Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 366, 2009 г.

Ю. С. Коломойцев

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С НЕПОЛНЫМ СПЕКТРОМ В L_p, $0 < p < 1$

Введение

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ – единичная окружность. Обозначим через L_p множество всех 2π-периодических функций f таких, что

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть A – собственное подмножество множества $\mathbb{Z}$. Тогда тригонометрическая система $\{e^{ikx}\}_{k \in A}$ не полна в пространстве интегрируемых функций. Совсем иначе дело обстоит в пространстве L_p, когда $0 < p < 1$. А. А. Талаляном в работе [1], по-видимому, впервые было показано, что существует бесконечное множество $B \subset \mathbb{Z}$ такое, что система $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus B}$ будет полна в пространстве L_p, $0 < p < 1$. Различные достаточные и необходимые условия полноты тригонометрической системы с пропусками были получены в работах [2–5]. Приведем здесь один из простых критериев полноты рассматриваемых систем [6].

Предложение А. *Пусть $0 < p < 1$ и множество $B = \{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$n_{k+1} - 2n_k + n_{k-1} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad n_{-k} = -n_k \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Система $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus B}$ полна в L_p тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k \to \infty} (n_{k+1} - n_k) = \infty. \tag{2}$$

Ключевые слова : наилучшее приближение, пространства L_p, $0 < p < 1$, тригонометрическая система с пропусками.

Цель настоящей работы – получить оценки скорости приближения функции полиномами, которые построены по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus B}$ для некоторых множеств B, удовлетворяющих условиям (1) и (2).

Введем необходимые обозначения. Пусть $\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}dx$, $k \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье интегрируемой функции f; $e_k = e_k(x) := e^{ikx}$; $\operatorname{spec} f := \{k \in \mathbb{Z} : \widehat{f}(k) \neq 0\}$ – спектр функции f; $\mathcal{T}_n$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n. Буквой C будем обозначать положительные константы, зависящие от указанных параметров. Константы C могут быть различными даже в одной строке.

Определим величину наилучшего приближения функции $f \in L_p$ полиномами со спектром во множестве A следующим образом:

$$E_n(f, A)_p := \inf_{T\in\mathcal{T}_n:\ \operatorname{spec} T\subset A} \|f - T\|_p.$$

Обозначим также $E_n(f)_p := E_n(f, \mathbb{Z})_p$.

В пространстве L_p, $0 < p < 1$, первые оценки величины наилучшего приближения $E_n(f)_p$ (теорема типа Джексона) через модуль непрерывности функции f были получены Э. А. Стороженко, В. Г. Кротовым и П. Освальдом в работе [7] и независимо В. И. Ивановым в [8]. В случае, когда $A \neq \mathbb{Z}$, величина $E_n(f, A)_p$ в большей степени зависит не от гладкости функции f, а от арифметической структуры множества A и спектра приближаемой функции, если функция f принадлежит L (см. ниже предложение 1 и следствие 1). В настоящей работе изучается поведение величины $E_n(f, A)_p$ для множеств A, обладающих определенными арифметическими свойствами.

Введем класс функций

$$H^{\alpha}_{1,p} := \{\, f \ :\ \|f\|_1 + \sup_{n\geqslant 1} n^{\alpha} E_{n-2}(f)_p \leqslant 1\},$$

где $E_{-1}(f)_p := \|f\|_p$.

Мы будем оценивать величины

$$E_n(H^{\alpha}_{1,p}, A)_p := \sup_{f\in H^{\alpha}_{1,p}} E_n(f, A)_p$$

в следующих случаях:

1) $A = \mathbb{Z} \setminus (-m, m)$, где $m \in \mathbb{N}$,

2) $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0, |n| \neq q^k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, где $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$,

3) $A = \{n \in \mathbb{Z} : |n| \neq k^s, k \in \mathbb{Z}_+\}$, где $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$.

В частности, в настоящей статье показано, что в каждом из трех случаев при достаточно малых значениях $\alpha > 0$

$$E_n(H^\alpha_{1,p}, A)_p \asymp \frac{1}{n^\alpha},$$

т. е., скорость наилучшего приближения функций полиномами со спектром во множестве A по существу не отличается от скорости наилучшего приближения полиномами с полным спектром. При достаточно больших значениях α ситуация существенно отлична, например, во втором случае оказывается, что

$$E_n(H^\alpha_{1,p}, A)_p \asymp n^{1-\frac{1}{p}}$$

(см. теоремы 1, 2 и 3).

В первом разделе статьи мы получим вспомогательные результаты, имеющие общий характер. Во втором разделе полученные результаты будут применены для оценки величины $E_n(f, A)_p$ в случае конкретных множеств A.

§1. Вспомогательные результаты

Следующее предложение показывает существенное отличие между величинами $E_n(f)_p$ и $E_n(f, A)_p$ при $A \neq \mathbb{Z}$.

