Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 366, 2009 г.

М. Ф. Гамаль

О СЖАТИЯХ С КОМПАКТНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

1. Введение

Пусть $\mathcal{H}$ – (комплексное сепарабельное) гильбертово пространство, T – (линейный ограниченный) оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$. Оператор T называется сжатием, если $\|T\| \leq 1$. Хорошо известно, что любое сжатие T может быть единственным образом представлено в виде ортогональной суммы $T = T_1 \oplus U_{(a)} \oplus U_{(s)}$, где T_1 – вполне неунитарное сжатие, а $U_{(a)}$ и $U_{(s)}$ – абсолютно непрерывный и сингулярный (по отношению к мере Лебега на единичной окружности $\mathbb{T}$) унитарные операторы (см. [26, I.3.2]). Сжатие T называется *абсолютно непрерывным* (*а.н.*), если $U_{(s)} = \mathbb{O}$. Для а.н. сжатия T определено функциональное исчисление С.-Надя–Фойаша (см. [26, III.2.1]), именно, для каждой функции $h \in H^\infty$, где H^∞ – пространство Харди ограниченных аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$, корректно определен оператор $h(T)$, действующий в пространстве $\mathcal{H}$. Для любого а.н. сжатия T и любой функции $h \in H^\infty$ имеет место неравенство $\|h(T)\| \leq \|h\|_\infty$. А.н. сжатие T принадлежит классу $\mathbb{A}$, если для любой функции $h \in H^\infty$ имеет место равенство $\|h(T)\| = \|h\|_\infty$ (см. [5] и ссылки там). Обозначим через $\sigma(T)$ спектр оператора T. Хорошо известно следующее простое утверждение: если а.н. сжатие T принадлежит классу $\mathbb{A}$, то $\mathbb{T} \subset \sigma(T)$, и если для а.н. сжатия T имеет место включение $\mathbb{D} \subset \sigma(T)$, то T принадлежит классу $\mathbb{A}$.

Классы сжатий $C_{\alpha\beta}$, где $\alpha, \beta = \cdot, 0, 1$, были введены С.-Надем и Фойашем (см. [26] и ссылки там). Пусть T – сжатие в пространстве $\mathcal{H}$. Если $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| > 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, то T называется сжатием класса $C_{1\cdot}$ ($C_{1\cdot}$-сжатием). Если $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$, то T называется сжатием класса $C_{0\cdot}$ ($C_{0\cdot}$-сжатием). Если T^* – сжатие класса $C_{\alpha\cdot}$, то T называется сжатием класса $C_{\cdot\alpha}$,

---

Ключевые слова : Вполне неунитарное сжатие, унитарный оператор, функциональное исчисление Надя–Фойаша, пространство Харди.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 08-01-00723-а и грантом Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2409.2008.1 .

$\alpha = 0, 1$.

Для сжатия T определена его *изометрическая асимптота* $T_+^{(a)}$, (см., например, [26, гл. II], [1, гл. XII] и [18]). Для удобства напомним её определение. Пусть $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, определим новое псевдо-скалярное произведение в $\mathcal{H}$ по формуле $\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}(T^n x, T^n y)$, где $x, y \in \mathcal{H}$. Положим $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{0,T} = \{x \in \mathcal{H} : \ \langle x, x\rangle = 0\}$. Тогда билинейная форма $\langle x + H_0, y + H_0\rangle = \langle x, y\rangle$ будет скалярным произведением в фактор-пространстве $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$. Обозначим через $\mathcal{H}_+^{(a)}$ гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$. Очевидно, $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ для любых $x, y \in \mathcal{H}$. Поэтому $T_1 : x + \mathcal{H}_0 \mapsto Tx + \mathcal{H}_0$ – это корректно определенная изометрия в $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$. *Изометрическая асимптота* $T_+^{(a)}$ сжатия T – это непрерывное продолжение изометрии T_1 на пространство $\mathcal{H}_+^{(a)}$.

Пусть T_1 и T_2 – операторы в пространствах $\mathcal{H}_1$ и, соответственно, $\mathcal{H}_2$, и пусть $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ – линейное ограниченное отображение, сплетающее операторы T_1 и T_2, то есть $XT_1 = T_2X$. Если $\ker X = \{0\}$ и $\operatorname{clos} X\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, то оператор T_1 называется *квазиаффинным преобразованием* оператора T_2. Если оператор T_1 является квазиаффинным преобразованием оператора T_2 и оператор T_2 является квазиаффинным преобразованием оператора T_1, то T_1 и T_2 называются *квазиподобными*. Напомним, что если T_1 и T_2 – унитарные операторы и T_1 является квазиаффинным преобразованием оператора T_2, то T_1 и T_2 унитарно эквивалентны (см. [26, II.3.4]).

