяции между весовыми пространствами Харди $\mathrm{H}^{p_0}(\mathbb{T}\times\Omega, w_0)$ и $\mathrm{H}^{p_1}(\mathbb{T}\times\Omega, w_1)$. Оно было сформулировано в [4, Теорема 3.2] с отсылкой на доказательство в случае одной переменной (когда пространство Ω состоит из одной точки) из работы [5]. В действительности, распространение этого доказательства на общий случай содержит некоторые не вполне очевидные моменты; к тому же, можно несколько упростить формулировку и выкладки за счёт использования более естественного определения весового пространства.

Во второй части доказывается замкнутость графика одного отображения, использующегося в полученном в [6] критерии BMO-регулярности решетки измеримых функций на $\mathbb{T}\times\Omega$. В [6] это утверждение – а с ним и сам упомянутый критерий – были получены лишь для случая дискретного пространства Ω. Таким образом, теперь раздражающее ограничение дискретности на меру μ пространства Ω может быть снято во всех формулировках результатов в работе [6], дополнении к ней [9], и в [7]. Из всех этих утверждений мы приведём лишь формулировку упомянутого критерия BMO-регулярности и вытекающей из него самодвойственности свойства BMO-регулярности.

Ключевые слова : BMO-регулярная решетка измеримых функций, вещественная интерполяция, пространства Харди.

0. Определения и формулировки

Предметом рассмотрения являются квазибанаховы решетки измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T}\times\Omega$ с σ-конечной мерой $m \times \mu$, где m – мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$; для каждой такой решетки X определено аналитическое подпространство $X_A = \{f \in X \mid f(\cdot,\omega) \in N_+\}$, где N_+ – граничный класс Смирнова (см. [8]). Доказательства подавляющего большинства результатов, упомянутых ниже в этом разделе, можно найти в [4], [6] или [7]. Нам понадобится следующее условие невырожденности $(*)$: если $f \in X$, $f \neq 0$, то найдётся такая функция $g \in X$, $g \geqslant |f|$, что $\|g\|_X \leqslant c\|f\|_X$ и $\log g(\cdot,\omega) \in L^1(\mathbb{T})$ при почти всех $\omega \in \Omega$. Если это условие выполнено, X_A является замкнутым подпространством пространства X. Основным примером является весовое пространство Харди $\mathrm{H}^p(w) = (\mathrm{L}^p(w))_A$, $0 < p \leqslant \infty$. При этом удобно работать с весовыми пространствами $X(w)$, определёнными следующим образом: $X(w) = \{f \mid f/w \in X\}$, $\|f\|_{X(w)} = \|f/w\|_X$; отметим, что при таком определении для порядково сопряженных пространств справедлива формула $X(w)' = X'(w^{-1})$. Для весовых пространств Лебега $\mathrm{L}^p(w)$ это определение, по сравнению с классическим, к тому же обычно приводит к более компактным формулировкам и выкладкам.

Каждые две решетки X, Y рассматриваемого типа образуют совместимую пару пространств, и представляет интерес исследование условий, когда возможна естественная интерполяция соответствующих аналитических пространств X_A, Y_A, т. е. вопрос о том, для каких пар решеток X, Y рассматриваемого типа и интерполяционных функторов F имеет место формула

$$F((X_A, Y_A)) = (F(X,Y))_A.$$

Развивая терминологию статьи [7], можно назвать это свойство *аналитической устойчивостью функтора F*. Для функторов вещественной интерполяции $F((X,Y)) = (X,Y)_{\theta p}$, рассмотрением которых ограничена эта заметка, основным достаточным условием аналитической устойчивости является K-замкнутость пары (X_A, Y_A) в (X,Y) (определение см. ниже), а для K-замкнутости, в свою очередь, достаточной является BMO-регулярность пары (X,Y), т.е. следующее свойство: для любых ненулевых $x \in X$, $y \in Y$ найдутся такие мажоранты $u \geqslant |x|$, $v \geqslant |y|$, $\|u\|_X \leqslant c\|x\|_X$, $\|v\|_Y \leqslant c\|y\|_Y$, что $\left\|\log \frac{u(\cdot,\omega)}{v(\cdot,\omega)}\right\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$ при почти всех $\omega \in \Omega$ для некоторых констант

c и C, не зависящих от x и y. Условие BMO-регулярности аналогично формулируется для одного пространства X: если $0 \neq x \in X$, то найдётся функция $u \in X$, такая, что $u \geqslant |x|$, $\|u\|_X \leqslant c\|x\|_X$, и $\operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \|u(\cdot,\omega)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C$. Если оба пространства X и Y BMO-регулярны, то BMO-регулярна и пара (X,Y); обратное неверно. На настоящий момент необходимые условия аналитической устойчивости известны лишь для некоторых пар решеток, и все они включают в себя условие BMO-регулярности.

