Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 366, 2009 г.

В. М. Каплицкий

ПРИЗНАКИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО УБЫВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

В работе рассмотрен вопрос о достаточных условиях, при которых всякая собственная функция интегрального оператора

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_{\Omega} k(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

$K\colon L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$ (Ω – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$), соответствующая ненулевому собственному значению, удовлетворяет условию экспоненциального убывания на бесконечности либо в смысле принадлежности весовому пространству $L_p(\Omega, e^{\delta|x|})$ при некотором $\delta > 0$, либо в смысле существования поточечной оценки вида:

$$|\varphi(x)| \le Ce^{-\delta|x|} \quad \text{при почти всех} \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, $|x|$ – евклидова норма вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Мы рассматриваем случай ядер $k(x,y)$, удовлетворяющих следующему условию:

$$k(x,y) = \frac{c(x,y)}{|x-y|^{\beta}}\, e^{-\alpha|x-y|}, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$, $0 \le \beta < n$, $c(x,y) \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$. Этот класс ядер обозначается через $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega \times \Omega)$. Отдельно рассматривается класс $\mathcal{K}_\alpha(\Omega \times \Omega) = \mathcal{K}_{\alpha,0}(\Omega \times \Omega)$, т.е. ядра вида (2), не имеющие особенности на диагонали $x = y$.

Ключевые слова : Ф-точка, область непрерывности, интегральный оператор.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00329-а.

Основной результат §2 – теорема 2.1 – утверждает, что если единица принадлежит области нётеровости оператора K с ядром $k(x,y) \in \mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega\times\Omega)$, то любое решение уравнения $\varphi = K\varphi$ лежит в некотором пространстве $L_p(\Omega, e^{\delta|x|})$ при подходящем $\delta > 0$. Этот результат выводится из теоремы И. Ц. Гохберга о полуустойчивости дефектных чисел аналитической нётеровой оператор-функции, которая применяется к аналитической оператор-функции $T(\lambda) = U^{-1}(\lambda)TU(\lambda)$, $T = I-K$, где $U(\lambda)$ – оператор умножения на функцию $e^{i\lambda|x|}$. Рассмотрен вопрос о дополнительных условиях на ядро $k(x,y)$, при которых из вложения в весовое пространство $L_p(\Omega, e^{\delta|x|})$ следует поточечная оценка вида (1) с параметром $0 < \delta_1 < \delta$. Показано, что это имеет место, если $k(x,y) \in \mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega\times\Omega)$ при $\beta < \frac{n}{p'}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$, $p > 1$. Отметим, что для произвольного оператора K с ядром рассматриваемого вида экспоненциальное убывание, вообще говоря, не имеет места. Более того, нетрудно построить примеры операторов K с ядрами класса $\mathcal{K}_\alpha(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$ и таких, что оператор $I-K$ – не нётеров, для которых уравнение $\varphi = K\varphi$ обладает решениями с любым поведением на бесконечности, совместимым с условием $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^+)$.

Вопрос о характере убывания на бесконечности собственных функций стационарного уравнения Шрёдингера исследован в [1–5]. В [3] экспоненциальные оценки (оценки типа Агмона) установлены для широкого класса эллиптических операторов второго порядка, включающего в себя N-частичные операторы Шрёдингера. Метод получения экспоненциальной оценки, предложенный в статье, близок к методу, использованному в [1] (см. §XIII.11, лемма O'Коннора) для доказательства экспоненциального убывания собственных функций оператора Шрёдингера, однако в [1] для обоснования локального постоянства спектра и размерностей собственных подпространств операторов типа $T(\lambda)$ привлекались специальные результаты теории аналитических возмущений самосопряжённых операторов. Отметим, что исследуемые в [1–5] задачи могут быть сведены к эквивалентному интегральному уравнению (однородному уравнению типа Липпмана–Швингера). Одна общая теорема о весовой оценке собственной функции интегрального оператора с ядром Гильберта–Шмидта получена Б. Саймоном ([5, стр. 149]). В последней части работы рассмотрены некоторые приложения результатов §2 к одномерным интегральным уравнениям типа свёртки со стабилизирующимися или осциллирующими коэффициентами. Даётся оценка скорости экспоненциального убывания собственных функций (т.е. оценка параметра δ в (1)) в зависимости от ширины полосы нётеровости аналитической оператор-функции $T(\lambda)$. В частном случае оператора Винера–Хопфа эта оценка согласуется с асимптотическими формулами М. Г. Крейна для решений однородного уравнения Винера–Хопфа с экспоненциально убывающим ядром (см. [7]).