Предложение 1. *Пусть $0 < p < 1$. Тогда*

(i) *если $A \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то для каждой функции $f \in L_2$ найдется $n_0 \geqslant 1$ такое, что*

$$n^{\frac{1}{p}-1} E_n(f, A)_p \geqslant |\widehat{f}(0)|, \qquad n \geqslant n_0;$$

(ii) *для любой последовательности $\sigma = \{\sigma_k\} \uparrow \infty$ найдется множество $B_\sigma \subset \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условиям (1) и (2) и такое, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n E_n(f, \mathbb{Z} \setminus B_\sigma)_p = \infty$$

для всех $f \in L_2$ таких, что $\widehat{f}(0) \neq 0$.

Доказательство. Пусть f – функция из L_2, а T – полином со спектром в $\mathbb{Z}\setminus\{qk\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $q\in\mathbb{N}, q\geqslant 2$. Тогда

$$\|f-T\|_p^p=\sum_{s=0}^{q-1}\int\limits_{\frac{2\pi s}{q}}^{\frac{2\pi(s+1)}{q}}|f(x)-T(x)|^p dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_0^{\frac{2\pi}{q}}\left|\sum_{s=0}^{q-1}\left\{f\left(x+\frac{2\pi s}{q}\right)-T\left(x+\frac{2\pi s}{q}\right)\right\}\right|^p dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_0^{\frac{2\pi}{q}}\left|q\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(qk)e^{iqkx}\right|^p dx=q^{p-1}\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(qk)e_k\right\|_p^p.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера и равенство Парсеваля, получим, что

$$\|f-T\|_p^p\geqslant 2\pi q^{p-1}\left\{|\widehat{f}(0)|^p-\left(\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(qk)|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\}. \tag{3}$$

Для доказательства утверждения (i) достаточно в неравенстве (3) взять $q=n$ и воспользоваться тем, что $\sum\limits_{k\neq 0}|\widehat{f}(nk)|^2\to 0$ при $n\to\infty$.

Докажем утверждение (ii). Для данной последовательности σ берем $B_\sigma=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{2^jk\}_{|k|\leqslant 2^{N_j}}$, где $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $\sigma_{2^{N_j}}>4^{j(1/p-1)}$, $j\in\mathbb{N}$. Очевидно, что множество B_σ удовлетворяет условиям (1) и (2).

Пусть $n\in\mathbb{N}$ – достаточно большое число. Тогда найдется $j_n\in\mathbb{N}$ такое, что $2^{N_{j_n}}\leqslant n<2^{N_{j_n+1}}$. Заметим, что $(\mathbb{Z}\setminus B_\sigma)\cap(-n,n)\cap\{2^{j_n+1}k\}_{k\in\mathbb{Z}}=\varnothing$. Таким образом, из неравенства (3) при $q=2^{j_n+1}$ следует, что

$$\sigma_n^p E_n(f,\mathbb{Z}\setminus B_\sigma)_p^p\geqslant 2^{(j_n-1)(1-p)}\left\{|\widehat{f}(0)|^p-\left(\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(2^{j_n+1}k)|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\}$$

для любой функции $f\in L_2$.

Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, учитывая при этом, что $\widehat{f}(0) \neq 0$, получим требуемое утверждение $\square$

Прежде чем сформулировать основную (рабочую) лемму статьи, введем необходимые обозначения. Пусть множество A – это $\mathbb{Z} \setminus \{n_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $n_k \in \mathbb{Z}$, $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ и $n_{-k} = -n_k$ при $k \in \mathbb{N}$; пусть $N \in \mathbb{N}$ и пусть $\alpha_N = \alpha_N(A) := \operatorname{card}\{\, k \in \mathbb{N} \setminus A \ : \ k < 2N \,\}$.

Будем предполагать, что при данном выборе N найдутся целое число $\beta_N \in [0, \alpha_N - 1]$ и последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\beta_N+1}$, зависящих от N таких, что:

a) $n_l \not\equiv \pm n_k \pmod{m_k}$ для всех $k = 0, \dots, \beta_N$ и $l = 0, \dots, \alpha_N$, $l \neq k$;

b) $n_l \not\equiv \pm n_k \pmod{m_{\beta_N+1}}$ для всех $k = \beta_N + 1, \dots, \alpha_N$ и $l = 0, \dots, \alpha_N$, $l \neq k$.

