Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 366, 2009 г.

А. А. Кононова

О КОМПАКТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ КОНЕЧНОЗОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ЯКОБИ

1. Введение

В работе исследуется вопрос о компактности возмущения ограниченного оператора Якоби (дискретного аналога оператора Штурма–Лиувилля на полуоси), при этом возмущение порождается изменением спектральной меры оператора при сохранении существенного спектра (точные формулировки см. ниже).

Рассмотрим последовательности чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ такие, что $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$. Оператор Якоби – это оператор в пространстве $l^2(\mathbb{Z}_+)$, действие которого на векторах стандартного ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется следующим образом (см. [7]):

$$Ae_0 = b_0 e_0 + a_0 e_1, \quad Ae_n = a_{n-1}e_{n-1} + b_n e_n + a_n e_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Соответствующая бесконечная трехдиагональная матрица называется матрицей Якоби:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $\sup_n\{a_n\} < \infty$, $\sup_n\{|b_n|\} < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, тогда оператор A ограничен и является самосопряженным, вектор e_0 является циклическим вектором оператора A. И наоборот, каждый ограниченный самосопряженный оператор с циклическим вектором имеет матрицу Якоби в подходящем ортонормированном базисе.

Изучение различных спектральных свойств операторов Якоби привлекает к себе постоянный интерес (см. [6, 13, 15, 16, 19, 20]). При

Ключевые слова : трехдиагональная матрица, оператор Якоби, ортогональные многочлены.

Работа поддержана грантом НШ 3906.2008.1 .

этом во многих работах используется хорошо известная связь теории операторов Якоби с теорией многочленов, ортогональных по мере на действительной оси.

В настоящей работе асимптотические свойства ортогональных многочленов применяются для изучения спектральных свойств операторов Якоби.

Рассмотрим вероятностную борелевскую меру μ с ограниченным бесконечным носителем на действительной оси. Пусть многочлены $Q_n(z)$ степени n со старшим коэффициентом единица ортогональны по этой мере:

$$(Q_n, z^k)_\mu := \int\limits_{\mathrm{supp}(\mu)} Q_n(x) x^k d\mu = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Для них выполняется трехчленное рекуррентное соотношение

$$Q_{n+1}(z) = (z - b_n)Q_n(z) - a_{n-1}^2 Q_{n-1}(z),\ n \geqslant 0, \tag{2}$$

с начальными условиями $Q_{-1}(z) = 0$, $Q_0(z) = 1$, причем $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$. Рассмотрим матрицу Якоби, элементами которой являются коэффициенты рекуррентного соотношения (2), и обозначим через A_μ оператор Якоби, соответствующий этой матрице. Известно, что мера μ является спектральной мерой оператора A_μ (см. [2]). И наоборот, каждому оператору Якоби A однозначно ставится в соответствие последовательность многочленов, определенная рекуррентными соотношениями (2). Это многочлены с единичным старшим коэффициентом, ортогональные по спектральной мере оператора A. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между операторами Якоби и вероятностными мерами на действительной оси (подробнее о связи ортогональных многочленов и операторов Якоби см. [7]).

Обозначим через $\mathcal{K}$ идеал компактных операторов в $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Говорят, что оператор A является компактным возмущением оператора A^0, если $A - A^0 \in \mathcal{K}$. Хорошо известно, что если A и A^0 – операторы Якоби, то $A - A^0 \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n^0 - a_n| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n^0 - b_n| = 0$.

Для ограниченного самосопряженного оператора A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, обозначим через $\sigma(A)$

спектр оператора A, а через $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ его существенный спектр (напомним, что существенный спектр получается удалением из $\sigma(A)$ множества изолированных собственных чисел конечной кратности).

Следующий классический результат утверждает, что существенный спектр оператора устойчив относительно компактных возмущений.

Теорема 1.1 (Вейль [9, 18]). *Если A и A^0 – ограниченные самосопряженные операторы и $(A - A^0) \in \mathcal{K}$, то $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A^0)$.*

Теорема Вейля–фон Неймана, являющаяся в некотором смысле обращением теоремы Вейля, утверждает, что если A и A^0 – самосопряженные операторы, то $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A^0)$ тогда и только тогда, когда $(A - UA^0U^*) \in \mathcal{K}$ для некоторого унитарного оператора U.

В настоящей статье рассматривается следующая задача. Пусть μ – спектральная мера некоторого оператора Якоби A_μ, μ^* – спектральная мера оператора Якоби A_{μ^*}. Предположим, что существенные спектры операторов A_μ и A_{μ^*} совпадают. По теореме Вейля–фон Неймана оператор A_{μ^*} унитарно эквивалентен некоторому компактному возмущению оператора A_μ, но сам оператор A_{μ^*} может не является компактным возмущением оператора A_μ (даже в том случае, когда мера μ^* получена из меры μ добавлением одной точечной массы). Нас будут интересовать условия на меры μ и μ^*, при выполнении которых оператор $A_{\mu^*} - A_\mu$ является компактным.

Перейдем к описанию классов операторов, в которых мы будем рассматривать эту задачу. Пусть E – конечный набор попарно непересекающихся отрезков действительной оси: $E = \cup_{k=1}^{p} E_k$, $E_k = [\alpha_k; \beta_k]$, $k = 1, \dots, p$. Пусть $\rho(x) \geq 0$ – интегрируемая функция на E. Говорят, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию Сегё на E, если

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\log \rho(x)dx}{\sqrt{(\beta_k - x)(x - \alpha_k)}} > -\infty, \quad k = 1, 2, 3, \dots, p. \tag{3}$$

Рассмотрим операторы Якоби, существенный спектр которых совпадает с множеством E, абсолютно непрерывная составляющая спектральной меры имеет вес, удовлетворяющий условию Сегё на E, а дискретный спектр состоит из конечного набора масс, расположенных на действительной оси вне E. Обозначим этот класс операторов через $\mathcal{S}(E)$. Соответствующий класс мер обозначим через $\mathcal{M}(E)$.