Очевидно, что сжатие T принадлежит классу $C_{1\cdot}$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathcal{H}_{0,T}$ из определения изометрической асимптоты сжатия T является нулевым пространством. В этом случае естественное вложение $X_+ : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_+^{(a)}$ имеет нулевое ядро, следовательно, T является квазиаффинным преобразованием своей изометрической асимптоты $T_+^{(a)}$. Сжатие T принадлежит классу C_{11} тогда и только тогда, когда оно квазиподобно унитарному оператору [26, II.3.5], и в этом случае этот унитарный оператор унитарно эквивалентен изометрической асимптоте $T_+^{(a)}$ сжатия T.

Пусть $\mathcal{M}$ – инвариантное подпространство сжатия T, действующего в пространстве $\mathcal{H}$, то есть $\mathcal{M}$ – это линейное замкнутое подмножество пространства $\mathcal{H}$, такое что $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Очевидно, что

$$(T|_{\mathcal{M}})_+^{(a)} = T_+^{(a)}|_{\operatorname{clos} X_+\mathcal{M}}. \tag{1.1}$$

Заметим, что если $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$, то *не обязательно* $\operatorname{clos} X_+\mathcal{M} \neq \mathcal{H}_+^{(a)}$. Более того, существуют сжатия T, такие что $\operatorname{clos} X_+\mathcal{M} = \mathcal{H}_+^{(a)}$ для любого инвариантного подпространства $\mathcal{M}(\neq \{0\})$ сжатия T. Например, этим свойством обладают сжатия, построенные в теореме 2.7 и следствии 2.9 настоящей статьи. Связь между инвариантными подпространствами операторов и их изометрических асимптот изучалась в [18] и [19].

Напомним, что если сжатие является абсолютно непрерывным, то его изометрическая асимптота также абсолютно непрерывна, то есть её унитарное слагаемое является абсолютно непрерывным унитарным оператором (или действует на нулевом пространстве) (см. [26, гл. II], [1, гл. XII] и [18]).

Если T – сжатие класса C_{10} и $I - T^*T$ – ядерный оператор, то T является квазиаффинным преобразованием одностороннего сдвига [28], дальнейшие результаты см. в [27, 29] и [10]. В случае, когда кратность одностороннего сдвига конечна, верно и обратное: если сжатие T является квазиаффинным преобразованием одностороннего сдвига конечной кратности, то $I - T^*T$ – ядерный оператор [11]. Используя свойство универсальности изометрической асимптоты (см. [18]) и теорему 1 из [20], легко видеть, что изометрическая асимптота сжатия, являющегося квазиаффинным преобразованием одностороннего сдвига конечной кратности, является этим односторонним сдвигом.

В статье [8] поставлен следующий вопрос: *пусть T – сжатие класса C_{10}, такое что оператор $I - T^*T$ компактен и $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$. Может ли изометрическая асимптота $T_+^{(a)}$ сжатия T быть редуктивным унитарным оператором?* В настоящей статье дается *положительный* ответ на этот вопрос.

Напомним определение из статьи [5]. Пусть T – оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и $\mathcal{M}$ – его инвариантное подпространство. Пусть существуют векторы h_z из $\mathcal{M}$, такие что $(T|_{\mathcal{M}})^*h_z = \overline{z}h_z$ для любого $z \in \mathbb{D}$ и отображение $z \mapsto h_{\overline{z}}$, $\mathbb{D} \to \mathcal{M}$, – аналитическое. Тогда $\mathcal{M}$ называется *аналитическим инвариантным подпространством* для T. Если ещё и $\bigvee_{z\in\mathbb{D}} h_z = \mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ называется *полным аналитическим инвариантным подпространством* для T. Легко видеть, что если T – сжатие и $\mathcal{M}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для T, то $T|_{\mathcal{M}}$ принадлежит классу $C_{\cdot 0}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – это гильбертово пространство функций, аналитических в открытом единичном круге $\mathbb{D}$, такое что функционалы $f \mapsto f(z)$ непрерывны на $\mathcal{H}$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Тогда существуют функции h_z из $\mathcal{H}$, такие что $f(z) = (f, h_z)$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и отображение $z \mapsto h_{\overline{z}}$, $\mathbb{D} \to \mathcal{H}$, аналитично. Далее, пусть отображение $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(Tf)(z) = zf(z)$, ограничено, то есть T – оператор. Легко видеть, что $T^* h_z = \overline{z} h_z$. Следовательно, $\mathcal{H}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для T.