Положим также $m_{-k} := m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначим $x_{j,n} = \frac{2\pi j}{4n+1}$ и

$$\widetilde{f}_{k,n}(t) := \frac{1}{4n+1} \sum_{j=0}^{4n} f\left(x_{j,n} + t\right) e^{-ik\left(x_{j,n}+t\right)}.$$

Лемма 1. *Пусть $f \in L_p$, $0 < p < 1$. При введенных выше обозначениях справедливо неравенство*

$$E_{2N}(f, A)_p \leqslant C \Bigg\{ E_N(f)_p + \Bigg[\sum_{|k| \leqslant \beta_N} \Big(\frac{m_k}{2N - n_k}\Big)^{1-p} \|\widetilde{f}_{n_k,N}\|_p^p$$

$$+ \Big(\frac{m_{\beta_N+1}}{2N - n_{\alpha_N}}\Big)^{1-p} \Bigg\| \sum_{\beta_N < |k| \leqslant \alpha_N} |\widetilde{f}_{n_k,N}| \Bigg\|_p^p \Bigg]^{\frac{1}{p}} \Bigg\}, \tag{4}$$

где C – константа, зависящая только от p.

Доказательство. Определим ядро типа Валле–Пуссена

$$V_n(x) := \sum_{k=-2n}^{2n} g\left(\frac{k}{n}\right) e^{ikx},$$

где g – функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, $g(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $g(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$. Известно (см., например, [3]), что

$$\|V_n\|_p \leqslant C n^{1-\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

где C – константа, не зависящая от n.

Положим

$$K_{n_k,N}(x) := \begin{cases} e^{in_k x} V_{\left[\frac{2N-n_k}{2m_k}\right]}(m_k x), \text{ если } k \in [-\beta_N, \beta_N]; \\ e^{in_k x} V_{\left[\frac{2N-n_{\alpha_N}}{2m_{\beta_N+1}}\right]}(m_{\beta_N+1} x), \text{ если } k \in [-\alpha_N, \alpha_N] \setminus [-\beta_N, \beta_N], \end{cases}$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

Из условий a) и b) следует, что

$$\operatorname{spec} K_{n_k,N} \subset ((-2N, 2N) \cap A) \cup \{n_k\}. \tag{6}$$

Далее нам понадобится семейство линейных полиномиальных операторов

$$W_n(f; x, t) := \frac{1}{4n+1} \sum_{j=0}^{4n} f(x_{j,n} + t) V_n(x - x_{j,n} - t),$$

введенных К. В. Руновским (см., например, [9]). Известно (см. [9], [10, Гл. 4]), что для любой функции $f \in L_p$, $0 < p < 1$,

$$\int_{\mathbb{T}} \|f - W_n(f; \cdot, t)\|_p^p dt \leqslant C E_n(f)_p^p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где C – константа, зависящая только от p.

Положим

$$T_N(f; x, t) := W_N(f; x, t) - \sum_{k=-\alpha_N}^{\alpha_N} g\left(\frac{n_k}{N}\right) \widetilde{f}_{n_k,N}(t) K_{n_k,N}(x).$$

Поскольку $\widehat{K}_{n_k,N}(n_k) = 1$, из (6) получим, что $\operatorname{spec} T_N \subset (-2N, 2N) \cap A$.

Далее,

$$2\pi E_{2N}(f, A)_p^p \leqslant \int_{\mathbb{T}} \|f - T_N(f; \cdot, t)\|_p^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{T}} \|f - W_N(f; \cdot, t)\|_p^p dt + \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{|k| \leqslant \alpha_N} g\left(\frac{n_k}{N}\right) \widetilde{f}_{n_k,N}(t) K_{n_k,N}(\cdot) \right\|_p^p dt. \tag{8}$$

Используя неравенство (5), находим

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \Big\| \sum_{|k|\leqslant\alpha_N} g\left(\frac{n_k}{N}\right) \widetilde{f}_{n_k,N}(t) K_{n_k,N}(\cdot)\Big\|_p^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k|\leqslant\beta_N} \big\|V_{\left[\frac{2N-n_k}{2m_k}\right]}\big\|_p^p \|\widetilde{f}_{n_k,N}\|_p^p + \big\|V_{\left[\frac{2N-n_{\alpha_N}}{2m_{\beta_N+1}}\right]}\big\|_p^p \Big\| \sum_{\beta_N<|k|\leqslant\alpha_N} |\widetilde{f}_{n_k,N}|\Big\|_p^p \leqslant$$

$$\leqslant C\Big\{ \sum_{|k|\leqslant\beta_N} \left(\frac{2m_k}{2N-n_k}\right)^{1-p} \|\widetilde{f}_{n_k,N}\|_p^p +$$

$$+ \left(\frac{2m_{\beta_N+1}}{2N-n_{\alpha_N}}\right)^{1-p} \Big\| \sum_{\beta_N<|k|\leqslant\alpha_N} |\widetilde{f}_{n_k,N}|\Big\|_p^p \Big\}. \tag{9}$$