Пусть мера $\mu \in \mathcal{M}(E)$ имеет вес $\rho(x)$ и массы m_j, расположенные в точках $z_j \in \mathbb{R} \setminus E$, $j = 1, \ldots, l$, и не имеет сингулярной составляющей. Как было замечено выше, по этой мере однозначно восстанавливается оператор Якоби $A_\mu \in \mathcal{S}$. Рассмотрим также меру $\mu^* \in \mathcal{M}(E)$ с весом $\rho^*(x)$ и массами m_j^* в точках $z_j^* \in \mathbb{R} \setminus E$, $j = 1, \ldots, l^*$. Соответствующий оператор Якоби обозначим через A_{μ^*}.

В случае, когда множество E состоит из единственного отрезка, оператор $A_{\mu^*} - A_\mu$ всегда будет компактным. Это следует из результатов Рахманова и Денисова (см. [8, 16]) и верно для более широкого класса операторов: если спектральная мера μ оператора Якоби такова, что $\mu' > 0$ почти всюду на отрезке $[-1, 1]$ и μ имеет не более чем счетное число точечных масс на $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, предельными точками которых могут быть только концы отрезка $[-1, 1]$, то $a_n \to 1/2$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Ситуация меняется, если множество E состоит более чем из одного отрезка. Например, если E является объединением двух непересекающихся отрезков действительной оси, то возмущение оператора Якоби добавлением одной массы в точке, не принадлежащей множеству E, никогда не является компактным. В качестве иллюстрации рассмотрим операторы Якоби A_1 и A_2, действие которых определяется следующим образом:

$$A_1 e_0 = 3e_1,\ A_1 e_{2n+1} = 3e_{2n} + e_{2n+2},\ A_1 e_{2n} = e_{2n-1} + 3e_{2n+1};$$

$$A_2 e_0 = e_1,\ A_2 e_{2n+1} = e_{2n} + 3e_{2n+2},\ A_2 e_{2n} = 3e_{2n-1} + e_{2n+1}.$$

Оператор A_2 получается из оператора A_1 при возмущении меры добавлением точечной массы в начале координат (существенный спектр и весовая функция не меняются). В то же время $(A_1 - A_2) \notin \mathcal{K}$.

Работа построена следующим образом. В следующем параграфе приведены предварительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Третий параграф посвящен формулировке и доказательству основного результата.

Автор благодарен В. А. Калягину за полезные обсуждения, а также рецензенту за важные замечания.

2. Предварительные сведения и определения

Следующая теорема описывает связь компактности возмущения операторов Якоби с асимптотикой ортогональных многочленов.

Теорема 2.1 (Б. Беккерман [13]). *Пусть A и A^0 – операторы Якоби, а Q_n и Q_n^0 – соответствующие им последовательности ортогональных многочленов. Включение $(A - A^0) \in \mathcal{K}$ справедливо тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{Q_n^0(z)}{Q_{n+1}^0(z)}\right) = 0$$

и сходимость равномерна в некоторой окрестности бесконечности.

Напомним определения некоторых стандартных понятий геометрической теории функций, которые понадобятся нам в дальнейшем (см. [1, 21]).

Обозначим через Ω область, являющуюся дополнением E: $\Omega = \mathbb{C}\backslash E$. *Действительная функция Грина* $g(z, z_0)$ для области Ω с особенностью в точке $z_0 \in \Omega$ – это функция, гармоническая в $\Omega \setminus \{z_0\}$ и такая, что функция $[g(z, z_0) - \log(1/|z - z_0|)]$ гармонична в окрестности точки z_0 (если $z_0 = \infty$, то $[g(z) - \log|z|]$ гармонична в окрестности точки ∞) и $\lim\limits_{z\to\zeta} g(z, z_0) = 0$, $\zeta \in \partial\Omega$.

Рассмотрим функцию $\Phi(z, z_0) = \exp[g(z, z_0) + i\tilde{g}(z, z_0)]$ (операция $(\tilde{\cdot})$ здесь и далее означает гармоническое сопряжение функции $(\cdot)$). Если $p > 1$ (область Ω не является односвязной), то функция $\Phi(z) := \Phi(z, \infty)$ будет многозначной в Ω. Эта функция локально аналитично отображает область Ω на внешность единичной окружности.

Логарифмической емкостью множества E называется положительное число $C(E) := \exp(-\gamma)$, где γ – это так называемая константа Робена для Ω: $\gamma = \lim_{z\to\infty}[g(z) - \log|z|]$.

Гармонические меры $\omega_k(z)$, $k = 1, \dots, p$, – это функции, гармонические в области Ω включая ∞, определенные граничными условиями $\omega_k(\zeta)|_{\zeta\in E_j} = \delta(j, k)$ ($\delta(j, k)$ – дельта-символ Кронекера). Нам также понадобятся аналитические функции $\Omega_k(z) := (1/2)[\omega_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z)]$.

Если условие Сегё (3) выполнено для весовой функции $\rho(\zeta)$, то (см. [21]) существует действительная функция $h(z)$, гармоническая в области Ω и удовлетворяющая на E следующему граничному условию: $h(\zeta)|_{\zeta\in\partial\Omega} = \log(\rho(\zeta))$. Комплексная функция $R_\rho(z) = \exp[h(z) + i\tilde{h}(z)]$ локально аналитична в области Ω, имеет некасательные предельные значения на ее границе $\partial\Omega$ и $|R_\rho(\zeta)|_{\zeta\in\partial\Omega} = \rho(\zeta)$.

