Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 366, 2009 г.

**Е. С. Дубцов**

# КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ БЛОХА

## 1. Введение

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть $H(\mathbb{D}^n)$ и $H(B_n)$ обозначают пространства всех голоморфных функций в единичном полидиске $\mathbb{D}^n$ и в единичном шаре $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| < 1\}$ соответственно.

**1.1. Пространства Блоха.** Пусть $\alpha > 0$. Тогда $\alpha$-пространство Блоха $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$ состоит из тех функций $f \in H(\mathbb{D}^n)$, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}^n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\right| (1-|z_j|)^\alpha < +\infty.$$

По определению $\alpha$-пространство Блоха $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$, $\alpha > 0$, состоит из тех функций $f \in H(B_n)$, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{B}^\alpha(B_n)} = |f(0)| + \sup_{z\in B_n} |\mathcal{R}f(z)|(1-|z|)^\alpha < +\infty, \tag{1.1}$$

где

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z), \quad z \in B_n,$$

обозначает радиальную производную. Хорошо известно, что условие (1.1) эквивалентно следующему свойству:

$$\sup_{z\in B_n} |(I+\mathcal{R})f(z)|(1-|z|)^\alpha < +\infty. \tag{1.2}$$

---

*Ключевые слова* : $\alpha$-пространство Блоха, весовой оператор композиции, $q$-мера Карлесона, обобщенный оператор Чезаро.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 08-01-00358-а, Фондом содействия отечественной науке и грантом Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2409.2008.1 .

Отметим, что корректно определен обратный оператор $(I+\mathcal{R})^{-1}$ : $H(B_n) \to H(B_n)$. Поэтому условие (1.2) иногда является более удобным, чем (1.1).

Пространства $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$ и $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$ являются банаховыми относительно указанных выше норм. Отметим, что $\mathcal{B}^1(\mathbb{D}^n)$ и $\mathcal{B}^1(B_n)$ – это классические пространства Блоха. При $0 < \alpha < 1$ пространство $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$ совпадает с голоморфным пространством Липшица $\Lambda_{1-\alpha}(B_n)$ (см. [11, гл. 6]); при $\alpha > 1$ пространство $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$ является пространством роста (см. предложение 2.2).

**1.2. Операторы.** В настоящей статье рассматриваются три типа классических операторов, заданных на пространствах $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$ и $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$.

**1.2.1.** Предположим, что $\Omega = \mathbb{D}^n$ или $\Omega = B_n$. Пусть $g \in H(\Omega)$ и $\varphi : \Omega \to \Omega$ является голоморфным отображением. Весовой оператор композиции $C_\varphi^g : H(\Omega) \to H(\Omega)$ задается формулой

$$(C_\varphi^g f)(z) = g(z) f(\varphi(z)), \quad z \in \Omega.$$

Для заданных $X, Y \subset H(\Omega)$ стандартная задача заключается в описании тех $g$ и $\varphi$, для которых оператор $C_\varphi^g$ переводит $X$ в $Y$ (см., например, монографию [2]).

**1.2.2.** Предположим, что $\Omega = \mathbb{D}^n$ или $\Omega = B_n$. Пусть $\mu$ – положительная борелевская мера на $\Omega$. Зафиксируем $q > 0$ и пространство $X \subset H(\Omega)$. По определению $\mu$ называется $q$-мерой Карлесона для $X$, если единичный оператор

$$I : X \to L^q(\mu)$$

является ограниченным. Карлесон [1] решил данную задачу в случае, когда $\Omega$ – это единичный круг $\mathbb{D}$, а $X$ – это пространство Харди $H^q(\mathbb{D})$. К настоящему времени характеризации $q$-мер Карлесона известны для разнообразных классических пространств $X$.

**1.2.3.** Для $g \in H(B_n)$ обобщенный оператор Чезаро $J_g : H(B_n) \to H(B_n)$ определяется формулой

$$J_g f(z) = \int_0^1 f(tz) \mathcal{R} g(tz) \, \frac{dt}{t}, \quad z \in B_n.$$

При $n = 1$ исследования оператора $J_g$ инициировал Поммеренке [10]. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ оператор $J_g$ был введен Ху [6].