Таким образом, из (8), (7) и (9) получаем требуемое неравенство. □

Следствие 1. *Пусть $f \in L$ и $0 < p < 1$. При введенных выше обозначениях справедливо неравенство*

$$E_{2N}(f,A)_p \leqslant C\Big\{ E_N(f)_p + H_{N,p} E_N(f)_1 +$$

$$+ \Big[\sum_{|k|\leqslant\beta_N} \left(\frac{m_k}{2N-n_k}\right)^{1-p} |\widehat{f}(n_k)|^p +$$

$$+ \left(\frac{m_{\beta_N+1}}{2N-n_{\alpha_N}}\right)^{1-p} \Big(\sum_{\beta_N<|k|\leqslant\alpha_N} |\widehat{f}(n_k)|\Big)^p \Big]^{\frac{1}{p}} \Big\}, \tag{10}$$

где

$$H_{N,p} := \Big[\sum_{|k|\leqslant\beta_N} \left(\frac{m_k}{2N-n_k}\right)^{1-p} + \left(\frac{m_{\beta_N+1}}{2N-n_{\alpha_N}}\right)^{1-p} (\alpha_N-\beta_N)^p \Big]^{\frac{1}{p}},$$

C – константа, зависящая только от p.

Доказательство. Неравенство (10) следует из леммы 1 и утверждения (i) леммы 2, приведенной ниже. □

Лемма 2. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $f \in L$, то*

$$\|\widetilde{f}_{k,n}\|_1 \leqslant |\widehat{f}(k)| + CE_n(f)_1, \qquad |k| \leqslant n, \tag{11}$$

где C – абсолютная положительная константа;

(ii) *если $0 < p < 1$, $\alpha > 0$ и $f \in H^{\alpha}_{1,p}$, то*

$$\|\widetilde{f}_{k,n}\|_1 \leqslant C(|k|+1)^{-(\alpha+1-\frac{1}{p})_+}, \qquad |k| \leqslant n, \tag{12}$$

где $x_+ = x$, если $x \geqslant 0$, и $x_+ = 0$, если $x < 0$, а C – константа, зависящая только от α и p.

Доказательство. Пусть

$$T_{2n-1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(x-t)V_n(t)dt,$$

где V_n – ядро типа Валле–Пуссена, определенное в доказательстве леммы 1. Известно, что $\|f - T_{2n-1}\|_1 \leqslant CE_n(f)_1$, где константа C не зависит от f и n.

Из равенства

$$\widetilde{f}_{k,n}(t) = \frac{1}{4n+1}\sum_{j=0}^{4n}\{f(x_{j,n}+t) - T_{2n-1}(x_{j,n}+t)\}\, e^{-ik(x_{j,n}+t)} + \widehat{f}(k)$$

находим

$$\|\widetilde{f}_{k,n}\|_1 \leqslant \|f - T_{2n-1}\|_1 + |\widehat{f}(k)| \leqslant CE_n(f)_1 + |\widehat{f}(k)|.$$

Докажем утверждение (ii). При $\alpha \leqslant \frac{1}{p} - 1$ имеем $\|\widetilde{f}_{k,n}\|_1 \leqslant \|f\|_1 \leqslant 1$.

Рассмотрим случай $\alpha > \frac{1}{p} - 1$. Для каждой интегрируемой функции f справедливо следующее соотношение между величинами наилучшего приближения данной функции:

$$E_n(f)_1 \leqslant C\left\{(n+1)^{\frac{1}{p}-1}E_n(f)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-2}E_k(f)_p\right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где C – константа, зависящая только от p (см. [11]).

Из неравенства (13) следует, что $E_n(f)_1 \leqslant Cn^{\frac{1}{p}-1-\alpha}$. Заметим еще, что $|\widehat{f}(\pm k)| \leqslant E_{k-1}(f)_1$, $k \in \mathbb{N}$. Применив полученные оценки к неравенству (11), мы докажем (12). $\square$

Лемма 3. *Пусть $f \in L_p$, $0 < p < 1$, $A \subset \mathbb{Z}$, h_n – полином со спектром в $(\mathbb{Z} \setminus A) \cap [-n, n]$ и*

$$H_n(f,t) := \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(t - x_{j,n}) h_n(x_{j,n}), \quad x_{j,n} = \frac{2\pi j}{2n+1}.$$

Тогда

$$\|H_n(f,\cdot)\|_p \leqslant C n^{\frac{1}{p}-1} \|h_n\|_p E_n(f,A)_p, \tag{14}$$

где C – константа, зависящая только от p.

Доказательство. Пусть T_n – произвольный полином со спектром в $A \cap [-n, n]$. Тогда

$$H_n(f,t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} \{f(t - x_{j,n}) - T_n(t - x_{j,n})\} h_n(x_{j,n}). \tag{15}$$

Из равенства (15) получим, что

$$\|H_n(f,\cdot)\|_p^p \leqslant (2n+1)^{-p} \|f - T_n\|_p^p \sum_{j=0}^{2n} |h_n(x_{j,n})|^p.$$

Остается только воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} |h_n(x_{j,n})|^p \leqslant C \|h_n\|_p^p$$

(см., например, [12]). □

Лемма 4. *Пусть $0 < p < 1$ и $\alpha > 0$. Тогда существует функция $f_\alpha \in H_{1,p}^\alpha$ такая, что*

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

где $\asymp$ – двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от n.