Если область Ω не является односвязной (при $p > 1$), то функции $\Phi(z)$ и $R_\rho(z)$, определенные выше, будут в общем случае многозначны. Точнее, их абсолютные значения будут однозначными функциями, а аргументы – многозначными в Ω. Для данной многозначной функции

$f(z)$ выражение $\Delta_{E_k} f$ обозначает приращение функции при обходе вокруг отрезка E_k. Например, $\Delta_{E_k} \arg(\Phi^{-n}) = -n\omega_k(\infty)$.

Для удобства дальнейшего изложения каждой мере $\mu \in \mathcal{M}(E)$, абсолютно непрерывная составляющая которой имеет вес $\rho(x)$, а дискретные массы расположены в точках $z_j^* \in \mathbb{R} \setminus E$, сопоставим набор чисел

$$\mathcal{J}_\nu(\mu) = \frac{1}{4\pi} \Delta_{E_\nu} \arg R_\rho(z) + \sum_{j=1}^{l} \omega_\nu(z_j^*), \quad \nu = 1, \dots, p. \tag{4}$$

Перейдем к определению римановых тэта-функций, которые будут использоваться для описания асимптотических свойств ортогональных многочленов. Более подробно об этих фукциях можно прочитать в соответствующей литературе (см. [4, 11]). Разрежем поверхность Ω по границе E и склеим вдоль границы с симметричной ей областью $\overline{\Omega}$, определенной как Ω, у которой все локальные параметры заменены комплексно сопряженными. Мы получим замкнутую ориентированную двулистную поверхность Римана рода $(p-1)$. Обозначим ее через $\Re$. Эта поверхность может быть описана уравнением $\omega^2 = \prod\limits_{j=1}^{p} (z-\alpha_j)(z-\beta_j)$. Концы отрезков E_k являются точками ветвления поверхности $\Re$. Функция Грина и гармонические меры могут быть продолжены на всю поверхность $\Re$ (см. [1]).

Для данной симметричной матрицы $C = (C_{i,j})$ с положительно определенной мнимой частью тэта-функция от h переменных определяется формулой:

$$\theta(u_1, u_2, ..., u_h) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_h \in Z} \exp\left(\pi i \sum_{\mu=1}^{h} \sum_{\nu=1}^{h} C_{\mu,\nu} n_\mu n_\nu + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{h} n_\nu u_\nu\right). \tag{5}$$

Для построения стандартной *тэта-функции Римана поверхности* $\Re$ мы вычислим периоды дифференциалов $d\Omega_k(z)$ (абелевых дифференциалов первого рода): $\oint_{E_j} d\Omega_k(\zeta) = iB_{k,j}, \quad B_{k,j} \in \mathbb{R}$, и выберем произвольный комплексный вектор $(b_1, b_2, \dots, b_{p-1})$. Тогда соответствующая тэта-функция Римана на $\Re$ определяется следующим образом:

$$\Theta(z) = \theta(\int_{z_0}^{z} d\Omega_1(\zeta) - b_1, \dots, \int_{z_0}^{z} d\Omega_{p-1}(\zeta) - b_{p-1}),$$

где функция θ имеет матрицу параметров $C = (iB_{k,j})$. Тэта-функция Римана является однозначной аналитической функцией на рассеченной римановой поверхности и имеет ровно $p-1$ ноль (или тождественно равна нулю). Пусть a_k, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, – нули тэта-функции Римана. Числа

$$k_\nu \equiv -\sum_{n=1}^{p-1} \int_{z_0}^{a_n} d\Omega_\nu(\zeta) + b_\nu$$

не зависят от выбора чисел b_ν, они определяются только римановой поверхностью и называются *римановыми константами*.

Асимптотические формулы для ортогональных многочленов. Многочлены, ортогональные на конечной системе отрезков действительной оси, были подробно изучены в работах Н. И. Ахиезера и Ю. Я. Томчука (см. [3, 10]). В 1969 году Видом (см. [21]) вывел формулы сильной асимптотики для многочленов, ортогональных на наборе комплексных дуг с весом, удовлетворяющим условию Сегё. В явном виде с использованием тэта-функций Римана эти формулы получил А. И. Аптекарев (см. [1]). В [1, 5] были получены асимптотические формулы для многочленов, к абсолютно непрерывной мере которых добавлена дискретная часть. В работе Ф. Пехерсторфера и П. Юдицкого [19] методами, отличными от методов Видома и Аптекарева, получены формулы сильной асимптотики для ортогональных многочленов, а также асимптотические формулы для элементов соответствующей матрицы Якоби для класса мер, более широкого, чем класс $\mathcal{M}(E)$ (более точные формулировки см. в [19]). В частности, из [19] следует, что асимптотика элементов матрицы Якоби для оператора из класса $\mathcal{S}(E)$ не зависит от расположенной на E сингулярной составляющей спектральной меры (см. [19], следствие 6.1, а также замечание после леммы 2.2).

Для некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}(E)$ с весом ρ и дискретными массами в точках $z_k, k = 1, \ldots, l$, введем функции

$$\psi_n(z) = \chi(z)\sqrt{\frac{R_\rho(\infty)}{R_\rho(z)}}\frac{\Theta(n,z)}{\Theta(n,\infty)}\prod_{k=1}^{l}\frac{\Phi(\infty,z_k)}{\Phi(z,z_k)},\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

здесь $\chi(z)$ – некоторая функция, зависящая только от Ω и не зависящая от n и весовой функции $\rho(z)$ (см. [1])[1]; $\Theta(n,z)$ – тэта-функция

[1]В работе [1] приведены точные формулы для $\chi(z)$. Так как нам эта функция в дальнейшем не понадобится, мы опускаем здесь ее подробное описание.