§1. Теорема о полуустойчивости дефектных чисел аналитической оператор-функции

В работе [6] доказаны теоремы о полуустойчивости дефектных чисел аналитической оператор-функции со значениями во множестве нётеровых операторов. Здесь мы приведём некоторые из этих результатов в удобной для нас форме. Пусть G – область в $\mathbb{C}$, B – банахово пространство и $A(\lambda)\colon G \to \mathcal{L}(B)$ – аналитическая оператор-функция со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов в B.

Теорема 1 ([6, с. 61 и 64])**.** *Пусть $A(\lambda)$ – аналитическая оператор-функция в области G, и пусть для каждой точки $\lambda \in G$ оператор $A(\lambda)$ является Φ-оператором. Тогда для любой точки $\lambda_0 \in G$ найдется проколотый круг $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ такой, что $\alpha(\lambda) = \dim\ker A(\lambda) = k$ при $\lambda \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(\lambda_0)$.*

Следующая теорема, также доказанная в [6], уточняет структуру множества точек области G, в которых $\alpha(\lambda) \neq k$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1*. Тогда всюду в области G, за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, функция $\alpha(\lambda)$ имеет постоянное значение $\alpha(\lambda) = k$. В упомянутых изолированных точках имеет место неравенство $\alpha(\lambda) > k$.*

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется Φ-точкой оператора A, если оператор $A - \lambda I$ является нётеровым (Φ-оператором).

Множество Φ-точек оператора A называется областью нётеровости оператора A и обозначается через Φ_A. Свойства области нётеровости ограниченного линейного оператора изучены в [7].

§2. Ядра класса $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega \times \Omega)$

Пусть Ω – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $k(x, y) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию (2). В этом случае будем писать $k(x,y) \in \mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega \times \Omega)$. Из условия (2) следует неравенство:

$$|k(x,y)| \le Ca(x-y), \quad x,y \in \Omega,$$

где

$$a(x) = \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\alpha|x|}. \tag{2.1}$$

Так как $\alpha > 0$, $0 \le \beta < n$, то функция (2.1) принадлежит $L_1(\mathbb{R}^n)$. Как следует из неравенства Юнга [9], оператор свёртки

$$(A\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x-y)\varphi(y)\,dy$$

ограничен в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, причём

$$\|A\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|a\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Из неравенства $|k(x,y)| \le Ca(x-y)$ тогда следует, что оператор K ограничен в $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$.

Теорема 2.1. *Пусть $k(x,y) \in \mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega \times \Omega)$ и единица принадлежит области нётеровости оператора $K : L_p(\Omega) \to L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. Тогда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$\ker(I-K) \subset L_p(\Omega, e^{\delta|x|}).$$

Доказательство. Введём в рассмотрение однопараметрическую группу операторов

$$\big(U(\lambda)\varphi\big)(x) = e^{i\lambda|x|}\,\varphi(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что операторы $U(\lambda)$ обратимы и $U^{-1}(\lambda) = U(-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$T(\lambda) = I - U^{-1}(\lambda)KU(\lambda) = I - K(\lambda). \tag{2.2}$$

Покажем, что оператор-функция $T(\lambda)$ допускает продолжение до аналитической в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < \alpha$ оператор-функции. Ядро оператора $K(\lambda)$ в (2.2) имеет вид:

$$k_\lambda(x,y) = k(x,y)e^{-i\lambda(|x|-|y|)}. \tag{2.3}$$

Функция $k_\lambda(x,y)$ аналитична по λ при всех λ. Из определения класса $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega\times\Omega)$ следует, что при $|\operatorname{Im}\lambda|<\alpha_1<\alpha$ справедлива оценка:

$$
\begin{aligned}
|k_\lambda(x,y)| \le |k(x,y)|\, e^{\alpha_1 \left||x|-|y|\right|} &\le C\frac{1}{|x-y|^\beta}\, e^{-\alpha|x-y|+\alpha_1\left||x|-|y|\right|}\\
&\le C\frac{1}{|x-y|^\beta}\, e^{-(\alpha-\alpha_1)|x-y|},
\end{aligned}
$$