Доказательство. В качестве функции f_α возьмем функцию

$$f_\alpha(x) := \gamma_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha k} e^{i 2^k x}.$$

Оценка сверху в (16) очевидна. Константу γ_α выберем так, чтобы $f \in H^\alpha_{1,p}$.

Для того, чтобы получить оценку снизу, воспользуемся леммой 3, в которой положим $A = [-2^n, 2^n] \cap \mathbb{Z}$ и $h_N(t) = e^{i2^{n+1}t} V_{2^{n-1}}(t)$, где $N = 3 \cdot 2^n$, а $V_{2^{n-1}}$ – ядро типа Валле-Пуссена (см. доказательство леммы 1). Для функции f_α и данного полинома h_N получим, что

$$H_N(f_\alpha, t) = \gamma_\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k 2^{-\alpha k} e^{i2^k t},$$

где $\lambda_k = g\left(\frac{l-2^{n+1}}{2^{n-1}}\right)$, если $2^k \equiv l \pmod{(2N+1)}$ при $2^n < l < 3 \cdot 2^n$ и $\lambda_k = 0$ в противном случае.

Хорошо известно, что если $\operatorname{spec} f \subset [0, \infty)$, то $|\widehat{f}(0)| \leqslant \|f\|_p$ (см., например, [4]). Следовательно,

$$\|H_N(f_\alpha, \cdot)\|_p = \|e_{-2^{n+1}} H_N(f_\alpha, \cdot)\|_p \geqslant \gamma_\alpha 2^{-\alpha(n+1)}. \tag{17}$$

Заметим, что $E_{2^n}(f)_p = E_N(f, A)_p$. Таким образом, из неравенств (14), (5) и (17) получим, что

$$E_{2^n}(f_\alpha)_p \geqslant C N^{\frac{1}{p}-1} \|h_N\|_p E_{2^n}(f_\alpha)_p \geqslant C \gamma_\alpha 2^{-\alpha(n+1)}.$$

Лемма доказана. □

§2. Оценки приближения для конкретных множеств A

В настоящем разделе будут получены оценки величины $E_n(f, A)_p$ для конкретных множеств A.

2.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $M = \mathbb{Z} \setminus (-m, m)$.

Лемма 5. *Пусть $f \in L_p$, $0 < p < 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$. Тогда*

$$E_{2n}(f, M)_p \leqslant C \left\{ E_n(f)_p + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \left\| \sum_{|k|<m} |\widetilde{f}_{k,n}| \right\|_p \right\}, \tag{18}$$

где C – константа, зависящая только от p.

Доказательство. Для доказательства неравенства (18) достаточно в лемме 1 взять $N = n$, $\beta_N = 0$, а $m_0 = m_1 = 2m$. □

Теорема 1. *Пусть* $0 < p < 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $m < n$. *Тогда*

(i) *если* $0 < \alpha < \frac{1}{p} - 1$ *и* $m < n^{1-p-\alpha p}$, *то*

$$E_n(H^\alpha_{1,p}, M)_p \asymp \frac{1}{n^\alpha},$$

(ii) *если* $\frac{1}{p} - 1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{p}$, *то*

$$C_1 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \leqslant E_n(H^\alpha_{1,p}, M)_p \leqslant C_2 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^{m} k^{\frac{1}{p}-1-\alpha},$$

(iii) *если* $\alpha > \frac{1}{p}$, *то*

$$E_n(H^\alpha_{1,p}, M)_p \asymp \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1},$$

где $\asymp$ *– двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от* p *и* α, *а* C_1 *и* C_2 *– положительные константы, зависящие от* p *и* α.

Доказательство. Пусть f – функция из $H^\alpha_{1,p}$. Из леммы 5, используя неравенство Гёльдера и неравенство (12), получим, что

$$E_{2n}(f, M)_p \leqslant C\left\{E_n(f)_p + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \left\| \sum_{|k|<m} |\widetilde{f}_{k,n}| \right\|_1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{n^{-\alpha} + \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^{m} k^{-(\alpha+1-\frac{1}{p})_+}\right\}.$$

Отсюда нетрудно получить оценки сверху в утверждениях (i)-(iii).

Оценка снизу в утверждении (i) следует из леммы 4. Для того, чтобы получить оценку снизу в (ii) и (iii), воспользуемся леммой 3. Возьмем в лемме 3 $f(x) \equiv 1$, а $h_n(x) = V_{[\frac{m}{2}]}(x)$, где $V_{[\frac{m}{2}]}$ – ядро типа Валле–Пуссена (см. доказательство леммы 1). Тогда из неравенств (14) и (5) получим, что

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1} \leqslant CE_n(1, M)_p,$$

где C – константа, зависящая только от p. Отсюда следуют оценки снизу в (ii) и (iii).