Римана с матрицей параметров $(iB_{k,j})$ и вектором параметров

$$b_\nu(n) = d_\nu - n\omega_\nu(\infty) + \mathcal{J}_\nu(\mu), \quad \nu = 1, 2, \dots, p-1,$$

где числа $\mathcal{J}_\nu(\mu)$ определены выше формулой (4), константы d_ν зависят только от геометрии области E (и не зависят от n и μ).

Верна следующая теорема [5, 19, 21].

Теорема 2.2. *Пусть мера $\mu \in \mathcal{M}(E)$ имеет вес ρ и дискретные массы в точках $z_k, k = 1, \dots, l$, многочлены Q_n ортогональны относительно меры μ.*

Тогда[2]

$$1) \quad a_0^2 a_1^2 \dots a_n^2 / C(E)^{2n} \sim \|\psi_n\|^2 := \oint_E |\psi_n(x)|^2 \rho(x) dx, \ n \to \infty;$$

$$2) \quad Q_n(z) = C(E)^n \Phi^n(z)[\psi_n(z) + \epsilon_n(z)], \quad \text{где} \ \ \epsilon_n \to 0 \ \ \text{при} \ \ n \to \infty$$

равномерно на компактных подмножествах $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$.

Функции $\psi_n(z)$ являются решениями некоторой экстремальной задачи. Известно (см. [5, 21]), что все их нули (кроме точек z_k) лежат в выпуклой оболочке множества E. Следствием асимптотических формул является приведенное ниже утверждение, описывающее асимптотику отношения многочленов.

Утверждение 2.3. *Пусть многочлены $Q_n(z)$ ортогональны относительно меры $\mu \in \mathcal{M}(E)$. Тогда для некоторого бесконечного подмножества $\Lambda \subset \mathbb{N}$ следующие пределы существуют и равны:*

$$\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda} \frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} = \lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda} \frac{1}{C(E)\Phi(z)} \frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}, \tag{7}$$

сходимость равномерная в некоторой (зависящей от Λ) окрестности бесконечности. Здесь $\Theta_n(z) = \frac{\Theta(n,z)}{\Theta(n,\infty)}$, функции $\Theta(n, z)$ определены перед теоремой 2.2.

Доказательство. Тэта-функция нескольких переменных, как видно из определения, имеет период 1 по каждому аргументу, поэтому мы

[2]Здесь под контурным интегралом понимается следующее: мы разрезаем комплексную плоскость по отрезкам из множества E и интегрируем по контурам, обходящим каждый отрезок дважды – по верхнему и нижнему краям разреза.

будем рассматривать числа $n\omega_\nu(\infty)$, участвующие в выражениях для векторов параметров тэта-функций Римана, по модулю 1. Последовательность $\{n\omega_\nu(\infty) \pmod 1\}_{n=1}^\infty$ ограничена, и мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть бесконечное множество $\Lambda \subset \mathbb{N}$ таково, что $n\omega_\nu(\infty) \overset{n\to\infty,\, n\in\Lambda}{\longrightarrow} \lambda_\nu$. Тогда для произвольного $z \in \Re$ получим:

$$\Theta_n(z) \overset{n\to\infty,\, n\in\Lambda}{\longrightarrow} \Theta_\Lambda(z),$$

где $\Theta_\Lambda(z) = \Theta(\Lambda, z)/\Theta(\Lambda, \infty)$, и

$$\Theta(\Lambda, z) = \theta\left(\int\limits_{z_0}^{z} d\Omega_1 - b_1(\Lambda), \dots, \int\limits_{z_0}^{z} d\Omega_{p-1} - b_{p-1}(\Lambda)\right),$$

где $b_\nu(\Lambda) = d_\nu + \mathcal{J}_\nu(\mu) - \lambda_\nu$ (путь интегрирования во всех интегралах $\int_{z_0}^{z} d\Omega_\nu$ выбирается одинаковый). Отсюда, учитывая формулы сильной асимптотики (теорема 2.2), получаем утверждение 2.3.

3. Условия компактности возмущения

Основной результат работы заключается в следующем.

Теорема 3.1. *Пусть множество E является объединением конечного числа непересекающихся отрезков действительной оси. Пусть A_μ и A_{μ^*} – операторы Якоби из класса $\mathcal{S}(E)$ со спектральными мерами μ и μ^* соответственно. Тогда*

1) *если*

$$\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) \pmod 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, p, \tag{8}$$

то $A_\mu - A_{\mu^*} \in \mathcal{K}$;

2) *если числа $\omega_\nu(\infty)$, $\nu = 1, 2, \dots, p$, рациональны и $A_\mu - A_{\mu^*} \in \mathcal{K}$, то $\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) \pmod 1$, $\nu = 1, 2, \dots, p$;*

3) *если множество E является объединением не более чем трех отрезков действительной оси и $A_\mu - A_{\mu^*} \in \mathcal{K}$, то $\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) \pmod 1$, $\nu = 1, 2, \dots, p$;*

где числа $\mathcal{J}_\nu(\mu)$ определены равенством (4).