С другой стороны, если T – сжатие и $\mathcal{M}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для T, то существует гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ функций, аналитических в $\mathbb{D}$, такое что функционалы $f \mapsto f(z)$ непрерывны на $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и сжатие $T|_{\mathcal{M}}$ унитарно эквивалентно оператору умножения на независимую переменную в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ (предложение 4.3 из [5]).

Следующая теорема является непосредственным следствием теорем 6.2, 5.4 и предложения 5.3 из [5].

Теорема A [5]. *Пусть T – вполне неизометрическое сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то есть T не имеет инвариантных подпространств, таких, что сужения сжатия T на них являются изометриями. Далее, пусть T принадлежит классам $\mathbb{A}$ и $C_{1\cdot}$. Тогда множество векторов из $\mathcal{H}$, каждый из которых порождает полное аналитическое инвариантное подпространство $\mathcal{M}$ для T, такое, что аналитические многочлены плотны в $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$, плотно в $\mathcal{H}$.*

Применяя теорему A, мы видим, что положительный ответ на сформулированный выше вопрос эквивалентен утверждению о существовании гильбертова пространства $\mathcal{H}$ функций, аналитических в $\mathbb{D}$, удовлетворяющего следующим условиям:

(i) функционалы $f \mapsto f(z)$ непрерывны на $\mathcal{H}$ для всех $z \in \mathbb{D}$;

(ii) аналитические многочлены плотны в $\mathcal{H}$;

(iii) отображение $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(Tf)(z) = zf(z)$, является C_{10}-сжатием;

(iv) оператор $I - T^*T$ компактен;

(v) $T_+^{(a)}$ – редуктивный унитарный оператор.

Будем говорить, что сжатие удовлетворяет условиям (i)–(v), если оно унитарно эквивалентно оператору, определенному в (iii), действующему в пространстве функций, аналитических в $\mathbb{D}$, удовлетворяющем условиям (i)–(v).

В настоящей статье мы строим два вида примеров пространств, удовлетворяющих условиям (i)–(v). Один вид примеров получается прямым построением подходящего пространства аналитических функций. Именно, мы строим положительную конечную борелевскую меру ν в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$, такую, что замыкание аналитических многочленов в пространстве $L^2(\nu)$ удовлетворяет условиям (i)–(v). Второй вид примеров строится с применением теоремы A. Мы строим сжатие R, квазиподобное редуктивному унитарному оператору, и такое, что R удовлетворяет условиям теоремы A и оператор $I - R^*R$ принадлежит классам Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ для всех $p > 1$. Применяя теорему A, мы получаем, что R имеет "больше" инвариантных подпространств, чем унитарный оператор, которому он квазиподобен, и что сужения T сжатия R на некоторые его инвариантные подпространства удовлетворяют условиям (i)–(v), и операторы $I - T^*T$ принадлежат классам $\mathfrak{S}_p$ для всех $p > 1$. Также, следуя статье [2], мы показываем, что если подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$ является спектром сжатия, квазиподобного данному абсолютно непрерывному унитарному оператору, то это сжатие T может быть выбрано так, чтобы оператор $I - T^*T$ был компактен. Кроме того, если это подмножество – вся окружность $\mathbb{T}$, то сжатие T может быть выбрано из класса $\mathbb{A}$.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{D}$ – открытый единичный круг, $\overline{\mathbb{D}}$ – замкнутый единичный круг, $\mathbb{T}$ – единичная окружность, H^2 – пространство Харди в $\mathbb{D}$, m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Для борелевского множества $\tau \subset \mathbb{T}$ символом $U(\tau)$ обозначается оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\tau, m)$ функций из $L^2(\mathbb{T}, m)$, равных нулю п. в. на $\mathbb{T} \setminus \tau$.

Статья организована следующим образом. В §2 рассматриваются операторы умножения на независимую переменную в замыкании аналитических многочленов в $L^2(\nu)$, где ν – положительная конечная борелевская мера на $\overline{\mathbb{D}}$. В §3 строится сжатие R, квазиподобное редуктивному унитарному оператору и такое, что R удовлетворяет условиям теоремы A и оператор $I - R^*R$ принадлежит классам Шаттена–фон Нейманна $\mathfrak{S}_p$ для всех $p > 1$. В §4 расматриваются спектры сжатий T, квазиподобных унитарным операторам и таких, что операторы $I - T^*T$ компактны.

Наконец, в оставшейся части введения приводится заимствованный из [9] пример C_{10}-сжатия T, такого что оператор $I - T^*T$ компактен, $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ и $T_+^{(a)}$ является редуктивным унитарным оператором.