Теорема доказана. □

2.2. Пусть q – натуральное число, $q \geqslant 2$, $n_k^{(q)} = q^{k-1}$ при $k \in \mathbb{N}$ и $n_{-k}^{(q)} = -n_k^{(q)}$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Положим $Q = \mathbb{Z} \setminus \{n_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Для множеств данного вида справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть $f \in L_p$, $0 < p < 1$, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$E_{2q^n}(f,Q)_p \leqslant C\left\{E_{q^n}(f)_p + q^{-n(\frac{1}{p}-1)}F_{q,n}(f)_p\right\}, \tag{19}$$

где

$$F_{q,n}(f)_p := \left\{\|\widetilde{f}_{0,q^n}\|_p^p + \sum_{k=0}^{[\log_q n]_+} q^{(1-p)k}\|\widetilde{f}_{\pm q^k,q^n}\|_p^p \right.$$
$$\left. + n^{1-p}\left\|\sum_{k=[\log_q n]_+ +1}^{n} |\widetilde{f}_{\pm q^k,q^n}|\right\|_p^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

($[x]_+$ — *целая часть числа x, если $x > 0$, и $[x]_+ = 0$, если $x \leqslant 0$*), а C – *константа, зависящая только от p и q.*

Здесь и далее запись вида $\sum\limits_k a_{\pm k}$ понимается как сумма $\sum\limits_k\{a_k + a_{-k}\}$.

Для натуральных взаимно простых чисел m и q введем следующие величины

$$\operatorname{ord}_m^{\pm}(q) := \inf\{\,\delta \in \mathbb{N} : q^\delta \equiv \pm 1 \pmod m\,\}.$$

Величину $\operatorname{ord}_m^{+}(q)$ называют порядком (показателем) числа q по модулю m.

Для доказательства леммы 6 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть m – простое нечетное число, взаимно простое с $q \geqslant 2$. Тогда найдется натуральное число $k_0 \geqslant 3$ такое, что*

$$\operatorname{ord}_{m^k}^{\pm}(q) \geqslant m^{k-k_0}, \quad k = k_0, k_0+1, \ldots.$$

Доказательство. Число k_0 выбираем из условия $q^{m-1} \not\equiv 1 \pmod{m^k}$ при $k \geqslant k_0 \geqslant 3$.

Докажем сначала, что при данном выборе k_0 справедливо неравенство

$$\operatorname{ord}_{m^k}^{+}(q) \geqslant m^{k-k_0+1}, \qquad k = k_0-1, k_0, \ldots \tag{20}$$

Неравенство (20) будем доказывать индукцией по k. Пусть $\operatorname{ord}_{m^\nu}^{+}(q) \geqslant m^{\nu-k_0+1}$ при всех $k_0 - 1 \leqslant \nu \leqslant k$. Предположим, что найдется $m' \geqslant 1$ такое, что

$$\operatorname{ord}_{m^{k+1}}^{+}(q) = m^{k+2-k_0} - m'. \tag{21}$$

Тогда из теоремы Эйлера следует, что $m^k(m-1) \equiv 0 \pmod{(m^{k+2-k_0} - m')}$. Это сравнение может выполняться либо только при $m' = m^{k+2-k_0} - m + 1$, либо только при $m' \equiv 0 \pmod{m}$. Но, в силу выбора k_0, первый случай невозможен, поэтому далее полагаем $m' = mm_0$ при некотором $m_0 \in \mathbb{N}$.

Таким образом, из (21) вытекает сравнение $q^{m(m^{k-k_0+1}-m_0)} \equiv 1 \pmod{m^{k+1}}$ или, что то же самое,

$$(q^{m^{k-k_0+1}-m_0} - 1) \sum_{\nu=0}^{m-1} q^{\nu(m^{k-k_0+1}-m_0)} \equiv 0 \pmod{m^{k+1}}.$$

Из предположения индукции следует, что $q^{m^{k-k_0+1}-m_0} \not\equiv 1 \pmod{m^k}$. Поэтому показав, что

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} q^{\nu(m^{k-k_0+1}-m_0)} \not\equiv 0 \pmod{m^2}, \tag{22}$$

мы получим противоречие. Но (22) следует из того, что сравнение $f(x) := \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \equiv 0 \pmod{m^2}$ не имеет решений. Действительно, единственным решением сравнения $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ являются числа $x \equiv 1 \pmod{m}$ (см., например, [13, с.163]). Но, поскольку $f'(1) \equiv 0 \pmod{m}$, а $f(1) \not\equiv 0 \pmod{m^2}$, мы получим, что среди чисел $x \equiv 1 \pmod{m}$ нет ни одного числа, удовлетворяющего сравнению $f(x) \equiv 0 \pmod{m^2}$ (см., например, [13, с.139]).