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности условия (8) для компактности возмущения (первый пункт теоремы). Пусть A_μ и A_{μ^*} – операторы Якоби из класса $\mathcal{S}(E)$ со спектральными мерами μ и μ^* соответственно, Q_n и Q_n^* – соответствующие им ортогональные многочлены. По теореме 2.2 $a_0^2 a_1^2 \dots a_n^2 \sim C(E)^{2n} \|\psi_n\|^2$. В работе

Видома (см. [21, теорема 6.5]) доказано, что последовательность чисел $\|\psi_n\|^2$ ограничена сверху и снизу некоторыми положительными числами. Следовательно, $a_n \sim C(E)\frac{\|\psi_n\|}{\|\psi_{n-1}\|}$. При выполнении условия (8) получим $C(E)(\frac{\|\psi_n\|}{\|\psi_{n-1}\|} - \frac{\|\psi_n^*\|}{\|\psi_{n-1}^*\|}) = 0$ (ψ_n^* – экстремальные функции, соответствующие системе многочленов Q_n^*), и, таким образом, $a_n - a_n^* \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем, что $|b_n - b_n^*| \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого используем рекуррентные соотношения для систем многочленов:

$$Q_{n+1}(z) = (z - b_n)Q_n(z) - a_{n-1}^2 Q_{n-1}(z),$$

$$Q_{n+1}^*(z) = (z - b_n^*)Q_n^*(z) - a_{n-1}^{*2} Q_{n-1}^*(z).$$

При выполнении условия (8) экстремальные функции, участвующие в асимптотических формулах для многочленов Q_n и Q_n^*, отличаются на множитель, не зависящий от n. Поделим на этот множитель второе рекуррентное соотношение, затем вычтем из первого соотношения второе. Применяя асимптотические формулы, получим: $(b_n - b_n^*)\psi_n(z) \to 0$, $z \in \Omega$. Для завершения доказательства достаточно показать, что в некоторой точке z_0 выполняется $|\psi_n(z_0)| > r > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для некоторого r. Можно взять любую точку, лежащую вне выпуклой оболочки носителя $\mathrm{supp}(\mu)$. Предположим, что члены последовательности $|\psi_n(z_0)|$ могут быть сколь угодно малы. Тогда можно выбрать подпоследовательность $\{n_j\}$ такую, что $|\psi_{n_j}(z_0)| \to 0$. Из этой подпоследовательности можно методом, использованным при доказательстве утверждения 2.3, извлечь подпоследовательность $\{n_{j_k}\}$ такую, что $\psi_{n_{j_k}}(z) \to \psi(z)$. Функция $\psi(z)$ тоже будет решением некоторой экстремальной задачи (см. [21]). Но нули такой функции могут лежать только в выпуклой оболочке множества E. Следовательно, эта функция не может быть равна нулю в точке z_0.

Достаточность условия (8) для компактности возмущения также следует из результатов работы Ф. Пехерсторфера и П. Юдицкого [19].

Перейдем к доказательству второго и третьего пунктов теоремы. Пусть возмущение является компактным. Тогда по теореме 2.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{Q_n^*(z)}{Q_{n+1}^*(z)}\right) = 0$ и сходимость равномерна в некоторой окрестности бесконечности.

Используя асимптотические формулы (7), получаем (множество Λ

выбирается как при доказательстве утверждения 2.3):

$$\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda}\left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)}-\frac{Q_n^*(z)}{Q_{n+1}^*(z)}\right)=$$
$$=\frac{1}{C(E)\Phi(z)}\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda}\left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}-\frac{\Theta_n^*(z)}{\Theta_{n+1}^*(z)}\right)=0,$$

где $\Theta_n^*(z)=\dfrac{\Theta^*(n,z)}{\Theta^*(n,\infty)}$, а $\Theta^*(n,z)$ – тэта-функция Римана с матрицей параметров $(iB_{k,j})$ и вектором параметров

$$b_\nu^*(n)=d_\nu-n\omega_\nu(\infty)+\mathcal{J}_\nu(\mu^*),\quad \nu=1,2,\dots,p-1.$$

Так как $\dfrac{1}{C(E)\Phi(z)}\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda}\left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}-\frac{\Theta_n^*(z)}{\Theta_{n+1}^*(z)}\right)=0.$$

Введем также обозначение $\Lambda+k$ для множества $\{n: n-k\in\Lambda\}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda}\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}=\frac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}. \tag{9}$$

То же самое верно и для функций Θ_n^*. Получаем:

$$\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda}\left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}-\frac{\Theta_n^*(z)}{\Theta_{n+1}^*(z)}\right)=\frac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}-\frac{\Theta_\Lambda^*(z)}{\Theta_{\Lambda+1}^*(z)}=0.$$

Если нули тэта-функций в дробях $\dfrac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}$ и $\dfrac{\Theta_\Lambda^*(z)}{\Theta_{\Lambda+1}^*(z)}$ не сокращаются, то нули и полюса этих дробей должны совпадать. Обозначим нули этих дробей через $\{a_k\}_{k=1}^{p-1}$. Так как функции Θ_Λ и Θ_Λ^* связаны с одной и той же поверхностью $\Re$, то мы получаем два выражения для римановых констант:

$$-k_\nu\equiv\sum_{n=1}^{p-1}\int\limits_{z_0}^{a_n}d\Omega_\nu(\zeta)-b_\nu(\Lambda)\equiv\sum_{n=1}^{p-1}\int\limits_{z_0}^{a_n}d\Omega_\nu(\zeta)-b_\nu^*(\Lambda)\pmod 1.$$

Таким образом, $b_\nu(\Lambda) \equiv b_\nu^*(\Lambda) \pmod 1$, откуда следует $\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) \pmod 1$.

Осталось показать, что нули тэта-функций хотя бы в одной дроби не сокращаются. Для случая двух отрезков это тривиально. В предельно-периодическом случае (когда все $\omega_\nu(\infty)$ рациональны) отсутствие сокращения нулей было показано в работе Б. Беккерманна, В. Калягина, А. Кононовой [14]. Так как этот факт потребуется в дальнейшем, приведем здесь его доказательство.