Пример 1.1 [9]. Пусть отображение $\omega : \mathbb{Z} \to [1, \infty)$ удовлетворяет следующим условиям: $\omega(n) = 1$ при $n \geq 0$, $\omega(n) \to \infty$ при $n \to -\infty$ и ω субмультипликативно, то есть $\omega(n + k) \leq \omega(n)\omega(k)$, где n, $k \in \mathbb{Z}$.

Положим

$$L^2_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{T}, m) \ : \ \|f\|_\omega = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \omega^2(n) \Big)^{1/2} < \infty \Big\},$$

$$T_\omega : \ L^2_\omega(\mathbb{T}) \to L^2_\omega(\mathbb{T}), \quad (T_\omega f)(z) = zf(z), \quad f \in L^2_\omega(\mathbb{T}),$$

и обозначим через $X_\omega \ : \ L^2_\omega(\mathbb{T}) \ \to \ L^2(\mathbb{T}, m)$ естественное вложение. Тогда T_ω – C_{10}-сжатие, $U(\mathbb{T})$ – его изометрическая асимптота и $X_\omega = X_+$, где X_+ – сплетающее отображение, построенное в определении изометрической асимптоты сжатия (доказательство см. в [9, §2]). Пусть теперь $\alpha \in (0,1)$, положим $\omega(n) = e^{|n|^\alpha}$ при $n < 0$ (см. [9, замечание 4.3(1)]). Тогда $\sigma(T_\omega) = \mathbb{T}$ и $I - T^*_\omega T_\omega \in \mathfrak{S}_p$ для $p > 1/(1-\alpha)$. Далее, пусть $E \subset \mathbb{T}$ – замкнутое множество и $0 < m(E) < 1$. Положим $\mathcal{M}(E) = \{f \in L^2_\omega(\mathbb{T}) \colon \ f = 0$ п.в. на $E\}$, тогда $\mathcal{M}(E)$ является инвариантным подпространством для T_ω и T_ω^{-1}, и $\operatorname{clos} X_\omega \mathcal{M}(E) = L^2(\mathbb{T}\setminus E, m)$ (доказательство см. в [9, замечание 4.3(1)]). Пусть теперь $T = T_\omega|_{\mathcal{M}(E)}$, тогда T – C_{10}-сжатие, $I - T^*T \in \mathfrak{S}_p$ для $p > 1/(1-\alpha)$ и $T^{(a)}_+ = U(\mathbb{T}\setminus E)$ (см. (1.1)). Так как T обратим, а $I - T^*T$ компактен, то $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ [8, предложение 7].

Отметим, что в [17] получено полное описание множеств, являющихся спектрами C_{10}-сжатий.

2. Об операторах умножения на независимую переменную в замыкании аналитических многочленов

Операторы, рассматриваемые в этом параграфе – это субнормальные операторы, они изучались многими авторами, мы ссылаемся на книгу [7].

В этом параграфе используются следующие обозначения. Символом m_2 обозначается нормированная плоская мера Лебега в $\mathbb{D}$. Пусть ν – положительная конечная борелевская мера в $\overline{\mathbb{D}}$. Через $P^2(\nu)$ обозначается замыкание аналитических многочленов в $L^2(\nu)$, а символом S_ν обозначается оператор умножения на независимую переменную в $P^2(\nu)$, то есть

$$S_\nu : P^2(\nu) \to P^2(\nu), \quad (S_\nu f)(z) = zf(z), \quad f \in P^2(\nu), \quad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Очевидно, S_ν является сжатием.

Следующая лемма является непосредственным следствием определения изометрической асимптоты сжатия, поэтому её доказательство опускается.

Лемма 2.1. *Пусть ν – положительная конечная борелевская мера на $\overline{\mathbb{D}}$, $\mathcal{H} = P^2(\nu)$ и $T = S_\nu$. Тогда*

$$\mathcal{H}_{0,T} = \big\{f \in P^2(\nu) :\ f = 0 \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T} \ \text{ по отношению к } \ \nu\big\},$$

$\mathcal{H}_+^{(a)} = P^2(\nu|_{\mathbb{T}})$ *и* $T_+^{(a)} = S_{\nu|_{\mathbb{T}}}$.

Следующая лемма дает примеры сжатий S_ν, таких что оператор $I - S_\nu^* S_\nu$ компактен.