Докажем теперь, что

$$\operatorname{ord}^-_{m^k}(q) \geqslant m^{k-k_0}, \quad k = k_0, k_0+1, \ldots. \tag{23}$$

Требуемое неравенство следует из (20). Действительно, если предположить, что (23) неверно, то мы сможем найти $m'' \geqslant 1$ такое, что $q^{m^{k-k_0}-m''} \equiv -1 \pmod{m^k}$ и, следовательно, $q^{2(m^{k-k_0}-m'')} \equiv 1 \pmod{m^k}$. Но это противоречит неравенству (20), так как $m^{k-k_0+1} > 2(m^{k-k_0} - m'')$.

Лемма доказана. □

Доказательство леммы 6. Для доказательства леммы воспользуемся леммой 1, в которой соответствующим образом подбираем β_N и последовательность $\{m_k\}_{k=0}^{\beta_N+1}$. Мы делаем следующий выбор:

$$N = q^n, \quad \beta_N = [\log_q n]_+;$$

$$m_k = q^k \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, \beta_N;$$
$$m_0 = m, \quad m_{\beta_N+1} = m^{d_n},$$

где m – простое нечетное число, взаимно простое с q, $d_n = [\log_m n]_+ + k_0 + 2$, k_0 – число из леммы 7 при данном выборе m и q.

Поскольку $q^l \not\equiv 0 \pmod m$ и $q^l \not\equiv \pm q^k \pmod{q^{k+1}}$ при $l \neq k$, мы сразу получаем выполнимость условия a) для последовательности $\{n_k^{(q)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Проверим, что условие b) также имеет место. Пусть $l = 1, \dots, n$, а $k = 0, \dots, l-1$. Тогда $q^l \not\equiv \pm q^k \pmod{m^{d_n}}$ поскольку, согласно лемме 7, $\operatorname{ord}^{\pm}_{m^{d_n}}(q) \geqslant m^{d_n - k_0} > l - k$.

Остается подставить выбранные величины в неравенство (4) и выполнить элементарные оценки.

Лемма 6 доказана. □

Теорема 2. *Пусть $0 < p < 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

(i) *если $0 < \alpha < \frac{1}{p} - 1$, то*

$$E_n(H^\alpha_{1,p}, Q)_p \asymp \frac{1}{n^\alpha};$$

(ii) *если $\frac{1}{p} - 1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{p} - 2$, то*

$$C_1 n^{1-\frac{1}{p}} \leqslant E_n(H^\alpha_{1,p}, Q)_p \leqslant C_2 \ln(n+1)^{\frac{1}{p}} n^{1-\frac{1}{p}};$$

(iii) *если $\alpha > \frac{2}{p} - 2$, то*

$$E_n(H^\alpha_{1,p}, Q)_p \asymp n^{1-\frac{1}{p}},$$

где $\asymp$ – двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от p, q и α, а C_1 и C_2 – положительные константы, которые зависят от p и q.

Доказательство. Для функции $f \in H^\alpha_{1,p}$ рассмотрим величину $F_{q,n}(f)_p$ из леммы 6. Используя неравенство Гёльдера и неравенство (12) получим, что

$$F_{q,n}(f)_p^p \leqslant C\Bigg\{1 + \sum_{k=0}^{[\log_q n]_+} q^{k(1-p-p(\alpha+1-\frac{1}{p})_+)} + n^{1-p}\Bigg(\sum_{k=[\log_q n]_+}^{n} q^{-k(\alpha+1-\frac{1}{p})_+}\Bigg)^p\Bigg\},$$

откуда найдем следующие оценки:

$$F_{q,n}(f)_p \leqslant C \begin{cases} n^{\frac{1}{p}}, \text{ если } 0 < \alpha \leqslant \frac{2}{p} - 2; \\ 1, \text{ если } \frac{2}{p} - 2 < \alpha. \end{cases} \tag{24}$$

Из неравенств (19) и (24) нетрудно получить верхние оценки в утверждениях (i)–(iii).

Оценка снизу в утверждении (i) следует из леммы 4, а в утверждениях (ii) и (iii) соответствующую оценку можно получить, например, из предложения 1 (i). □

2.3. Пусть s – натуральное число, $s \geqslant 2$. Рассмотрим множество $S = \mathbb{Z} \setminus \{n_k^{(s)}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где $n_k^{(s)} = k^s$ при $k \in \mathbb{N}$ и $n_{-k}^{(s)} = -n_k^{(s)}$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть $f \in L_p$, $0 < p < 1$, и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$E_{2n^s}(f, S)_p \leqslant C \left\{ E_{n^s}(f)_p + n^{(s-1)(1-\frac{1}{p})} \left\| \sum_{k=0}^{[2^{1/s}n]} |\widetilde{f}_{\pm k^s, n^s}| \right\|_p \right\},$$

где C – константа, зависящая только от p.