Покажем сначала, что нули соответствующих тэта-функций не будут совпадать в случае периодического оператора Якоби. Рассмотрим оператор Якоби, соответствующий трехдиагональной матрице с периодическими коэффициентами:

$$a_{k+p} = a_k,\ b_{k+p} = b_k.$$

Рассмотрим многочлены второго рода P_n:

$$P_{n+1}(z) = (z - b_n)P_n(z) - a_{n-1}^2 P_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$P_0(z) = 0,\ P_1(z) = a_0^2.$$

Верно следующее рекуррентное соотношение:

$$Q_{(k+1)p+j}(z) = (Q_p(z) - P_{p-1}(z))Q_{kp+j}(z) - \prod_{i=0}^{p-1} a_i^2 Q_{(k-1)p+j}(z).$$

Можно записать решение этого уравнения в виде

$$Q_{kp+j} = \frac{w_1^k(Q_{p+j} - w_2 Q_j) - w_2^k(Q_{p+j} - w_1 Q_j)}{w_1 - w_2},$$

где w_1 и w_2 – корни соответствующего характеристического уравнения:

$$w_{1,2} = 1/2\left(Q_p - P_{p-1} \pm \sqrt{(Q_p - P_{p-1})^2 - 4\prod_{i=0}^{p-1} a_i^2}\right).$$

Пусть $|w_1| > |w_2|$. Тогда получаем

$$Q_{kp+j} \sim \frac{w_1^k(Q_{p+j} - w_2 Q_j)}{w_1 - w_2} \quad \text{при } k \to \infty$$

равномерно на компактных окрестностях бесконечности. Мы получили асимптотическое выражение для той же дроби, для которой раньше использовали отношение тэта-функций:

$$\frac{Q_{kp+j+1}}{Q_{kp+j}} \sim \frac{Q_{p+j+1} - w_2 Q_{j+1}}{Q_{p+j} - w_2 Q_j},\ k \to \infty.$$

Применяя основное рекуррентное соотношение к числителю дроби, получаем:

$$\frac{Q_{kp+j+1}}{Q_{kp+j}} \sim z - b_j - \frac{a_j^2}{\frac{Q_{kp+j}}{Q_{kp+j-1}}},\ k \to \infty.$$

Мы получили непрерывную дробь. Она связана с разложением в непрерывную дробь m-функции Вейля $m_{\mu^{(j)}}(z)$ оператора $A^{(j)}$ (где $d\mu^{(j)}$ – это спектральная мера оператора Якоби, соответствующего "сдвинутой" матрице Якоби $A^{(j)}$, полученной удалением первых j строк и столбцов матрицы A исходного оператора) следующим образом:

$$\frac{Q_{kp+j+1}}{Q_{kp+j}} \sim z - b_j - m_{\mu^{(j)}}(z),\ k \to \infty. \tag{10}$$

Для $m_{\mu^{(j)}}$ известно [1], что

$$m_{\mu^{(j)}}(z) = \frac{Q_p^{(j)} + P_{p-1}^{(j)} - \sqrt{(Q_p^{(j)} + P_{p-1}^{(j)})^2 - 4Q_{p-1}^{(j)} P_p^{(j)}}}{2Q_{p-1}^{(j)}},$$

где $Q_k^{(j)}$ и $P_k^{(j)}$ – ортогональные многочлены первого и второго рода, соответствующие сдвинутому оператору Якоби. Напомним, что мы находимся на римановой поверхности. Пусть z_0 – точка, в которой многочлен $Q_{p-1}^{(j)}$ обращается в ноль. Тогда на одном листе римановой поверхности числитель $Q_p^{(j)} + P_{p-1}^{(j)} - \sqrt{(Q_p^{(j)} + P_{p-1}^{(j)})^2 - 4Q_{p-1}^{(j)} P_p^{(j)}} = Q_p^{(j)} + P_{p-1}^{(j)} \pm (Q_p^{(j)} + P_{p-1}^{(j)})$ будет иметь ноль в точке z_0. Предположим, что числитель равен нулю и на другом листе римановой поверхности, тогда точка удовлетворяет каждому из уравнений $Q_p^{(j)}(z_0) + P_{p-1}^{(j)}(z_0) = 0$ и $Q_{p-1}^{(j)}(z_0) = 0$, т.е. $z_0 \in E$. Многочлен $Q_{p-1}^{(j)}$ имеет ровно один ноль в каждом из интервалов $[\beta_k; \alpha_{k+1}],\ k = 1, \ldots, p-1$. Если точка z_0 является одним из концов отрезков из E, для многочлена, стоящего под квадратным корнем, точка z_0 будет являться простым нулем, и, следовательно, $m_{\mu(j)}$ будет иметь полюс в точке z_0. Итак, функция $m_{\mu(j)}$ имеет ровно $p-1$ полюс на римановой поверхности. Эти и только эти точки являются полюсами функции $z-b_j-m_{\mu(j)}(z)$.

Так как (7) и (10) – асимптотические формулы для одной и той же дроби, то это завершает доказательство теоремы для случая чисто-периодических операторов Якоби. Каждый предельно-периодический оператор Якоби является компактным возмущением чисто-периодического, следовательно, по теореме 2.1, отношения последовательных ортогональных многочленов для чисто- и предельно-периодических операторов имеют одинаковую асимптотику в некоторой окрестности бесконечности. Выписывая соответствующие асимптотические формулы (7), нетрудно увидеть, что нули тета-функций для предельно-периодического оператора могут сокращаться тогда и только тогда, когда сокращение происходит и в соответствующем чисто-периодическом случае.