Для весовых пространств Харди имеется следующий точный критерий аналитической устойчивости вещественной интерполяции (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть веса* w_j *таковы, что* $\log w_j(\cdot,\omega) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ *при почти всех* $\omega \in \Omega$, $j \in \{1,2\}$. *Пусть* $0 < p_0, p_1 \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $w = w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}$. *Тогда следующие условия эквивалентны.*

1. $\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \left\|\log \frac{w_0(\cdot,\omega)}{w_1(\cdot,\omega)}\right\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$.
2. *Пара пространств* $(\mathrm{L}^{p_0}(w_0), \mathrm{L}^{p_1}(w_1))$ BMO-*регулярна.*
3. *Вещественная интерполяция* $(\cdot,\cdot)_{\theta p}$ *аналитически устойчива на паре пространств* $(\mathrm{L}^{p_0}(w_0), \mathrm{L}^{p_1}(w_1))$.
4. *Имеет место непрерывное вложение*

$$\mathrm{H}^p(w) \subset (\mathrm{H}^{p_0}(w_0), \mathrm{H}^{p_1}(w_1))_{\theta\infty}. \tag{1}$$

Условие 2 вытекает из 1 в силу BMO-регулярности пространств L^p (подробнее см. в [4]), переход от 2 к 3 является следствием упомянутого общего результата (BMO-регулярность влечёт аналитическую устойчивость для *любой* пары решеток), условие 4 является очевидным следствием условия 3, а полное доказательство перехода от 4 к 1 приведено в разделе 1 данной заметки.

Следующий результат для случая дискретной меры μ был получен в работе [6] и дополнении к ней [7]. Для положительного числа λ будем обозначать нижним индексом λ некоторые стандартные пространства функций на множестве $\mathbb{T} \times \Omega \times \mathbb{Z}$ с весом $w_\lambda(z,\omega,n) = \lambda^{-n}$, например, $\mathrm{L}^p_\lambda = \mathrm{L}^p(w_\lambda)$, $\mathrm{H}^p_\lambda = (\mathrm{L}^p_\lambda)_A$ и т. д. Напомним еще, что подпара (X_0, Y_0) совместимой пары (X,Y) называется *K-замкнутой*, если K-функционалы этих пар эквивалентны. При этом K-функционал $K(t,x;X,Y)$ для пары (X,Y) задан при всех $t > 0$ и $x \in X+Y$ формулой $K(t,x;X,Y) = \inf\{\|a\|_X + t\|b\|_Y \mid x = a+b, a \in X, b \in Y\}$; см. [3].

Теорема 2. *Пусть X – квазибанахова решетка измеримых функций на измеримом пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ с мерой $m \times \mu$, такая, что X^α является банаховой решеткой для некоторого $0 < \alpha \leqslant 1$. Пусть X обладает свойством Фату и свойством $(*)$. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Решетка X BMO-регулярна.*
2. *Интерполяционная пара $(X_A(l^r), \mathrm{H}^\infty_\lambda)$ K-замкнута в $(X(l^r), \mathrm{L}^\infty_\lambda)$ для некоторых $r \geqslant 1$ и $\lambda > 1$.*
3. *Утверждение пункта 2 имеет место для всех $r \geqslant 1$ и $\lambda > 1$.*
4. *Пространство $X_A(l^s) + \mathrm{H}^\infty_\lambda$ замкнуто в $X(l^s) + \mathrm{L}^\infty_\lambda$ для некоторых $0 < s < \infty$ и $\lambda > 1$.*
5. *Утверждение пункта 4 имеет место для всех $0 < s < \infty$ и $\lambda > 1$.*

При этом константа BMO-регулярности пространства X допускает оценку, зависящую только от λ, константы свойства $(*)$, r и константы K-замкнутости указанной в пункте 2 пары пространств (либо s и константы замкнутости указанной в пункте 4 пары пространств).

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 решетка X BMO-регулярна тогда и только тогда, когда BMO-регулярна решетка X'.*

Без предположения дискретности меры μ в [6] не получалось только проверить замкнутость графика одного отображения, использующегося при доказательстве переходов от 4 к 1 и от 2 к 1 (поскольку 4 следует из 2, достаточно проверить только переход от 4 к 1). В разделе 2 показано, как упомянутую замкнутость графика можно проверить в общем случае.