так как $\big||x|-|y|\big|\le|x-y|$. Таким образом,

$$
|k_\lambda(x,y)|\le Ca_1(x-y),\quad a_1(x)=\frac{e^{-(\alpha-\alpha_1)|x|}}{|x|^\beta}\in L_1(\mathbb{R}^n). \tag{2.4}
$$

Из (2.3) следует, что

$$
\frac{dk_\lambda(x,y)}{d\lambda}=-i\big(|x|-|y|\big)k(x,y).
$$

Из определения класса $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega\times\Omega)$ следует, что при $|\operatorname{Im}\lambda|<\alpha_1$

$$
\left|\frac{dk_\lambda(x,y)}{d\lambda}\right|\le C\frac{1}{|x-y|^{\beta-1}}\, e^{-(\alpha-\alpha_1)|x-y|}=a_2(x-y),
$$
$$
\text{где}\quad a_2(x)\in L_1(\mathbb{R}^n). \tag{2.5}
$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что операторы $K(\lambda)$ и $\frac{dK(\lambda)}{d\lambda}$ ограничены в $L_p(\Omega)$ при всех λ таких, что $|\operatorname{Im}\lambda|<\alpha_1<\alpha$, то есть $K(\lambda)$, а значит, и $T(\lambda)=I-K(\lambda)$, – аналитические оператор-функции в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<\alpha$.

При $\lambda=0$ имеем

$$
T(0)=I-K(0)=I-K,
$$

поэтому, в силу условия теоремы, оператор $T(0)$ – нётеров. Так как функция $T(\lambda)$ непрерывна в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<\alpha$, то отсюда следует, что операторы $T(\lambda)$ нётеровы при всех достаточно малых λ, то есть при $|\lambda|<\varepsilon_0$. Ввиду очевидного равенства

$$
T(\lambda+\xi)=U^{-1}(\xi)T(\lambda)U(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{2.6}
$$

оператор $T(\lambda+\xi)$ нётеров при $|\lambda|<\varepsilon_0$, $\xi\in\mathbb{R}$. Таким образом, $T(\lambda)$ – аналитическая в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<\varepsilon_0$ нётерова оператор-функция. По теореме 1 существует число $n\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\alpha(\lambda)=\dim\ker T(\lambda)=k \quad \text{при} \quad 0<|\lambda|<\varepsilon_1,$$

где $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0$. Так как при вещественных λ операторы $T(\lambda)$ и $T(0)$ подобны (см. (2.6)), то

$$\alpha(\lambda)=\dim\ker T(\lambda)=\dim\ker T(0)=k$$

при всех λ таких, что $0<|\lambda|<\varepsilon_1$.

Если $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$, то оператор $U(\lambda)$ ограничен, поскольку функция $e^{i\lambda|x|}$ ограничена при $\operatorname{Im}\lambda\geq 0$. При этом, из определения $T(\lambda)$ следует равенство:

$$T(0)U(\lambda)=U(\lambda)T(\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda\geq 0. \tag{2.7}$$

Если $T(\lambda)\varphi_\lambda=0$, то из равенства (2.7) следует, что $T(0)\varphi=0$, где $\varphi=U(\lambda)\varphi_\lambda$. Положим $\lambda=i\delta$, $0<\delta<\varepsilon_1$. Тогда

$$\varphi=U(i\delta)\varphi_{i\delta}=e^{-\delta|x|}\varphi_{i\delta}=e^{-\delta|x|}\psi, \tag{2.8}$$

где $\psi\in\ker T(i\delta)\subset L_p(\Omega)$. Так как $\dim\ker T(0)=\dim\ker T(i\delta)$, то из (2.8) следует, что $\ker T(0)=\{\varphi=e^{-\delta|x|}\psi\colon \psi\in\ker T(i\delta)\}$. Таким образом, если $\varphi\in\ker T(0)=\ker(I-K)$, то $e^{\delta|x|}\varphi\in L_p(\Omega)$, то есть $\varphi\in L_p(\Omega,e^{\delta|x|})$. Теорема доказана.

Если на ядро $k(x,y)\in\mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega\times\Omega)$ наложить дополнительное условие $\beta<\frac{n}{p'}$, $p'=\frac{p}{p-1}$, то из принадлежности функции φ весовому пространству $L_p(\Omega,e^{\delta|x|})$ будет следовать поточечная оценка: $|\varphi(x)|\leq ce^{-\delta_1|x|}$, где $0<\delta_1<\delta$.