Пусть теперь $p=3$. Рассмотрим случай, когда одно из чисел $\omega_\nu(\infty)$ не является рациональным. Каждая из функций $\Theta_\Lambda(z)$ и $\Theta_{\Lambda+1}(z)$ имеет на римановой поверхности $\Re$ по два нуля. Предположим, что среди них есть совпадающий: пусть функция $\Theta_\Lambda(z)$ обращается в ноль в точках a и a_Λ, а фукция $\Theta_{\Lambda+1}(z)$ в точках a и $a_{\Lambda+1}$. Заметим, что для доказательства теоремы достаточно отсутствия сокращающихся нулей хотя бы для одной подпоследовательности $\Lambda+k$.

Предположим, что для любого $k\in\mathbb{N}$ точка a является нулем функции $\Theta_{\Lambda+k}(z)$. Рассмотрим асимптотическую формулу для следующего выражения:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda}\left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)}\frac{Q_{n+2}(z)}{Q_{n+1}(z)}\right)&=\\=\lim_{n\to\infty,\ n\in\Lambda}\left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}\frac{\Theta_{n+2}(z)}{\Theta_{n+1}(z)}\right)&=\frac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}\frac{\Theta_{\Lambda+2}(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}.\end{aligned}$$

Функция, стоящая справа, является *однозначной* мероморфной функцией на римановой поверхности $\Re$. Известно (см., например, [4]), что если отличная от константы мероморфная функция имеет единственный полюс кратности g на компактной римановой поверхности рода g, то этот полюс обязан располагаться в одной из точек Вейерштрасса данной поверхности. Известно также, что таких точек на поверхности $\Re$ лишь конечное число. Таким образом, возможны следующие два случая.

а) Если функция $\dfrac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}\dfrac{\Theta_{\Lambda+2}(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}$ постоянна, то $\Theta_\Lambda(z)=\Theta_{\Lambda+1}(z)=\Theta_{\Lambda+2}(z)$, так как все нули этих функций совпадают. Тогда, используя выражение для римановых констант, получаем:

$$-k_\nu \equiv \sum_{n=1}^{2}\int_{z_0}^{a_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) \equiv \sum_{n=1}^{2}\int_{z_0}^{a_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) + \omega_\nu(\infty) \pmod 1,$$

что противоречит условию о том, что хотя бы одно из чисел $\omega_\nu(\infty)$ является иррациональным.

б) Если функция $\dfrac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}\dfrac{\Theta_{\Lambda+2}(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}$ постоянной не является, то $a_{\Lambda+1}$ – точка Вейерштрасса. Аналогично можно показать, что $a_{\Lambda+k}$ также являются точками Вейерштрасса. Поскольку таких точек лишь конечное число, то при некотором значении k_0 функции $\Theta_{\Lambda+1}(z)$ и $\Theta_{\Lambda+k_0}(z)$ совпадут. Но тогда, еще раз используя выражение для римановых констант, получаем:

$$\begin{aligned}-k_\nu &\equiv \sum_{n=1}^{2}\int_{z_0}^{a_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) + \omega_\nu(\infty) \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{2}\int_{z_0}^{a_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) + k_0\omega_\nu(\infty) \pmod 1.\end{aligned}$$

Таким образом, мы опять получаем противоречие с исходным предположением об иррациональности значения $\omega_\nu(\infty)$.

Мы показали, что последовательность $\Theta_{\Lambda+k}(z)$ не может иметь "сквозных" нулей. Если же в каком-то месте этот ноль не сокращается (т.е. $\Theta_{\Lambda+k}(a) \neq 0$ для некоторого k), то мы сразу получим совпадение его с соответствующим нулем функции $\Theta^*_{\Lambda+k}(z)$, что нам и требуется. Это завершает доказательство теоремы.

Предположим, что оператор $A_{\mu^*} - A_\mu$ не является компактным. Как следует из теоремы Вейля–фон Неймана, эту некомпактность можно "исправить" некоторым унитарным преобразованием одного из операторов. Унитарно эквивалентным операторам соответствуют эквивалентные спектральные меры. Покажем, как "исправить" спектральную меру оператора A_{μ^*}, чтобы полученный оператор стал компактным возмущением исходного.

Следствие 3.2. *Пусть A_μ и A_{μ^*} – операторы Якоби из класса $\mathcal{S}(E)$. Рассмотрим оператор A_{μ^0}, соответствующий мере $\mu^0 = \chi\mu^*$, где функция χ определяется по формуле $\chi(x) = \exp(\tau_k)$, $x \in E_k$, а числа τ_k однозначно определяются из системы*

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{p}\tau_k\Delta_{E_\nu}\tilde{\omega}_k(z) = \mathcal{J}_\nu(\mu) - \mathcal{J}_\nu(\mu^*); \ \ \sum_{k=1}^{p}\tau_k = 0, \ \ \nu = 1, \dots, p.$$

Тогда $(A_\mu - A_{\mu^0}) \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$V(z) = \exp(\sum_{k=1}^{p}\tau_k(\omega_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z))),$$

где числа τ_k однозначно (см. [21]) определяются из системы

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{p}\tau_k\Delta_{E_\nu}\tilde{\omega}_k(z) = \mathcal{J}_\nu(\mu) - \mathcal{J}_\nu(\mu^*); \ \ \sum_{k=1}^{p}\tau_k = 0, \ \ \nu = 1, \dots, p.$$

Эта функция локально аналитична в области Ω и не имеет на ней нулей и полюсов. На каждом отрезке E_k модуль этой функции постоянен и равен некоторому положительному числу, причем произведение всех этих чисел равно единице. Рассмотрим функцию $\chi(x) = |V(x)| = \exp(\tau_k)$, $x \in E_k$. Если некоторая функция $f(x)$ удовлетворяет условию Сегё на E, то и функция $\chi(z)f(z)$ также будет ему удовлетворять. Функция $R_\chi(z)$ совпадает с функцией $V(z)$, причем $\frac{1}{4\pi}\Delta_{E_\nu}\arg R_\chi(z) = \mathcal{J}_\nu(\mu) - \mathcal{J}_\nu(\mu^*)$. Применяя пункт 1 теоремы 3.1 к операторам, соответствующим мерам μ и $\chi\mu^*$, получаем следствие 3.2.