1. Необходимость условия $\log w \in \mathrm{BMO}$ для классов Харди

В этом разделе доказывается переход от утверждения 4 к утверждению 1 теоремы 1. За счёт деления соотношения (1) на внешнюю функцию с модулем $w_1(\cdot, x)$, $\quad x \in \Omega$, можно ограничиться случаем $w_1 = 1$. (Здесь и ниже в подобных случаях внешняя функция вычисляется по формуле $\exp(\log w_1(\cdot,x) + i \log \widetilde{w_1(\cdot,x)})$, где волна означает гармоническое сопряжение по первой переменной.) Пусть множество $E \subset \Omega$ конечной положительной меры таково, что $\|\log w_0(\cdot,x)\|_{\mathrm{BMO}} > C$ для $x \in E$. Мы придём к противоречию, если константа C достаточно велика (её величина будет зависеть только от нормы C_0 вложения (1) и величин θ, p_0 и p_1). Нам понадобится следующее обобщение леммы 1.2 из статьи [1].

Лемма 1. *Для любого наперёд заданного числа* $\varepsilon > 0$ *существуют такие измеримые функции* $t(x)$ *и* $z(x)$, $x \in E$, *что при достаточно большом значении постоянной* C *для внешних функций* $\varphi_{t(x)}(\cdot, x)$ *и* $\psi_{t(x)}(\cdot, x)$, $x \in E$, *с модулями* $|\varphi_{t(x)}(\cdot, x)| = \min(1, t(x)w_0(\cdot, x))$ *и* $|\psi_t(\cdot, x)| = \min\left(1, \frac{1}{t(x)w_0(\cdot,x)}\right)$, $x \in E$, *выполнено соотношение*

$$|\varphi_{t(x)}(z(x), x)| + |\psi_{t(x)}(z(x), x)| < \varepsilon, \quad x \in E. \tag{2}$$

Кроме того, функция $z(x)$, $x \in E$, *принимает не более чем счётное число значений; в частности, существует подмножество* $E' \subset E$ *положительной меры* μ, *на котором функция* z *постоянна.*

Действительно, пусть последовательность z_j, $j \in \mathbb{N}$, образует всюду плотное множество Z в круге $\mathbb{D}$. По известной характеризации пространства BMO в терминах интеграла Пуассона (см., например, [2, глава 6, теорема 1.2]), для каждого значения $x \in E$ существует такое значение $z = z_x$, что выполнено условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \log w_0(\theta, x) - \int_{-\pi}^{\pi} [\log w_0(\tau, x)]\, P_z(\tau) d\tau \right| P_z(\theta) d\theta > C_*, \tag{3}$$

где постоянная C_* эквивалентна C, $P_z(\tau)$ – ядро Пуассона в круге. Поскольку функция в левой части неравенства (3) непрерывна по z, существуют точки из множества Z, удовлетворяющие соотношению (3). Положим $z(x) = z_{j(x)}$,

$$j(x) = \min\{j \mid z = z_j \ \text{ удовлетворяет соотношению (3)}\}, \quad x \in E.$$

Определённая таким образом функция z измерима. Положим

$$t(x) = \exp\left(- \int_{-\pi}^{\pi} [\log w_0(\alpha, x)]\, P_{z(x)}(\alpha) d\alpha \right), \quad x \in E.$$

Соотношение (3) однородно относительно умножения веса w_0 на функцию, зависящую только от x, и, таким образом, с учётом соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\log (t(x) w_0(\alpha, x))]\, P_{z(x)}(\alpha) d\alpha = 0, \quad x \in E,$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&-2\log|\varphi_{t(x)}(z(x),x)| = -2\log|\psi_{t(x)}(z(x),x)| \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\log\left(t(x)w_0(\alpha,x)\right) - \int_{-\pi}^{\pi}\left[\log\left(t(x)w_0(\tau,x)\right)\right]P_{z(x)}(\tau)d\tau\right|P_{z(x)}(\alpha)d\alpha \\
&\qquad\qquad > C_*,
\end{aligned}
$$

$x \in E$, откуда следует соотношение (2) для величины $\varepsilon = 2e^{-\frac{C_*}{2}}$.