Лемма 2.2. *Пусть μ – положительная конечная борелевская мера на $\overline{\mathbb{D}}$ и $\nu = m_2 + \mu$. Тогда функции из $P^2(\nu)$ аналитичны в $\mathbb{D}$, функционалы $f \mapsto f(z)$ непрерывны на $P^2(\nu)$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и оператор $I - S_\nu^* S_\nu$ компактен.*

Доказательство. Хорошо известно, что функции из $P^2(m_2)$ аналитичны в $\mathbb{D}$, функционалы $f \mapsto f(z)$ непрерывны на $P^2(m_2)$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{P^2(m_2)}}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Так как $\|f\|_{P^2(m_2)} \le \|f\|_{P^2(\nu)}$ для $f \in P^2(\nu)$, то естественное вложение $P^2(\nu) \to P^2(m_2)$, $f \mapsto f|_{\mathbb{D}}$, непрерывно. Поэтому функции из $P^2(\nu)$ аналитичны в $\mathbb{D}$, функционалы $f \mapsto f(z)$ непрерывны на $P^2(\nu)$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{P^2(\nu)}}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

Используем следующий критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве: оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, компактен, если для любой последовательности $\{x_n\}_n$ векторов из $\mathcal{H}$, сходящейся к нулю в слабой топологии, имеем $\|Ax_n\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Пусть $P_+ : L^2(\nu) \to P^2(\nu)$ – ортогональный проектор. Легко видеть, что $(I - S_\nu^* S_\nu)f = P_+(1-|z|^2)f$, $f \in P^2(\nu)$. Поэтому $\|(I - S_\nu^* S_\nu)f\| \le \|(1-|z|^2)f\|_{L^2(\nu)}$, $f \in P^2(\nu)$. Следовательно, достаточно проверить, что $\|(1-|z|^2)f\|_{L^2(\nu)} \underset{n}{\longrightarrow} 0$ для любой последовательности $\{f_n\}_n$, сходящейся к нулю в слабой топологии пространства $P^2(\nu)$.

Теперь пусть последовательность $\{f_n\}_n$ сходится к нулю в слабой топологии пространства $P^2(\nu)$. Тогда существует положительное число C, такое что $\|f_n\|_{P^2(\nu)} \le C$ для всех n, и $f_n(z) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ для всех

$z \in \mathbb{D}$. Поэтому

$$\|(1-|z|^2)f_n\|^2_{L^2(\nu)} = \int\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^2|f_n|^2 d\nu \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

по теореме Лебега. □

Теперь пусть $\nu = m_2 + \mu$, где μ – положительная конечная борелевская мера на $\overline{\mathbb{D}}$. Из леммы 2.2 и [7, II.7] (см. также введение) следует, что функционалы $f \mapsto f(z)$ непрерывны на $P^2(\nu)$ для всех $z \in \mathbb{D}$, поэтому каждая точка из $\mathbb{D}$ принадлежит точечному спектру оператора S^*_ν. Если мера $\mu|_{\mathbb{T}}$ абсолютно непрерывна по отношению к m и существует борелевское множество $\tau \subset \mathbb{T}$, такое что $m(\tau) > 0$ и $\mu(\tau) = 0$, то $P^2(\mu|_{\mathbb{T}}) = L^2(\mu|_{\mathbb{T}})$ и изометрическая асимптота сжатия S_ν является абсолютно непрерывным редуктивным унитарным оператором. Следующий пример, являющийся частным случаем теоремы 4.1 из [21], показывает, что только что приведенные условия на ν не являются достаточными для того, чтобы оператор S_ν принадлежал классу C_{10}. Сначала напомним определение.

Определение. *Пусть E – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{T}$ и пусть $\{J_k\}_k$ – семейство открытых дуг окружности $\mathbb{T}$, такое что $J_k \cap J_\ell = \varnothing$ при $k \neq \ell$ и $\mathbb{T} = E \cup \bigcup_k J_k$. Множество E удовлетворяет условию Карлесона, если*

$$\sum_k m(J_k)\log m(J_k) > -\infty.$$

Пример 2.3 [21]**.** Пусть E – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{T}$, такое что $m(E) > 0$ и E не имеет замкнутых подмножеств положительной меры Лебега m, удовлетворяющих условию Карлесона. Возьмём число α, $0 < \alpha < 1/2$. По теореме 4.1 из [21] существует последовательность $\{p_n\}_n$ аналитических многочленов, такая что

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |p_n(z) - 1|(|1-|z|)^\alpha \underset{n}{\longrightarrow} 0 \tag{2.2}$$