Доказательство. Мы будем рассматривать случай, когда s – нечетное число (для четных s доказательство аналогично указанной ниже схеме).

Пусть μ – простое число вида $2sk + s_0$, где s_0 – нечетное число, взаимно простое с s и такое, что $s_0 - 1$ также является взаимно простым с s. Тогда, при условии $a^s \not\equiv 0 \pmod{\mu}$, сравнение $x^s \equiv a^s \pmod{\mu}$ имеет одно решение $x \equiv a \pmod{\mu}$ (см., например, [13, с. 163]).

Далее, согласно закону распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, существует константа λ, зависящая от s, такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется простое число μ_n указанного выше вида, такое, что $3n \leqslant \mu_n \leqslant \lambda n$.

Таким образом, получаем, что $l^s \not\equiv k^s \pmod{\mu_n}$ при $l, k = -[2^{1/s}n], \ldots, [2^{1/s}n]$ и $k \neq l$.

Теперь можно воспользоваться леммой 1, в которой возьмем $N = n^s$, $\beta_N = 0$ и $m_0 = m_1 = \mu_n$. □

Теорема 3. *Пусть* $0 < p < 1$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

(i) *если* $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{p} - 1 - \frac{1}{sp}$, *то*

$$E_n(H^\alpha_{1,p}, S)_p \asymp \frac{1}{n^\alpha};$$

(ii) *если* $\alpha > \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{s}$, *то*

$$C_2 n^{1-\frac{1}{p}} \leqslant E_n(H^\alpha_{1,p}, S)_p \leqslant C_2 n^{(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{s})},$$

где $\asymp$ *– двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от* p, s *и* α, *а* C_1 *и* C_2 *– положительные константы, которые зависят от* p *и* s.

Доказательство.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теорем 1 и 2. Для доказательства оценок сверху достаточно воспользоваться леммой 8 и неравенством (12).

Оценка снизу в утверждении (i) следует из леммы 4, а в утверждении (ii) соответствующая оценка следует из предложения 1 (i). □

Замечание. Неравенство сверху в утверждении (ii) теоремы 3 является в некотором смысле точным. Например, для функции $g_{n,s}(x) := \cos(n-1)^s x$ нетрудно показать, что $E_{n^s}(g_{n,s}, S)_p \asymp n^{(1-\frac{1}{p})(s-1)}$ (см., например, [3]).

Литература

1. А. А. Талалян, *Представление функций классов* $L_p[0,1]$, $0 < p < 1$, *ортогональными рядами.* — Acta Math. Academ. Sci. Hungar. **21** №1–2 (1970), 1–9.
2. J. H. Shapiro, *Subspaces of* $L_p(G)$ *spanned by characters:* $0 < p < 1$. — Isr. J. Math. **29**, №2–3 (1978), 248–264.
3. В. И. Иванов, В. А. Юдин, *О тригонометрической системе в* $L_p, 0 < p < 1$. — Мат. заметки **28**, №6 (1980), 859–868.
4. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes.* — Lecture Notes in Math. **864** (1981), Springer-Verlag, 1–89.
5. В. И. Иванов, *Представление измеримых функций кратными тригонометрическими рядами.* — Тр. МИАН СССР **164** (1983), 100–123.
6. Ю. С. Коломойцев, *Полнота тригонометрической системы в классах* $\varphi(L)$. — Мат. заметки **81**, №5 (2007), 707–712.
7. Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, *Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах* L_p, $0 < p < 1$. — Матем. сб. **98** (1975), 395–415.

8. В. И. Иванов, *Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$.* — Мат. заметки **18**, №5 (1975), 641-658.
9. К. В. Руновский, *О семействе линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$.* — Матем. сб. **184**, №2 (1993), 145–160.
10. R. M. Trigub and E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions.* Kluwer (2004).
11. Э. А. Стороженко, *Теоремы вложения и наилучшие приближения.* — Матем. сб. **97**, №2 (1975), 230–241.
12. В. В. Пеллер, *Описание операторов Ганкеля класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения.* — Матем. сб. **122**, №4 (1983), 481–510.
13. А. А. Бухштаб, *Теория чисел.* — Просвещение, М. (1966).

Kolomoitsev Yu. S. On approximation of functions by trigonometric polynomials with incomplete spectrum in L_p, $0 < p < 1$.

Suppose B is a subset of integers that possesses certain arithmetic properties. Estimates of the best approximation of functions in the space L_p, $0 < p < 1$, by trigonometric polynomials that are constructed by the system $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus B}$ are obtained.

Институт Прикладной
Математики и Механики
НАН Украины
83114, Донецк
ул. Розы Люксембург, 74
Украина

E-mail: kolomus1@mail.ru

Поступило 27 ноября 2008 г.