Лемма 2. *Пусть имеет место вложение* (1) *с нормой* $C \geqslant 1$ *(сейчас не обязательно предполагать, что* $w_1 = 1$*). Тогда при замене веса* w_0 *весом* $w_0' = w_0 h$, *где* h *– измеримая функция, такая, что* $c < h < 2c$ *для некоторого* $c > 0$, *и соответствующем изменении веса* w, *имеет место вложение* (1) *с нормой, не превосходящей* $2C$.

Действительно,

$$
\frac{1}{(2c)^r}\|y\|_{Y(w_0^r)} \leqslant \|y\|_{Y(w_0'^{\,r})} \leqslant \frac{1}{c^r}\|y\|_{Y(w_0^r)}
$$

для любого пространства Y, $0 \leqslant r \leqslant 1$, и $y \in Y$. Следовательно, для $f \in \mathrm{H}^p(w)$ и $t > 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
t^{-\theta}&K(t,f;\mathrm{H}^{p_0}(w_0'),\mathrm{H}^{p_1}(w_1)) \\
&= t^{-\theta}\inf\{\|a\|_{\mathrm{H}^{p_0}(w_0')} + t\|b\|_{\mathrm{H}^{p_1}(w_1)} \mid f = a+b\} \\
&\leqslant t^{-\theta}\inf\{c^{-1}\|a\|_{\mathrm{H}^{p_0}(w_0)} + t\|b\|_{\mathrm{H}^{p_1}(w_1)} \mid f = a+b\} \\
&= t^{-\theta}c^{-1}K(ct,f;\mathrm{H}^{p_0}(w_0),\mathrm{H}^{p_1}(w_1)) \\
&\leqslant C\frac{1}{c^{1-\theta}}\|f\|_{\mathrm{H}^p(w_0^{1-\theta}w_1^\theta)} \leqslant 2^{1-\theta}C\|f\|_{\mathrm{H}^p(w_0'^{1-\theta}w_1^\theta)}.
\end{aligned}
$$

Взятие верхней грани по t дает требуемую оценку, поскольку $2^{1-\theta} \leqslant 2$.

В силу леммы 1, беря подмножество E' вместо множества E, можно считать, что функция $z(x)$, $x \in E$, постоянна. Далее, существует такое $c > 0$, что множество $E'' = \left\{x \in E \;\middle|\; c < \frac{1}{t(x)} < 2c\right\}$ имеет положительную меру. Для краткости переобозначим E'' снова символом E

(лемма 1 сохраняется для этого нового множества E). Из (1) немедленно следует и вложение

$$\mathrm{H}^p(wt\chi_{\mathbb{T}\times E}) \subset (\mathrm{H}^{p_0}(w_0\chi_{\mathbb{T}\times E}), \mathrm{H}^{p_1}(w_1\chi_{\mathbb{T}\times E}))_{\theta p}$$

с нормой не выше той же постоянной C (иными словами, множество Ω можно заменить на E). Утверждение леммы 2 позволяет выполнить замену веса $w_0' = t(x)^{-1}w_0$, $x \in E$ (этот новый вес опять переобозначим через w_0 для краткости), после которой соотношение (2) будет выполнено для $t(x) = 1$ и $x \in E$. Положим

$$f(z,x) = \frac{\chi_E(x)}{\mu(E)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{\varphi_{t(x)}(z,x)}{\psi_{t(x)}(z,x)}\right]^{1-\theta}\left[\left(\frac{1-|z(x)|^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-z\overline{z(x)}}\right]^{\frac{2}{p}}$$

для $x \in E$, $z \in \mathbb{D}$. (В случае $p = \infty$ соответствующие множители считаем равными 1.) Нетрудно видеть, что $f \in \mathrm{H}^p(w)$ и $\|f\|_{\mathrm{H}^p(w)} = 1$ (второй множитель в выражении для f равен по модулю $w_0^{1-\theta}$; после деления на $w_0^{1-\theta}$, возведения в степень p и интегрирования возникает интеграл Пуассона от константы). По условию (1), для любого числа $s > 0$ существует разбиение функции f в сумму $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in \mathrm{H}^{p_0}(w_0)$, $f_1 \in \mathrm{H}^{p_1}$, $\|f_0\|_{\mathrm{H}^{p_0}(w_0)} \leqslant C_0 s^\theta$, $\|f_1\|_{\mathrm{H}^{p_1}} \leqslant C_0 s^{\theta-1}$. Как уже отмечалось, можно считать, что носители функций f_0 и f_1 лежат в множестве $\mathbb{T}\times E$.