Парный оператор $I_g : H(B_n) \to H(B_n)$ задается формулой

$$I_g f(z) = \int_0^1 \mathcal{R}f(tz)g(tz)\,\frac{dt}{t}, \quad z \in B_n.$$

Насколько известно автору, оператор $I_g$ был введен Йонедой [14, 15] для $n = 1$, а также Ли и Стевичем [8] для произвольного $n \in \mathbb{N}$. Сходные операторы также рассматривал Каптаноглу [7].

**1.3. Организация статьи.** Вспомогательные результаты собраны в разделе 2. Пространства Блоха $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$, $\alpha > 1$, рассматриваются в разделе 3; а именно, исследуются весовые операторы композиции и меры Карлесона. В заключительном разделе 4 изучаются пространства $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$.

## 2. Предварительные сведения

**2.1. Пространства Блоха в полидиске.** Доказательство следующей леммы является стандартным (см., например, [9, лемма 2.1]).

**Лемма 2.1.** *Пусть $f \in \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$, $\alpha > 1$. Тогда существует константа $C_\alpha > 0$, такая что*

$$|f(z)| \leqslant C_\alpha \|f\|_{\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)} \sum_{j=1}^n (1 - |z_j|)^{1-\alpha} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}^n.$$

**2.2. Пространства роста в шаре.** Для $\beta > 0$ пространство роста $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ состоит из тех функций $f \in H(B_n)$, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)} = \sup_{z \in B_n} |f(z)|(1 - |z|)^\beta < \infty.$$

**Предложение 2.2** (см., например, [7, следствие 8.4]). *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 1$. Тогда $\mathcal{B}^\alpha(B_n) = \mathcal{A}^{-\alpha+1}(B_n)$.*

Следующая лемма является частным случаем леммы 1.2 из [3].

**Лемма 2.3.** *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и $\beta > 0$. Тогда существует число $M = M(n) \in \mathbb{N}$ и существуют функции $f_m \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $0 \leqslant m \leqslant M$, такие что*

$$\sum_{m=0}^{M} |f_m(z)| \geqslant (1-|z|)^{-\beta} \quad \text{для всех } z \in B_n. \tag{2.1}$$

**Лемма 2.4** ([13, лемма 3.1])**.** *Пусть $\alpha > 1$. Тогда существуют функции $f_0, f_1 \in \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D})$, такие что*

$$|f_0(z)| + |f_1(z)| \geqslant (1-|z|)^{1-\alpha} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}. \tag{2.2}$$

**Доказательство.** Как показано в [5], при $n = 1$ лемма 2.3 верна для $M(1) = 1$. Итак, имеем функции $f_0, f_1 \in \mathcal{A}^{1-\alpha}(\mathbb{D})$ со свойством (2.2). Остается применить предложение 2.2. □

**2.3 Критерий компактности.** Хорошо известны разнообразные версии следующей леммы (см., например, [12, лемма 3.7]).

**Лемма 2.5.** *Предположим, что $\Omega = \mathbb{D}^n$ или $\Omega = B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $X = \mathcal{B}^\alpha(\Omega)$, $\alpha > 0$, и пусть $Y$ – линейное метрическое пространство с инвариантной относительно сдвига метрикой. Рассмотрим линейный оператор $T : X \to Y$. Предположим, что последовательность $\{Th_j\}$ сходится к нулю в метрике пространства $Y$ для любой ограниченной в $X$ последовательности $\{h_j\}$, такой что $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах области $\Omega$. Тогда $T$ является компактным оператором.*

## 3. Пространства Блоха в полидиске

**3.1. Весовые операторы композиции.** Пусть $Y(\mathbb{D}^n)$ – линейное пространство, состоящее из функций $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$. Будем говорить, что $Y(\mathbb{D}^n)$ является *решеткой*, если выполнено следующее свойство: если $F \in Y(\mathbb{D}^n)$, $f \in C(\mathbb{D}^n)$ и $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ для всех $z \in \mathbb{D}^n$, то $f \in Y(\mathbb{D}^n)$.

Следующий результат был получен Ли и Стевичем [9, теорема 3.3] в том случае, когда $Y(\mathbb{D}^n) \cap H(\mathbb{D}^n) = H^\infty(\mathbb{D}^n)$.