Теорема 2.2. *Пусть $k(x,y)\in\mathcal{K}_{\alpha,\beta}(\Omega\times\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, и оператор K действует в $L_p(\Omega)$, $1<p\leq\infty$. Пусть, кроме того, $\beta<\frac{n}{p'}$, $p'=\frac{p}{p-1}$. Тогда, если единица принадлежит области нётеровости оператора K, то существует постоянная $\delta_1>0$ такая, что для любой функции $\varphi\in\ker(I-K)$ справедлива оценка:*

$$|\varphi(x)|\leq Ce^{-\delta_1|x|} \quad \textit{почти всюду}.$$

Доказательство. По теореме 2.1 существует $\delta > 0$ такое, что $\varphi \in L_p(\Omega, e^{\delta|x|})$, то есть $\varphi = e^{-\delta|x|}\psi$, $\psi \in L_p(\Omega)$. Так как $\varphi = K\varphi$, то отсюда следует, что

$$\varphi(x) = \int\limits_{\Omega} k(x,y)\, e^{-\delta|y|}\psi(y)\, dy. \tag{2.9}$$

Применяя к интегралу (2.9) неравенство Гёльдера, получим, что при почти всех $x \in \Omega$

$$|\varphi(x)| \le \big\| k(x,y)\, e^{-\delta|y|} \big\|_{L_{p'}(\Omega)} \cdot \|\psi\|_{L_p(\Omega)}, \tag{2.10}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Из (2.10) получаем

$$|\varphi(x)|^{p'} \le C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |k(x,y)|^{p'} \cdot e^{-p'\delta|y|}\, dy.$$

Так как $|k(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^\beta}\, e^{-\alpha|x-y|}$, то

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^{p'} &\le C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{\beta'}}\, e^{-p'\alpha|x-y| - p'\delta|y|}\, dy \\ &\le C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{\beta'}}\, e^{-\delta'(|x-y|+|y|)}\, dy, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\beta' = p'\beta$, $\delta' = p'\delta$.

Покажем, что при любом $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо неравенство:

$$|x-y| + |y| \ge (1-\varepsilon)|x| + \varepsilon|y|. \tag{2.12}$$

В самом деле, в силу неравенства треугольника,

$$|x-y| \ge \big| |x| - |y| \big| \ge (1-\varepsilon)\big| |x| - |y| \big| \ge (1-\varepsilon)\big(|x| - |y|\big),$$

откуда следует (2.12). Применяя неравенство (2.12), получим

$$e^{-\delta'(|x-y|+|y|)} \le e^{-\delta'(1-\varepsilon)|x| - \delta'\varepsilon|y|},$$

$$|\varphi(x)|^{p'} \le C_2 e^{-\delta'(1-\varepsilon)|x|} \cdot F(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.13}$$

где $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$,

$$F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{\beta'}}\, e^{-\delta'\varepsilon|y|}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{\beta'}}\, e^{-\nu|x-y|}\, dy, \quad \nu = \delta' \cdot \varepsilon > 0.$$

Докажем, что функция $F(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x) + F_2(x), \\ F_1(x) &= \int\limits_{B} \frac{1}{|y|^{\beta'}}\, e^{-\nu|x-y|}\, dy, \\ F_2(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{1}{|y|^{\beta'}}\, e^{-\nu|x-y|}\, dy, \end{aligned}$$

где $B = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y| \le 1\}$. Тогда

$$F_1(x) \le \int\limits_{B} \frac{1}{|y|^{\beta'}}\, dy = D_1 < +\infty$$

(интеграл сходится, так как $\beta' = p'\beta < n$). Далее,

$$F_2(x) = (A_\nu g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\nu|x-y|} g(y)\, dy,$$

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|y|^{\beta'}} & \text{при} \ \ |y| > 1, \\ 0 & \text{при} \ \ |y| \le 1. \end{cases}$$

Так как оператор свёртки A_ν с суммируемым ядром ограничен во всех $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, и $g(y) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, то $F_2(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом,

$$\operatorname{ess} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} F_2(x) \le D_2,$$

и, следовательно, $F(x) \le D_1 + D_2$ почти всюду. Из неравенства (2.13) получаем, что

$$|\varphi(x)| \le C_3 e^{-\delta(1-\varepsilon)|x|} \quad \text{почти всюду.}$$

Теорема доказана.