и $p_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$ равномерно на E. Из (2.2) следует, что $\|p_n - 1\|_{P^2(m_2)} \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Пусть теперь $\nu = m_2 + m|_E$. Положим $f_0(z) = 1$, $z \in \mathbb{D}$, $f_0(z) = 0$, $z \in E$, и $f_1 = 1 - f_0$. Мы видим, что $f_0, f_1 \in P^2(\nu)$. Так как $\|S^n_\nu f_0\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$, то S_ν не принадлежит классу $C_{1\cdot}$. Положим $\mathcal{M} = \{f \in$

$P^2(\nu) : f(z) = 0$ при $z \in \mathbb{D}\}$. Очевидно, $\mathcal{M}$ – замкнутое подпространство пространства $P^2(\nu)$ и $S_\nu\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Имеем $f_1 \in \mathcal{M}$, поэтому $\mathcal{M}$ содержит сужения на E всех аналитических многочленов. Следовательно, $\mathcal{M} = L^2(m|_E)$. Теперь легко видеть, что $\mathcal{M}$ – это приводящее подпространство для S_ν, и оператор $S_\nu|_\mathcal{M}$ унитарный. Поэтому S_ν не принадлежит классу $C_{\cdot 0}$.

Отметим, что сходные вопросы рассматриваются в [7, VII.7].

Следующая лемма показывает, как можно построить меры ν, для которых сжатие S_ν принадлежит классу C_{10}.

Лемма 2.4. *Пусть $G \subset \mathbb{D}$ – односвязная область, такая что ∂G – спрямляемая жорданова кривая, и пусть μ – длина дуги на ∂G. Пусть $f \in P^2(m_2)$, $g \in P^2(\mu)$ и $\{p_n\}_n$ – последовательность аналитических многочленов, такая что $p_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ в $P^2(m_2)$ и $p_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ в $P^2(\mu)$. Тогда f имеет угловые граничные значения $f(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \partial G \cap \mathbb{T}$, и $f(\zeta) = g(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \partial G \cap \mathbb{T}$. (Конечно, $f(z) = g(z)$ при $z \in \partial G \cap \mathbb{D}$.)*

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathbb{D} \to G$ – конформное отображение. Тогда φ имеет непрерывное продолжение на $\overline{\mathbb{D}}$ и $\varphi' \in H^1$. Следовательно, существует внешняя функция $\psi \in H^2$, такая что $|\psi|^2 = |\varphi'|$ п.в. на $\mathbb{T}$ и

$$\int_{\partial G} |p_n - g|^2 d\mu = \int_{\mathbb{T}} |p_n \circ \varphi - g \circ \varphi|^2 |\varphi'| dm$$
$$= \int_{\mathbb{T}} |(p_n \circ \varphi)\psi - (g \circ \varphi)\psi|^2 dm \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Так как $p_n \circ \varphi \in H^\infty$ и $\psi \in H^2$, то $(p_n \circ \varphi)\psi \in H^2$ и $(p_n \circ \varphi)\psi \underset{n}{\longrightarrow} (g \circ \varphi)\psi$ в $L^2(\mathbb{T}, m)$. Поэтому $(g \circ \varphi)\psi \in H^2$. Таким образом, $(g \circ \varphi)\psi$ имеет аналитическое продолжение h в $\mathbb{D}$, и $((p_n \circ \varphi)\psi)(w) \underset{n}{\longrightarrow} h(w)$ для каждой точки $w \in \mathbb{D}$. С другой стороны, из сходимости $p_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ в $P^2(m_2)$ следует, что $p_n(z) \underset{n}{\longrightarrow} f(z)$ для каждой точки $z \in \mathbb{D}$, и, в частности, для каждой точки $z \in G$. Следовательно, $((p_n \circ \varphi)\psi)(w) \underset{n}{\longrightarrow} ((f \circ \varphi)\psi)(w)$ для каждой точки $w \in \mathbb{D}$, и мы получаем, что $h = (f \circ \varphi)\psi$. Поэтому $(f \circ \varphi)\psi$ имеет угловые граничные значения $(g \circ \varphi)\psi$ п.в. на $\mathbb{T}$. Так как ψ также имеет угловые граничные значения п.в. на $\mathbb{T}$, мы заключаем, что $f \circ \varphi$ имеет угловые граничные значения $g \circ \varphi$ п.в. на $\mathbb{T}$.