Пусть функции $\varphi_{t(x)}(z,x)$ и $\psi_{t(x)}(z,x)$ доопределены нулём для $x \in \Omega \setminus E$. Положим

$$F(z,x) = \left[\frac{\psi_{t(x)}(z,x)}{\varphi_{t(x)}(z,x)}\right]^{1-\theta} f(z,x),\ F_0(z,x) = \frac{\psi_{t(x)}(z,x)}{\varphi_{t(x)}(z,x)} f_0(z,x),\ F_1 = f_1$$

для $z \in \mathbb{D}$, $x \in \Omega$. Тогда $F \in \mathrm{H}^p$, $F_0 \in \mathrm{H}^{p_0}$, $F_1 \in \mathrm{H}^{p_1}$, $\|F\|_{\mathrm{H}^p} = 1$, $\|F_0\|_{\mathrm{H}^{p_0}} \leqslant C_0 s^\theta$, $\|F_1\|_{\mathrm{H}^{p_1}} \leqslant C_0 s^{\theta-1}$ для любого числа $s > 0$ и

$$\left[\frac{\varphi_{t(x)}(z,x)}{\psi_{t(x)}(z,x)}\right]^{1-\theta} F(z,x) = \left[\frac{\varphi_{t(x)}(z,x)}{\psi_{t(x)}(z,x)}\right] F_0(z,x) + F_1(z,x), \quad z \in \mathbb{D},\ x \in \Omega. \tag{4}$$

Пусть сначала $r = \min\{p_0, p_1\} < \infty$. Используя соотношение (4) и неравенство Иенсена, получаем

$$
\begin{aligned}
|F_0(z,x)| &\leqslant \exp\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log|F_0(\alpha,x)|P_z(\alpha)d\alpha\right)\\
&\leqslant \exp\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big[\chi_{\{|\psi_{t(x)}|<1\}}(\alpha)\log\big(|\psi_{t(x)}(\alpha,x)|^{\theta}|F(\alpha,x)|\\
&\qquad\qquad + |\psi_{t(x)}(\alpha,x)|\,|F_1(\alpha,x)|\big)\big]P_z(\alpha)d\alpha\\
&\qquad + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big[\chi_{\{|\psi_{t(x)}(\alpha,x)|=1\}}(\alpha)\log|F_0(\alpha,x)|\big]P_z(\alpha)d\alpha\Bigg)\\
&\leqslant |\psi_{t(x)}(z,x)|^{\theta}\exp\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(|F(\alpha,x)|+|F_0(\alpha,x)|\\
&\qquad\qquad + |F_1(\alpha,x)|)P_z(\alpha)d\alpha\Bigg). \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Аналогичные соображения приводят к неравенствам

$$
\begin{aligned}
|F_1(z,x)| &\leqslant \exp\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log|F_1(\alpha,x)|P_z(\alpha)d\alpha\right)\\
&\leqslant \exp\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big[\chi_{\{|\varphi_{t(x)}|<1\}}(\alpha)\log\big(|\varphi_{t(x)}(\alpha,x)|^{1-\theta}|F(\alpha,x)|\\
&\qquad\qquad + |\varphi_{t(x)}(\alpha,x)||F_0(\alpha,x)|\big)\big]P_z(\alpha)d\alpha\\
&\qquad + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big[\chi_{\{|\varphi_{t(x)}|=1\}}(\alpha)\log|F_1(\alpha,x)|\big]P_z(\alpha)d\alpha\Bigg)\\
&\leqslant |\varphi_{t(x)}(z,x)|^{1-\theta}\exp\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log(|F(\alpha,x)|\\
&\qquad\qquad + |F_0(\alpha,x)|+|F_1(\alpha,x)|)P_z(\alpha)d\alpha\Bigg). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Наконец, очевидно,

$$\exp\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log(|F(\alpha,x)|+|F_0(\alpha,x)|+|F_1(\alpha,x)|)P_z(\alpha)d\alpha\right)$$
$$\leqslant\left(\int_{-\pi}^{\pi}(|F(\alpha,x)|+|F_0(\alpha,x)|+|F_1(\alpha,x)|)^rP_z(\alpha)d\alpha\right)^{\frac{1}{r}},$$
$$z\in\mathbb{D},\ x\in E.\quad (7)$$