Замечание. Для ядер $k(x,y) \in \mathcal{K}_\alpha(\Omega \times \Omega)$ заключение теоремы 2.2 справедливо при всех $1 \le p \le \infty$. Неравенство (2.11) в случае $\beta = 0$ имеет вид:

$$|\varphi(x)| \le C \sqrt[p']{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta p'(|x-y|+|y|)}\, dy} \quad \text{при} \quad p' < \infty, \tag{2.14}$$

$$|\varphi(x)| \le C \sup_{y \in \mathbb{R}^n} e^{-\delta(|x-y|+|y|)} \quad \text{при} \quad p' = \infty. \tag{2.15}$$

В обоих случаях применение неравенства (2.12) к (2.14) или (2.15) приводит к оценке:

$$|\varphi(x)| \le \widetilde{C} e^{-\delta(1-\varepsilon)|x|} \tag{2.16}$$

для любого $\varepsilon \in (0,1)$.

Следующая теорема даёт оценку скорости экспоненциального убывания собственных функций, то есть оценку величины параметра δ_1 в неравенстве $|\varphi(x)| \le Ce^{-\delta_1|x|}$.

Обозначим область нётеровости оператор-функции $T(\lambda)$ (т. е. множество тех λ, при которых оператор $T(\lambda)$ – нётеров) через $\Phi_{T(\lambda)}$. Пусть Π_δ – полоса $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < \delta\}$. Для ядра класса $\mathcal{K}_\alpha(\Omega \times \Omega)$ введём следующую характеристику:

$$\alpha^* = \sup\{\delta\colon 0 < \delta < \alpha, \Pi_\delta \subset \Phi_{T(\lambda)}\}. \tag{2.17}$$

Теорема 2.3. *Пусть $k(x,y) \in \mathcal{K}_\alpha(\Omega \times \Omega)$ и $1 \in \Phi_K$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $\varphi \in \ker(I-K)$ справедлива оценка:*

$$|\varphi(x)| \le Ce^{-(\alpha^*-\varepsilon)|x|} \quad \textit{почти всюду},$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от φ и ε.

Доказательство. Пусть $\alpha(\lambda) = \dim\ker T(\lambda)$. По теореме 2 в §1 существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha(\lambda) = k$ везде в полосе Π_{α^*} (где α^* определено формулой (2.17)) за исключением, быть может, множества F, состоящего из изолированных точек. При вещественных λ операторы $T(\lambda)$ и $T(0)$ подобны, поэтому $\alpha(\lambda) = k = \dim\ker T(0)$ при $\lambda \in \Pi_{\alpha^*} \backslash F$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как множество F состоит из изолированных точек, то на интервале $(i(\alpha^*-\varepsilon), i\alpha^*)$ найдётся точка $i\delta$ такая, что $\alpha(i\delta) = k$.

Из равенства размерностей ядер $\ker T(i\delta)$ и $\ker T(0)$ выводится вложение: $\ker(I-K) \subset L_p(\Omega, e^{\delta|x|})$ (см. доказательство теоремы 2.1). В свою очередь из этого вложения следует экспоненциальная оценка:

$$|\varphi(x)| \leq Ce^{-\delta_1|x|}, \quad \varphi \in \ker(I-K)$$

с любым δ_1 таким, что $0 < \delta_1 < \delta$ (см. неравенство (2.16)). Так как $\delta \in (\alpha^* - \varepsilon, \alpha^*)$, то $\delta > \alpha^* - \varepsilon$, поэтому в качестве δ_1 можно взять число $\alpha^* - \varepsilon$. Теорема доказана.

§3. Приложения к операторам типа свёртки

В этом пункте мы приведём примеры применения теорем предыдущего пункта к операторам типа свёртки с переменными коэффициентами с ядрами класса $\mathcal{K}_\alpha(\Omega \times \Omega)$, для которых известны конструктивные условия нётеровости. В этих примерах достаточные условия справедливости оценки:

$$|\varphi(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}, \quad \varphi \in \ker(I-K), \tag{3.1}$$

формулируются либо в терминах символа оператора $T = I - K$, либо в терминах других характеристик, явно выражаемых через ядро оператора K.