Чтобы закончить доказательство, заметим, что отображение φ конформно почти во всех точках окружности $\mathbb{T}$, в частности, почти во всех точках множества $\varphi^{-1}(\partial G \cap \mathbb{T})$. Значит, если φ конформно в некоторой точке $\xi \in \varphi^{-1}(\partial G \cap \mathbb{T})$ и $f \circ \varphi$ имеет угловое граничное значение $(g \circ \varphi)(\xi)$ в ξ, то f имеет угловое граничное значение $g(\varphi(\xi))$ в точке $\varphi(\xi)$. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $\tau \subset \mathbb{T}$ – борелевское множество, такое что $m(\tau) > 0$, и μ – положительная конечная борелевская мера в $\overline{\mathbb{D}}$, такая что $\mu(\tau) = \mu(\mathbb{T})$ и $\mu|_\tau$ и $m|_\tau$ взаимно абсолютно непрерывны. Пусть $\nu = m_2 + \mu$. Далее, пусть для каждой функции $f \in P^2(\nu)$ ее сужение $f|_{\mathbb{D}}$ имеет угловые граничные значения п.в. на τ, совпадающие с $f|_\tau$. Тогда S_ν принадлежит классу C_{10}.*

Доказательство. Пусть $f \in P^2(\nu)$. Из аналитичности функции $f|_{\mathbb{D}}$ и условий леммы следует, что $f \not\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $f \neq 0$ п.в. на τ. По лемме 2.1, $S_\nu \in C_{1\cdot}$. С другой стороны, пусть функция f ортогональна всем собственным векторам сжатия S_ν^*, принадлежащим точкам из $\mathbb{D}$. Это означает, что $f \equiv 0$ в $\mathbb{D}$, поэтому $f = 0$ п.в. на τ, то есть $f \equiv 0$. Таким образом, $S_\nu \in C_{\cdot 0}$. $\square$

Следствие 2.6. *Пусть E – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{T}$, такое что $0 < m(E) < 1$, и пусть $\{J_k\}_k$ – семейство открытых дуг окружности $\mathbb{T}$, такое что $J_k \cap J_\ell = \varnothing$ при $k \neq \ell$ и $\mathbb{T} = E \cup \bigcup_k J_k$. Пусть $G \subset \mathbb{D}$ – односвязная область с границей ∂G, состоящей из объединения множества E и хорд, концы которых совпадают с концами дуг J_k. Пусть $\nu = m_2 + \mu$, где μ – длина дуги на ∂G. Тогда сжатие S_ν удовлетворяет условиям* (i)–(v), *и его изометрическая асимптота – это оператор $U(E)$.*

Доказательство. По лемме 2.2 оператор $I - S_\nu^* S_\nu$ компактен, по лемме 2.1 изометрическая асимптота сжатия S_ν – это $S_{\nu|_{\mathbb{T}}}$. Имеем $\nu|_{\mathbb{T}} = \mu|_E = m|_E$, и, так как $m(E) < 1$, заключаем, что $P^2(m|_E) = L^2(E, m)$.

Если $f \in P^2(\nu)$, то, по лемме 2.4, $f|_{\mathbb{D}}$ имеет угловые граничные значения п.в. на E, совпадающие с $f|_E$. Таким образом, ν удовлетворяет лемме 2.5 с $\tau = E$. Поэтому $S_\nu \in C_{10}$. $\square$

Теорема 2.7. *Пусть E – борелевское подмножество окружности $\mathbb{T}$, такое что $0 < m(E) < 1$. Тогда существует положительная конечная борелевская мера μ в $\overline{\mathbb{D}}$, такая что сжатие $S_{m_2+\mu}$ удовлетворяет* *условиям* (i)–(v) *и его изометрическая асимптота унитарно эквивалентна оператору* $U(E)$. (*Напомним, что символом* $U(E)$ *обозначается оператор умножения на независимую переменную в пространстве* $L^2(E,m)$).

Доказательство. Так как E – борелевское множество, то существуют последовательность $\{E_n\}_n$ замкнутых подмножеств окружности $\mathbb{T}$ и множество e нулевой меры, такие что $E_n \subset E_{n+1}$ и $E = \bigcup_n E_n \cup e$. Пусть G_n – односвязная область, построенная по множеству E_n как в следствии 2.6, и пусть μ_n – длина дуги на ∂G_n. Пусть $\{c_n\}_n$ – последовательность положительных чисел, такая что $\sum_n c_n < \infty$. Положим $\mu = \sum_n c_n\mu_n$. Так как $m(E) < 1$, то $P^2(\mu|_E) = L^2(E,\mu)$. Легко видеть, что $\mu|_E$ и $m|_E$ взаимно абсолютно непрерывны, поэтому оператор умножения на независимую переменную в $L^2(E,\mu)$ унитарно эквивалентен оператору $U(E)$.