Тогда из (4), (5), (6), (7), оценки для ядра Пуассона $|P_z|\leqslant\frac{1}{\pi(1-|z|)}$ и (2) имеем (пока считаем, что p_0, $p_1<\infty$):

$$\left[\frac{1}{2\pi\mu(E)(1-|z(x),x|^2)}\right]^{\frac{r}{p}}=|F(z(x),x)|^r=\frac{1}{\mu(E)}\int_E|F(z(x),x)|^r d\mu(x)$$
$$\leqslant\frac{1}{\mu(E)}\int_E\left(\left|\frac{\varphi_{t(x)}(z(x),x)}{\psi_{t(x)}(z(x),x)}\right|^{\theta}|F_0(z(x),x)|\right.$$
$$\left.+\left|\frac{\psi_{t(x)}(z(x),x)}{\varphi_{t(x)}(z(x),x)}\right|^{1-\theta}|F_1(z(x),x)|\right)^r d\mu(x)$$
$$\leqslant c(\varepsilon^{\theta}+\varepsilon^{1-\theta})^r$$
$$\times\frac{1}{\mu(E)}\int_E\int_{-\pi}^{\pi}(|F(\alpha,y)|+|F_0(\alpha,y)|+|F_1(\alpha,y)|)^rP_{z(y)}(\alpha)d\alpha d\mu(x)$$
$$\leqslant c'(\varepsilon^{\theta}+\varepsilon^{1-\theta})^r\left[\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_{-\pi}^{\pi}\int_E|F(\alpha,y)|^pP_{z(y)}(\alpha)dm(\alpha)d\mu(y)\right)^{\frac{r}{p}}\right.$$
$$+\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_{-\pi}^{\pi}\int_E|F_0(\alpha,y)|^{p_0}P_{z(y)}(\alpha)dm(\alpha)d\mu(y)\right)^{\frac{r}{p_0}}$$
$$\left.+\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_{-\pi}^{\pi}\int_E|F_1(\alpha,y)|^{p_1}P_{z(y)}(\alpha)dm(\alpha)d\mu(y)\right)^{\frac{r}{p_1}}\right]$$

$$\leqslant c''(\varepsilon^\theta + \varepsilon^{1-\theta})^r \left[\left(\frac{1}{\mu(E)(1-|z(x)|)} \|F\|^p_{\mathrm{L}^p} \right)^{\frac{r}{p}} + \left(\frac{1}{\mu(E)(1-|z(x)|)} \|F_0\|^{p_0}_{\mathrm{L}^{p_0}} \right)^{\frac{r}{p_0}} + \left(\frac{1}{\mu(E)(1-|z(x)|)} \|F_1\|^{p_1}_{\mathrm{L}^{p_1}} \right)^{\frac{r}{p_1}} \right]$$
$$\leqslant c'''(\varepsilon^\theta + \varepsilon^{1-\theta})^r \left[\left(\frac{1}{\mu(E)(1-|z(x)|)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{\mu(E)(1-|z(x)|)} s^{\theta p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} + \left(\frac{1}{\mu(E)(1-|z(x)|)} s^{(\theta-1)p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right]^r, \quad z \in \mathbb{D},\ x \in E,\ s > 0, \tag{8}$$

где оценочные постоянные зависят только от величин C_0, p_0 и p_1. Подставляя величину $s = [\mu(E)(1-|z(x)|)]^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}$, $x \in E$, в оценку (8), получаем соотношение

$$(\varepsilon^\theta + \varepsilon^{1-\theta})^{-1} \leqslant c \tag{9}$$

для некоторой постоянной c, зависящей только от величин C_0, p_0, и p_1. Если один из показателей p_0 или p_1 бесконечен, вычисления слегка меняются, но результат будет тем же, так что доказательство завершено в случае $r < \infty$. В случае $r = \infty$ вместо оценки (7) используем оценку

$$\exp\left(\int_{-\pi}^{\pi} \log(|F(\alpha,x)| + |F_0(\alpha,x)| + |F_1(\alpha,x)|) P_z(\alpha) d\alpha \right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi(1-|z|)} \left(\|F\|_{\mathrm{H}^\infty} + \|F_0\|_{\mathrm{H}^\infty} + \|F_1\|_{\mathrm{H}^\infty} \right), \ z \in \mathbb{D},\ x \in E,$$

и точно так же получаем с помощью неё соотношение (9), которое даёт противоречие для достаточно малых величин ε.

2. Недостающая деталь в доказательстве теоремы 2

В этом разделе доказывается замкнутость графика одного отображения, использующегося при доказательстве теоремы 2. Напомним, что речь идёт об импликациях 2 $\Rightarrow$ 1 и 4 $\Rightarrow$ 1. В статье [7] доказательство второй импликации сводилось к случаю, когда пространство X банахово, а $s \geqslant 1$; в таком случае мы переобозначим s через r.