**Теорема 3.1.** *Предположим, что* $g \in H(\mathbb{D}^n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ *является голоморфным отображением,* $Y(\mathbb{D}^n)$ *является решеткой и* $\alpha > 1$. *Тогда оператор* $C_\varphi^g$ *переводит* $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$ *в* $Y(\mathbb{D}^n)$ *в том и только в том случае, когда*

$$|g(z)| \sum_{j=1}^{n} (1 - |\varphi_j(z)|)^{1-\alpha} \in Y(\mathbb{D}^n). \tag{3.1}$$

**Доказательство.** Предположим, что оператор $C_\varphi^g$ переводит $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$ в $Y(\mathbb{D}^n)$. Рассмотрим функции $f_0, f_1 \in \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D})$, существование которых гарантировано леммой 2.4. Для $m = 0, 1$ и $j = 1, \ldots, n$ положим

$$F_{m,j}(z) = f_m(z_j), \quad z \in \mathbb{D}^n.$$

Отметим, что $F_{m,j} \in \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$. Итак, используя неравенство (2.2), имеем

$$|g(z)|(1 - |\varphi_j(z)|)^{1-\alpha} \leqslant |C_\varphi^g F_{0,j}(z)| + |C_\varphi^g F_{1,j}(z)| \in Y(\mathbb{D}^n).$$

Так как $Y(\mathbb{D}^n)$ является решеткой, то $|g(z)|(1 - |\varphi_j(z)|)^{1-\alpha} \in Y(\mathbb{D}^n)$ для $j = 1, \ldots, n$, следовательно, имеет место включение (3.1).

Для доказательства обратной импликации предположим, что выполнено свойство (3.1). Если $f \in \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$, то лемма 2.1 гарантирует, что

$$\begin{aligned} |C_\varphi^g f(z)| &= |g(z)||f(\varphi(z))| \\ &\leqslant C_\alpha \|f\|_{\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)} |g(z)| \sum_{j=1}^{n} (1 - |\varphi_j(z)|)^{1-\alpha} \in Y(\mathbb{D}^n). \end{aligned}$$

Таким образом, $C_\varphi^g f \in Y(\mathbb{D}^n)$ по определению решетки. □

### 3.2. Меры Карлесона.

**Следствие 3.2.** *Пусть* $\mu$ *– положительная борелевская мера на* $\mathbb{D}^n$, $0 < p < \infty$ *и* $\alpha > 1$. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n) \subset L^p(\mu)$;

(ii) $\sum_{j=1}^{n} (1 - |z_j|)^{1-\alpha} \in L^p(\mu)$;

(iii) *$I$ является компактным оператором из $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$ в $L^p(\mu)$.*

**Доказательство.** Теорема 3.1 гарантирует, что (ii) следует из (i). Безусловно, (i) следует из (iii). Теперь пусть имеет место свойство (ii). Заметим, что предположения леммы 2.5 выполнены для $T = I : \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n) \to L^p(\mu)$. Действительно, пусть $h_j \in \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$, $\|h_j\|_{\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)} \leqslant H < \infty$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах полидиска $\mathbb{D}^n$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $C_\alpha$ – это положительная константа, существование которой гарантировано леммой 2.1. Используя свойство (ii), выберем столь большой компакт $K \subset \mathbb{D}^n$, что

$$\int\limits_{\mathbb{D}^n \setminus K} \left(\sum_{j=1}^n (1-|z_j|)^{1-\alpha}\right)^p d\mu(z) < \frac{\varepsilon}{2H^p C_\alpha^p}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{D}^n \setminus K} |h_j(z)|^p d\mu(z) < \frac{\varepsilon}{2}$$

в силу леммы 2.1.

Из свойства (ii) следует, что $\mu(\mathbb{D}^n) < \infty$, поэтому существует индекс $j_0 \in \mathbb{N}$, такой что $2\mu(\mathbb{D}^n)|h_j(z)|^p < \varepsilon$ для всех $z \in K$, $j \geqslant j_0$. Следовательно,

$$\int\limits_K |h_j(z)|^p \, d\mu(z) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $j \geqslant j_0$. Итак, $\|h_j\|^p_{L^p(\mu)} < \varepsilon$ для всех $j \geqslant j_0$. Таким образом, оператор $I : \mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n) \to L^p(\mu)$ является компактным в силу леммы 2.5. □

## 4. Пространства Блоха в шаре

Пусть $Y(B_n)$ – решетка, состоящая из функций в шаре. При $\alpha > 1$ весовые операторы композиции из $\mathcal{B}^\alpha(B_n) = \mathcal{A}^{1-\alpha}(B_n)$ в $Y(B_n)$ изучались в [3].