Пример 1. Пусть $B^{\sup}(\mathbb{R}^2)$ – множество функций $a(x,y) \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$ таких, что существуют числа $a(+\infty,+\infty)$, $a(-\infty,-\infty)$ такие, что

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x>N,\ y>N} |a(x,y) - a(+\infty,+\infty)| = 0,$$
$$\lim_{N\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x>-N,\ y>-N} |a(x,y) - a(-\infty,-\infty)| = 0.$$

Рассмотрим оператор $T = I - K$ вида:

$$(T\varphi)(x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c_j(x,y)\, k_j(x-y)\, \varphi(y)\, dy. \tag{3.2}$$

Относительно функций $k_j(x)$, $c_j(x,y)$ предполагаем, что

$$k_j(x-y) \in \mathcal{K}_\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \quad c_j(x,y) \in B^{\sup}(\mathbb{R}^2). \tag{3.3}$$

Символом оператора T называется пара функций

$$\sigma_T^+(\xi) = 1 - \sum_{j=1}^{s} c_j(+\infty, +\infty)\, \widehat{k}_j(\xi),$$
$$\sigma_T^-(\xi) = 1 - \sum_{j=1}^{s} c_j(-\infty, -\infty)\, \widehat{k}_j(\xi),$$

где $\widehat{k}_j(\xi)$ – преобразование Фурье функции $k_j(x)$. Известно (см. [10, с. 27]), что оператор (3.2) нётеров в $L_p(\mathbb{R}^1)$, $1 \le p \le \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\sigma_T^{\pm}(\xi) \ne 0, \quad -\infty \le \xi \le +\infty. \tag{3.4}$$

Применяя теорему 2.2 к рассматриваемому случаю, получим, что при выполнении условий (3.3), (3.4) для функции $\varphi \in \ker(I - K)$ справедлива оценка (3.1).

Пример 2. Рассмотрим оператор Винера–Хопфа с осциллирующим коэффициентом:

$$(T_\mu \varphi)(x) = \varphi(x) - e^{i\mu x} \int_0^{+\infty} k(x-y)\, \varphi(y)\, dy, \tag{3.5}$$

где $k(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \ne 0$.

Пусть функция $k(x)$ удовлетворяет условию

$$|k(x)| \le Ce^{-\alpha|x|},$$

где $\alpha > 0$. В этом случае ядро оператора (3.5) принадлежит пространству $\mathcal{K}_\alpha(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$.

Для оператора T_μ, действующего в $L_2(\mathbb{R}^+)$, условия нётеровости могут быть получены из теории нётеровости сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом, построенной В. Г. Кравченко и Г. С. Литвинчуком (см. [11, 12]). С помощью преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ уравнение $T_\mu \varphi = 0$ сводится к эквивалентной краевой задаче сопряжения со сдвигом $\alpha(t) = t + \mu$:

$$\Phi^+(t) - \mathcal{K}(t)\Phi^+(t+\mu) + \Phi^-(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

где $\mathcal{K}(t)$ – преобразование Фурье ядра $k(x)$.

Пусть сингулярный интегральный оператор со сдвигом имеет вид:

$$T_{A,B} = AP_+ + BP_-,$$

где

$$\begin{aligned} &P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S), && (S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \\ &A = aI + bV, && B = cI + dV, \\ &(V\varphi)(t) = \varphi(t+\mu), && a, b, c, d \in \mathrm{C}\,(\dot{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

Оператор $T_{A,B}$ нётеров в $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда операторы A и B обратимы в $L_2(\mathbb{R})$. Для обратимости оператора A (см. [12, с. 54, 55]) необходимо и достаточно выполнения одного из двух следующих условий:

$$\begin{aligned} &1)\ \ a(t) \neq 0 \ \text{ на } \ \dot{\mathbb{R}} \ \text{ и } \ |a(\infty)| > |b(\infty)|; \\ &2)\ \ b(t) \neq 0 \ \text{ на } \ \dot{\mathbb{R}} \ \text{ и } \ |a(\infty)| < |b(\infty)|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Нётеровость краевой задачи (3.6) равносильна нётеровости соответствующего ей оператора $T_{A,B}$. В нашем случае коэффициенты a, b, c, d имеют вид: $a(t) = 1$, $b(t) = -\mathcal{K}(t)$, $c(t) = 1$, $d(t) = 0$. Так как $k \in L_1(\mathbb{R})$, то $\mathcal{K}(\infty) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} |a(\infty)| = 1 > 0 = |b(\infty)|, \\ |c(\infty)| = 1 > 0 = |d(\infty)|. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (3.7) выполнены, то есть оператор T_μ нётеров при любом $\mu \neq 0$. Аналитическая оператор-функция $T_\mu(\lambda)$ в данном примере задаётся в виде:

$$T_\mu(\lambda) = I - e^{i\mu x} K(\lambda),$$

где $K(\lambda)$ – оператор Винера–Хопфа с ядром $k_\lambda(x) = k(x)\,e^{-i\lambda x}$. Так как

$$|k_\lambda(x)| \leq Ce^{-(\alpha - |\operatorname{Im}\,\lambda|)\cdot|x|},$$

то $k_\lambda \in L_1(\mathbb{R})$ при $|\operatorname{Im}\,\lambda| < \alpha$, и, соответственно, оператор-функция $T_\mu(\lambda)$ является нётеровой в полосе $|\operatorname{Im}\,\lambda| < \alpha$. В этом случае $\alpha^* = \alpha$

(см. (2.17)), и по теореме 2.3 для любого $\varepsilon > 0$ и для любой функции $\varphi \in \ker T_\mu$ справедлива оценка:

$$|\varphi(x)| \leq \widetilde{C} e^{-(\alpha-\varepsilon)|x|} \text{ почти всюду на } \mathbb{R}^+. \tag{3.8}$$

В случае $\mu = 0$ оператор $T_0 = T$ является оператором Винера–Хопфа, для которого условие нётеровости имеет вид:

$$\sigma_T(\xi) = 1 - \widehat{k}(\xi) \neq 0, \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty. \tag{3.9}$$

При выполнении условия (3.9) для любой функции $\varphi \in \ker T$ справедлива оценка (3.1) с некоторым $\delta > 0$. Величина δ определяется расстоянием от вещественной оси до ближайшего к ней комплексного нуля символа $\sigma_T(\xi)$, то есть, в отличии от случая $\mu \neq 0$, в случае $\mu = 0$ постоянная δ может быть сколь угодно малой. Аналогичные результаты можно сформулировать и для многомерных операторов свёртки в конусах, условия нётеровости которых получены в работах [13, 14].

Литература

1. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. IV. Анализ операторов.* Мир, М., 1982.
2. Э. Э. Шноль, *О поведении собственных функций уравнения Шрёдингера.* — Матем. сб. **42** (1957), 273–286.
3. S. Agmon, *Lectures on Exponential Decay of Solution of Second-Order Elliptic Equation.* Princeton University Press, 1982.
4. И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.* Физматгиз, М., 1963.
5. B. Simon, *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms.* Princeton University Press, 1971.
6. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов.* — УМН **XII**, вып. 2 (74), 1957, 44–118.
7. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, *Уравнения в свёртках и проекционные методы их решения.* Наука, М., 1971.
8. И. Ц. Гохберг, *О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра.* — ДАН СССР **78**, No 4 (1951), 629–632.
9. W. Young, *The determination of the summability of a function.* — Proc. London Math. Soc. **12** (1913), 71–78.
10. Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко, *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения.* — Изд. Ростовского университета (1988).
11. G. S. Litvinchuk, *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

12. V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, *Introduction to the theory of singular integral operators with shift.* Kluwer Academic Publishers, 1994.
13. И. Б. Симоненко, *К вопросу разрешимости бисингулярных и полисингулярных уравнений.* — Изв. вузов. мат. No. 2 (1974), 115–120.
14. И. Б. Симоненко, *Операторы типа свёртки в конусах.* — Матем. сб. **74** (1967), No. 2, 298–313.

Kaplitsky V. M. Tests for exponential decay of eigenfunctions for some classes of integral operators.

We investigate conditions sufficient for an exponential decay of eigenfunctions in the case of a certain class of integral equations in unbounded domains in $\mathbb{R}^n$. The integral operators K in question have kernels of the form

$$k(x,y) = c(x,y)\frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|^{\beta}}, \quad (x,y) \in \Omega \times \Omega,$$

where $\alpha > 0$, $0 \leq \beta < n$, $c(x,y) \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$. It is shown that, if the operator $T = I - K$ is Fredholm, then all solutions of the equation $\varphi = K\varphi$ have exponential decay at infinity. Applications to Wiener–Hopf operators with oscillating coefficient and some classes of convolution operators with variable coefficients are considered.

ЮФУ, факультет математики,
механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8-А,
Ростов-на-Дону, 344090, Россия
ИПМИ ВНЦ РАН

E-mail: kaplitsky@donpac.ru

Поступило 5 февраля 2009 г.