Как уже отмечалось, в [6] соответствующее утверждение было доказано лишь для дискретной меры μ. Рассуждение использовало приём из комплексного анализа, который, по-видимому, для общих мер μ неприменим. Доказательство, приведённое ниже, основано на более элементарных и чисто вещественных соображениях, за счёт чего и достигнута необходимая общность.

Итак, пусть X – банахова решетка измеримых функций на пространстве $\mathbb{T} \times \Omega$ с σ-конечной мерой $\nu = m \times \mu$, где m – мера Лебега. Пусть, далее, $\lambda > 1$, $r \geqslant 1$ – числа, упомянутые в условии 2 или 4, а $A > 0$ – некоторая константа (достаточно большая). Для $f \in X$, $\int \log f(\cdot, \omega) > -\infty$, $\omega \in \Omega$, определяется множество $K(f) \subset \mathrm{H}^\infty(m \times \mu, l^\infty)$ функций $\{U_n\}$, удовлетворяющих условиям

$$|U_n| f \leqslant A\lambda^n,\ |U_n| \leqslant A,\ \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r} \right\|_X \leqslant A. \tag{10}$$

По лемме из [7] (или более простом её варианте [6, Лемма 10], достаточном для доказательства перехода от 2 к 1 теоремы 2) это множество выпукло, непусто, и замкнуто в $*$-слабой топологии. Для заданного $b \in X$, $b \geqslant 0$, $\|b\| = 1/2$ и $\log b(\cdot, \omega) \in L^1(\mathbb{T})$, $\omega \in \Omega$, на множестве $K(b)$ определяется отображение $\Phi(\{U_n\}) = K(f)$, где

$$f = b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r}.$$

Требуется проверить, что отображение Φ имеет замкнутый график (всюду подразумевается $*$-слабая топология). Пусть $U^k = \{U_j^{(k)}\}_{j \in \mathbb{Z}} \in K(b)$, $u^k = \{u_j^{(k)}\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \Phi(U^k)$, $U^k \to U = \{U_j\}$, $u^k \to u = \{u_j\}$. Достаточно показать, что $u \in \Phi(U)$. Второе и третье условия характеризации (10) этого включения проверяются так же, как и в [6]. Основные трудности вызывает проверка первого условия

$$|u_j| \left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r} \right] \leqslant \lambda^j A, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Достаточно проверить неравенство

$$|u_j| \left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n \in I} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r} \right] \leqslant \lambda^j A, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

для всех конечных подмножеств $I \subset \mathbb{Z}$. Пусть для некоторого I неравенство (11) не выполнено и для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ противоположное неравенство

$$|u_j| \left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n\in I} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r} \right] > \lambda^j A$$

справедливо на некотором множестве положительной меры. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|u_j| \left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n\in I} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r} \right] > \lambda^j A(1+2\varepsilon) \tag{12}$$

на некотором множестве E положительной конечной меры, при том что по условию

$$|u_j^{(k)}| \left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n\in I} \lambda^{nr} |1 - U_n^{(k)}|^r \right)^{1/r} \right] \leqslant \lambda^j A \tag{13}$$

для всех k. Пусть s – это ещё один индекс. В силу $*$-слабой сходимости справедливо следующее утверждение: для любого $M_s \in \mathbb{Z}_+$ существует последовательность выпуклых комбинаций

$$v_l = \sum_{k=M_s}^{N(l,M_s)} \alpha_k^{(l)} u_j^{(k)}, \quad \alpha_k^{(l)} \geqslant 0, \quad \sum_k \alpha_k^{(l)} = 1,$$

такая, что $v_l \to u_j$ почти всюду. Тогда по теореме Егорова существуют множество $E_s \subset E$, $\nu(E_s) > (1 - 2^{-s-1})\nu(E)$ и индекс l_s, такие, что на E_s выполнено неравенство

$$|u_j| \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} |v_{l_s}|.$$

Тогда из (12) и (13) на множестве E_s получаем оценку

$$\begin{aligned} \lambda^j A(1+\varepsilon) &< \sum_{k=M_s}^{N(l_s,M_s)} \alpha_k^{(l)} |u_j^{(k)}| \left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n\in I} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r} \right] \\ &\leqslant \lambda^j A \sum_{k=M_s}^{N(l_s,M_s)} \alpha_k^{(l)} \frac{\left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n\in I} \lambda^{nr} |1 - U_n|^r \right)^{1/r} \right]}{\left[b + \frac{1}{2A} \left(\sum_{n\in I} \lambda^{nr} |1 - U_n^{(k)}|^r \right)^{1/r} \right]}, \end{aligned}$$