При $\alpha > 0$ ограниченные и компактные операторы $J_g, I_g : \mathcal{B}^\alpha(B_n) \to Z$ охарактеризованы в [8] для $Z = \mathcal{B}^\beta(B_n)$, $\beta > 0$. При $n = 1$ такие результаты были получены ранее в [14, 15]. Ниже подобные задачи рассматриваются в том случае, когда $Z$ – это пространство Бергмана–Соболева.

При $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$ и $\beta > -1$ весовое пространство Бергмана $A^p_\beta(B_n)$ состоит из тех функций $f \in H(B_n)$, для которых

$$\|f\|^p_{A^p_\beta(B_n)} = \int\limits_{B_n} |f(z)|^p (1-|z|)^\beta \, d\nu_n(z) < \infty,$$

где $\nu_n$ обозначает нормированную меру Лебега на шаре $B_n$.

Для $\alpha > 1$, $\beta > -1$ и $0 < p < \infty$ ограниченные и компактные операторы $J_g : \mathcal{B}^\alpha(B_n) = \mathcal{A}^{1-\alpha}(B_n) \to A^p_\beta(B_n)$ охарактеризованы в [4]. Поэтому в настоящем разделе наше внимание сконцентрировано на парных операторах $I_g$. Хорошо известно, что

$$\mathcal{R} I_g f(z) = g \mathcal{R} f(z) \quad \text{для всех } f, g \in H(B_n),\ z \in B_n. \tag{4.1}$$

Пусть $\mathcal{Y}(B_n)$ – линейное пространство, состоящее из функций $f : B_n \to \mathbb{C}$. Будем говорить, что $\mathcal{Y}(B_n)$ является *сильной решеткой*, если верна следующая импликация:

предположим, что $F \in \mathcal{Y}(B_n)$, $f \in C(B_n)$ и существует число $r \in (0,1)$, такое что $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ при $1 > |z| \geqslant r$; тогда $f \in \mathcal{Y}(B_n)$.

**Теорема 4.1.** *Предположим, что $g \in H(B_n)$, $\mathcal{Y}(B_n)$ является сильной решеткой и $\alpha > 0$. Тогда $\mathcal{R} I_g(\mathcal{B}^\alpha(B_n)) \subset \mathcal{Y}(B_n)$ в том и только в том случае, когда*

$$|g(z)|(1-|z|)^{-\alpha} \in \mathcal{Y}(B_n). \tag{4.2}$$

**Доказательство.** Предположим, что $\mathcal{R} I_g(\mathcal{B}^\alpha(B_n)) \subset \mathcal{Y}(B_n)$. Используя лемму 2.3, зафиксируем функции $f_m \in \mathcal{A}^{-\alpha}(B_n)$, $0 \leqslant m \leqslant M$, такие что

$$\sum_{m=0}^{M} |f_m(z)| \geqslant (1-|z|)^{-\alpha} \quad \text{для всех } z \in B_n.$$

Положим $F_m = (I + \mathcal{R})^{-1} f_m$. Тогда $F_m \in \mathcal{B}^\alpha(B_n)$, $0 \leqslant m \leqslant M$, а также

$$\sum_{m=0}^{M} |(I+\mathcal{R}) F_m(z)| \geqslant (1-|z|)^{-\alpha} \quad \text{для всех } z \in B_n.$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \min(1,\alpha))$. Тогда существует константа $C > 0$, такая что

$$|F_m(z)| \leqslant C(1-|z|)^{-\alpha+\varepsilon} \quad \text{для всех } z \in B_n,\ 0 \leqslant m \leqslant M.$$

Следовательно, существует константа $r \in (0,1)$, такая что

$$2\sum_{m=0}^{M} |g(z)||\mathcal{R}F_m(z)| \geqslant |g(z)|(1-|z|)^{-\alpha} \quad \text{при } 1 > |z| \geqslant r. \tag{4.3}$$

Равенство (4.1) гарантирует, что $|g\mathcal{R}F_m| = |\mathcal{R}I_g F_m| \in \mathcal{Y}(B_n)$, поэтому (4.2) следует из (4.3) по определению сильной решетки.