Замечание 3.3. Каждый оператор $A_\mu \in \mathcal{S}(E)$ является компактным возмущением некоторого оператора $A_{\mu^0} \in \mathcal{S}(E)$, мера которого абсолютно непрерывна.

Это следует из предыдущего утверждения: достаточно в качестве A_{μ^*} взять произвольный оператор с абсолютно непрерывной мерой.

В заключение рассмотрим пример, поясняющий, как расположение дополнительных дискретных масс влияет на компактность соответствующего возмущения оператора Якоби. Пусть спектр оператора Якоби A является объединением двух симметрично расположенных отрезков действительной прямой: $\sigma(A) = [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$, $0 <$

$\alpha < \beta < +\infty$, а спектральная мера абсолютно непрерывна, и вес ее удовлетворяет условию Сегё. Добавим к мере конечный набор дискретных масс, сосредоточенных в симметрично расположенных точках $\pm z_j^*$ на действительной оси вне $\sigma(A)$. Если число добавленных масс четно, то соответствующее возмущение оператора A будет компактным, так как из условия симметричности отрезков следует, что $\omega_k(z_j^*) + \omega_k(-z_j^*) \equiv 0 \pmod 1$. В случае, когда добавляется нечетное количество масс, из условия симметричности их расположения следует, что одна из масс будет расположена в начале координат, для нее $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 1/2$, а для остальных точек по-прежнему $\omega_k(z_j^*)+\omega_k(-z_j^*) \equiv 0 \pmod 1$, и, следовательно, соответствующее возмущение оператора A не будет компактным. Кроме того, нетрудно показать, что в последнем случае возмущенный оператор оказывается компактным возмущением оператора $A^{(1)}$, где оператор $A^{(1)}$ соответствует матрице Якоби, которая получается из матрицы Якоби оператора A вычеркиванием первой строки и первого столбца.

Литература

1. А. И. Аптекарев, *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода.* — Матем. сб. **125 (167)**, 2(10) (1984), 231–258.
2. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов.* (1961).
3. Н. И. Ахиезер, *Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах.* — Докл. АН СССР **134**, No. 1 (1960), 9–12.
4. Б. А. Дубровин, *Тэта-функции и нелинейные уравнения.* — УМН **36**, 2(218) (1981), 11–80.
5. В. А. Калягин, А. А. Кононова, *Об асимптотике многочленов, ортогональных на системе дуг, по мере, имеющей дискретную часть.* — Алгебра и Анализ **21**, No. 2 (2009), 71–91.
6. В. А. Калягин, А. А. Кононова, *О компактных возмущениях предельно-периодического оператора Якоби.* — Математические заметки, принято к публикации (2008).
7. Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* Наука, М. (1988).
8. Е. А. Рахманов, *Об асимптотике отношения ортогональных многочленов.* — Матем.сб. **103(145)**, No. 2(6) (1977), 237–252.
9. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т.* 4: *Анализ операторов.* Мир, М. (1977).
10. Ю. Я. Томчук, *Ортогональные многочлены на системе интервалов числовой оси.* — Записки мех.-мат. ф-та Харьковского матем. общества **29**, No. 4 (1963), 93–128.
11. Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций.* Гостехиздат, М. (1948).

12. A. I. Aptekarev, V. Kaliaguine, W. Van Assche, *Criterion for the resolvent set of nonsymmetric tridiagonal operators.* — Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 2423–2430.
13. B. Beckermann, *Complex Jacobi matrices.* — J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 17–65.
14. B. Beckermann, V. A. Kaliaguine, A. A. Kononova, *Mass points and compact perturbation of finite zone Jacobi operator*, preprint.
15. D. Damanik, R. Killip, B. Simon, *Perturbations of orthogonal polynomials with periodic recursion coefficients*, preprint, http://arxiv.org/abs/math/0702388.
16. S. Denisov, *On Rakhmanov's theorem for Jacobi matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 847–852.
17. S. Denisov, B. Simon, *Zeros of orthogonal polynomials on the real line.* — J. Approx. Theory **121** (2003), 357–364.
18. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin (1966).
19. F. Peherstorfer, P. Yuditskii, *Asymptotic behavior of polynomials orthonormal on a homogeneous set* . — J. d'Analyse Mathématique **89**, No. 1 (2003), 113–154.
20. C. Remling, *The absolutely continuous spectrum of Jacobi matrices*, preprint, (arXiv:0706.1101).
21. H. Widom, *Extremal Polynomials Associated with a System of Curves and Arcs in the Complex Plane.* — Adv. in Mathem. **3**, No. 2 (1969), 127–232.

Kononova A. A. On compact perturbations of finite-zone Jacobi operators.

For a bounded Jacobi operator (a discrete analog of the Sturm-Liouville operator on the semi-axis), the compactness of a perturbation is investigated. The perturbation is produced by a change of the spectral measure (essential spectrum stays unchanged).

Нижегородский Государственный
Технический Университет
ул. Ковалишинская 30-170,
Нижний Новгород, 603155, Россия

E-mail: anya.kononova@gmail.com

Поступило 10 августа 2009 г.