откуда для некоторого $k_s \in [M_s, N(l_s, M_s)]$ верно неравенство

$$\frac{\left[b + \frac{1}{2A}\left(\sum\limits_{n\in I}\lambda^{nr}|1-U_n|^r\right)^{1/r}\right]}{\left[b + \frac{1}{2A}\left(\sum\limits_{n\in I}\lambda^{nr}|1-U_n^{(k_s)}|^r\right)^{1/r}\right]} > 1+\varepsilon,$$

а тогда

$$\sum_{n\in I}\lambda^{nr}|1-U_n|^r > (1+\varepsilon)^r \sum_{n\in I}\lambda^{nr}|1-U_n^{(k_s)}|^r \tag{14}$$

на множестве E_s. Индуктивно строя последовательность

$$M_1 = 1, \quad M_{s+1} = 1 + N(l_s, M_s),$$

получаем, что на множестве $F = \cap_s E_s$ положительной меры неравенство (14) выполнено при каждом значении s, и индексы k_s образуют возрастающую последовательность. В силу $*$-слабой сходимости найдутся последовательности выпуклых комбинаций

$$V^{(l)} = \sum_{t=0}^{B(l)} \beta_t^{(l)} U^{(k_t)}, \quad \beta_t^{(l)} \geqslant 0, \quad \sum_t \beta_t^{(l)} = 1,$$

такие, что $V^{(l)}$ сходятся к U почти всюду. Опять применяя теорему Егорова, получаем, что на некотором подмножестве G множества F, имеющем положительную меру, для некоторого l имеет место оценка

$$|1-U_n| \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}}|1-(V^{(l)})_n|, \quad n \in I.$$

Как и раньше, подставляя эту оценку в (14) и пользуясь выпуклостью отображения $x \to |x|^r$, получаем, что для всех s

$$\sum_{t=0}^{B(l)} \beta_t^{(l)} \sum_{n\in I}\lambda^{nr}|1-U_n^{(k_t)}|^r > \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^r \sum_{n\in I}\lambda^{nr}|1-U_n^{(k_s)}|^r$$

на множестве G положительной меры. Умножая обе части этого неравенства на $\beta_s^{(l)}$ и суммируя по s, приходим к противоречию.

Литература

1. M. Cwikel, J. E. McCarthy, and T. H. Wolff, *Interpolation between weighted Hardy spaces.* — Proc. Am. Math. Soc., **116**, No. 2, 381–388.
2. J. B. Garnett, *Bounded analytic functions.* — Academic Press New York (1981).
3. J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag (1976).
4. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H_p-spaces: some recent developments.* Israel Math. Conf. Proceedings, vol. 13, pages 102–140 (1999).
5. S. V. Kisliakov and Xu Quanhua, *Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces.* — Trans. Am. Mat. Soc., **343**, No. 1 (1994), 1–34.
6. С. В. Кисляков, *О* BMO-*регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ, **14**, No. 2 (2002), 117–135.
7. S. V. Kislyakov, *On* BMO-*regular couples of lattices of measurable functions.* Studia Mathematica, **159(2)** (2003), 277-289.
8. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, Москва (1950).
9. С. В .Кисляков, *О* BMO-*регулярных решетках измеримых функций.* II. Записки научн. семин. ПОМИ **303(31)** (2003), 161–168.

Rutsky D. V. Two remarks on the relationship between BMO-regularity and analytic stability of interpolation for lattices of measurable functions.

The subject-matter of this paper is Hardy type spaces on the measure space $(\mathbb{T}, m) \times (\Omega, \mu)$, where $(\mathbb{T}, m)$ is the unit circle with Lebesgue measure. There is a characterization of analytic stability for real interpolation of weighted Hardy spaces on $\mathbb{T} \times \Omega$ a complete proof of which was present in the literature only for the case where μ is a point mass. Here this gap is filled and the proof of the general case is presented. Next, in previous work by S. Kislyakov, certain results concerning BMO-regular lattices on $(\mathbb{T} \times \Omega, m \times \mu)$ were proved under the assumption that the measure μ is discrete. Here this extraneous assumption is lifted.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 23 августа 2009 г.