Для доказательства обратной импликации предположим, что выполнено условие (4.2) и $f \in \mathcal{B}^\alpha(B_n)$. Тогда

$$|\mathcal{R}I_g f(z)| = |g(z)\mathcal{R}f(z)| \leqslant \|f\|_{\mathcal{B}^\alpha(B_n)}|g(z)|(1-|z|)^{-\alpha} \quad \text{для всех } z \in B_n.$$

Так как $\mathcal{Y}(B_n)$ является сильной решеткой, то $\mathcal{R}I_g f \in \mathcal{Y}(B_n)$. $\square$

По определению пространство Бергмана–Соболева $A^p_{\beta,1}(B_n)$, $0 < p < \infty$, $\beta > -1$, состоит из функций $f \in H(B_n)$, таких что $\mathcal{R}f \in A^p_\beta(B_n)$. Если $1 \leqslant p < \infty$, то $A^p_{\beta,1}(B_n)$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{A^p_{\beta,1}(B_n)} = |f(0)| + \|\mathcal{R}f\|_{A^p_\beta(B_n)}.$$

Если $0 < p < 1$, то пространство $A^p_{\beta,1}(B_n)$ является полным относительно метрики $d(f,h) = \|f-h\|^p_{A^p_{\beta,1}(B_n)}$, где

$$\|f\|^p_{A^p_{\beta,1}(B_n)} = |f(0)|^p + \|\mathcal{R}f\|^p_{A^p_\beta(B_n)}.$$

Отметим, что $A^p_{\beta,1}(B_n)$ совпадает с весовым пространством Бергмана $A^p_{\beta-p}(B_n)$, если $\beta > p-1$ (см. [6], где получены более общие результаты). Также отметим, что $A^2_{1,1}(B_n)$ совпадает с пространством Харди $H^2(B_n)$.

Доказательство следующего утверждения схоже с доказательством следствия 3.2.

**Следствие 4.2.** *Предположим, что $g \in H(B_n)$, $\alpha > 0$, $0 < p < \infty$ и $\beta > -1$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) $I_g(\mathcal{B}^\alpha(B_n)) \subset A^p_{\beta,1}(B_n)$;

(ii) $g \in A^p_{\beta-\alpha p}(B_n)$;

(iii) *$I_g$ является компактным оператором из $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$ в $A^p_{\beta,1}(B_n)$.*

**Доказательство.** Теорема 4.1 гарантирует, что (ii) следует из (i). Теперь пусть имеет место свойство (ii). Заметим, что предположения леммы 2.5 выполнены для $T = I_g : \mathcal{B}^\alpha(B_n) \to A^p_{\beta,1}(B_n)$. Действительно, пусть $h_j \in \mathcal{B}^\alpha(B_n)$, $\|h_j\|_{\mathcal{B}^\alpha(B_n)} \leqslant H < \infty$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара $B_n$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Используя свойство (ii), выберем столь большой компакт $K \subset B_n$, что

$$\int\limits_{B_n\setminus K} |g(z)|^p (1-|z|)^{\beta-\alpha p}\, d\nu_n(z) < \frac{\varepsilon}{2H^p}.$$

Итак, имеем

$$\int\limits_{B_n\setminus K} |g(z)|^p |\mathcal{R}h_j(z)|^p (1-|z|)^{\beta}\, d\nu_n(z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $G > \|g\|^p_{A^p_{\beta-\alpha p}(B_n)}$. Напомним, что $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара $B_n$, следовательно, существует число $j_0 \in \mathbb{N}$, такое что $2G|\mathcal{R}h_j(z)|^p < \varepsilon$ для всех $z \in K$, $j \geqslant j_0$. Таким образом,

$$\int\limits_{K} |g(z)|^p |\mathcal{R}h_j(z)|^p (1-|z|)^{\beta}\, d\nu_n(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2G}\int\limits_{K} |g(z)|^p (1-|z|)^{\beta}\, d\nu_n(z) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $j \geqslant j_0$. Отметим, что $I_g h_j(0) = 0$, поэтому в силу (4.1) получаем

$$\|I_g h_j\|^p_{A^p_{\beta,1}(B_n)} = \|\mathcal{R}I_g h_j\|^p_{A^p_{\beta}(B_n)} = \|g\mathcal{R}h_j\|^p_{A^p_{\beta}(B_n)} < \varepsilon$$

для всех $j \geqslant j_0$. Таким образом, лемма 2.5 гарантирует, что $I_g$ является компактным оператором из $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$ в $A^p_{\beta,1}(B_n)$. Итак, (iii) следует из (ii). Остается заметить, что (i) следует из (iii). $\square$

Предположим, что $\alpha, p > 0$, $\beta > -1$ и $\beta - \alpha p \leqslant -1$. Тогда следствие 4.2 гарантирует, что $I_g(\mathcal{B}^\alpha(B_n)) \subset A^p_{\beta,1}(B_n)$ в том и только в том случае, когда $g \equiv 0$. Ниже получен аналогичный результат для пространств Харди–Соболева.

Пусть $0 < p < \infty$. Рассмотрим множество $Y_p$, которое состоит из функций $f \in C(B_n)$, таких что

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma_n(\zeta) < \infty,$$

где $\sigma_n$ обозначает нормированную меру Лебега на сфере $\partial B_n$. Отметим, что $Y_p$ является сильной решеткой, а также $Y_p \cap H(B_n)$ – это пространство Харди $H^p(B_n)$.

По определению пространство Харди–Соболева $H_1^p(B_n)$, $0 < p < \infty$, состоит из тех функций $f \in H(B_n)$, для которых $\mathcal{R}f \in H^p(B_n)$.

**Следствие 4.3.** *Предположим, что* $g \in H(B_n)$ *и* $\alpha, p > 0$. *Тогда* $I_g(\mathcal{B}^\alpha(B_n)) \subset H_1^p(B_n)$ *в том и только в том случае, когда* $g \equiv 0$.

**Доказательство.** Теорема 4.1 гарантирует, что $I_g(\mathcal{B}^\alpha(B_n)) \subset H_1^p(B_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0<r<1} (1-r)^{-\alpha p} \int\limits_{\partial B_n} |g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta) < \infty.$$

Так как $\int\limits_{\partial B_n} |g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta)$ является возрастающей функцией от $r$, то указанное выше неравенство равносильно условию $g \equiv 0$. □

## Литература


1. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions.* — Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.
2. C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions.* — Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL (1995).
3. E. Doubtsov, *Growth spaces on circular domains: composition operators and Carleson measures.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), no. 11-12, 609–612.
4. Е. С. Дубцов, *Весовые операторы композиции на пространствах роста* — Сиб. матем. журн., в печати.
5. P. M. Gauthier and J. Xiao, *BiBloch-type maps: existence and beyond.* — Complex Var. Theory Appl. **47** (2002), no. 8, 667–678.
6. Z. Hu, *Extended Cesàro operators on mixed norm spaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 7, 2171–2179.
7. H. T. Kaptanoğlu, *Carleson measures for Besov spaces on the ball with applications.* — J. Funct. Anal. **250** (2007), no. 2, 483–520.
8. S. Li and S. Stević, *Riemann-Stieltjes-type integral operators on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$. — Complex Var. Elliptic Equ. **52** (2007), no. 6, 495–517.
9. S. Li and S. Stević, *Weighted composition operators from* $\alpha$*-Bloch space to* $H^\infty$ *on the polydisc.* — Numer. Funct. Anal. Optim. **28** (2007), no. 7-8, 911–925.
10. Ch. Pommerenke, *Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation.* — Comment. Math. Helv. **52** (1977), no. 4, 591–602.
11. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$. М., Мир (1984).
12. M. Tjani, *Compact composition operators on Besov spaces.* — Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 11, 4683–4698.

13. J. Xiao, *Riemann-Stieltjes operators on weighted Bloch and Bergman spaces of the unit ball.* — J. London Math. Soc. (2) **70** (2004), no. 1, 199–214.
14. R. Yoneda, *Pointwise multipliers from* $\mathrm{BMOA}^{\alpha}$ *to* $\mathrm{BMOA}^{\beta}$. — Complex Var. Theory Appl. **49** (2004), no. 14, 1045–1061.
15. R. Yoneda, *Multiplication operators, integration operators and companion operators on weighted Bloch space.* — Hokkaido Math. J. **34** (2005), no. 1, 135–147.

Dubtsov E. S. Classical operators on Bloch spaces.

Let $\mathbb{D}^n$ denote the unit polydisc and let $B_n$ denote the unit ball in $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. We investigate weighted composition operators on the $\alpha$-Bloch spaces $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{D}^n)$, $\alpha > 1$. Also, we study Cesàro type operators on the $\alpha$-Bloch spaces $\mathcal{B}^\alpha(B_n)$, $\alpha > 0$.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия

*E-mail*: dubtsov@pdmi.ras.ru

Поступило 11 мая 2009 г.