Пусть $f \in P^2(m_2 + \mu)$. Применяя лемму 2.4 к каждой области G_n, заключаем, что $f|_{\mathbb{D}}$ имеет угловые граничные значения п.в. на E_n, совпадающие с $f|_{E_n}$. Поэтому $f|_{\mathbb{D}}$ имеет угловые граничные значения п.в. на E, совпадающие с $f|_E$. Остается применить лемму 2.5. □

Следующая теорема, основанная на теореме 3.1 из [21], показывает, что для множества E, удовлетворяющего условию Карлесона, не нужно использовать длину дуги на границе вспомогательной области, чтобы построить оператор, удовлетворяющий условиям (i)–(v).

Теорема 2.8. *Пусть* E *– замкнутое подмножество окружности* $\mathbb{T}$, *удовлетворяющее условию Карлесона. Пусть функция* f *аналитична в* $\mathbb{D}$, $g \in L^1(E,m)$, $C \geq 1$, *и* $\{p_n\}_n$ *– последовательность аналитических многочленов, такая что* $|p_n(z)| \leq C/(1-|z|)$ *для всех* n *и всех* $z \in \mathbb{D}$, $p_n(z) \underset{n}{\longrightarrow} f(z)$ *для любого* $z \in \mathbb{D}$ *и* $p_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ *в* $L^1(E,m)$. *Тогда* f *имеет угловые граничные значения* $f(\zeta)$ *для п.в.* $\zeta \in E$, *и* $f(\zeta) = g(\zeta)$ *для п.в.* $\zeta \in E$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что E не содержит (непустых) изолированных подмножеств меры ноль. В доказательстве теоремы 3.1 из [21] построена односвязная область G, такая что $0 \in G$, ∂G – спрямляемая жорданова кривая, $\partial G \cap \mathbb{T} = E$ и $\log(1-|z|) \in L^1(\partial G \cap \mathbb{D}, \mu)$, где μ – гармоническая мера области G в точке 0. Пусть $\varphi : \mathbb{D} \to G$ – конформное отображение, такое что $\mu(\tau) = m(\varphi^{-1}(\tau))$ для каждого измеримого подмножества τ множества ∂G.

Положим $h_n = p_n \circ \varphi$. Ясно, что $h_n \in H^\infty(\mathbb{D})$. Далее, так как $\mu(\tau) \leq m(\tau)$ для каждого измеримого подмножества τ множества E и $p_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ в $L^1(E,m)$, то $h_n \underset{n}{\longrightarrow} g \circ \varphi$ в $L^1(\varphi^{-1}(E),m)$. Поэтому существуют функция H из $L^1(\varphi^{-1}(E),m)$ и подпоследовательность $\{h_{n_k}\}_k$ последовательности $\{h_n\}_n$, такие что $H \geq 1$, $|h_{n_k}| \leq H$ п.в. на $\varphi^{-1}(E)$ и $h_{n_k} \underset{k}{\longrightarrow} g \circ \varphi$ п.в. на $\varphi^{-1}(E)$. Не умаляя общности, считаем, что $\{h_{n_k}\}_k = \{h_n\}_n$.

Положим $H(\zeta) = C/(1 - |\varphi(\zeta)|)$, $\zeta \in \varphi^{-1}(\partial G \cap \mathbb{D})$. Теперь функция H определена п.в. на $\mathbb{T}$, $\log H \in L^1(\mathbb{T},m)$, и $|h_n| \leq H$ п.в. на $\mathbb{T}$. Пусть H_e – внешняя функция в $\mathbb{D}$, такая что $|H_e| = H$ п.в. на $\mathbb{T}$. Так как $|h_n| \leq H$ п.в. на $\mathbb{T}$, то $|h_n| \leq |H_e|$ в $\mathbb{D}$. Положим $\psi_n(z) = h_n(z)/H_e(z)$ и $\psi(z) = (f \circ \varphi)(z)/H_e(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Имеем $\psi_n, \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$,

$$\|\psi_n\|_\infty \leq 1, \tag{2.3}$$

$\psi_n(z) \underset{n}{\longrightarrow} \psi(z)$ для любого $z \in \mathbb{D}$, и ψ_n имеют угловые граничные значения $h_n(\zeta)/H_e(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$.

Положим

$$\psi_*(\zeta) = \begin{cases} (g \circ \varphi)(\zeta)/H_e(\zeta) & \text{для п.в.} \quad \zeta \in \varphi^{-1}(E), \\ (f \circ \varphi)(\zeta)/H_e(\zeta) & \text{для п.в.} \quad \zeta \in \varphi^{-1}(\partial G \cap \mathbb{D}). \end{cases}$$

Так как $h_n(\zeta) \underset{n}{\longrightarrow} (g \circ \varphi)(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \varphi^{-1}(E)$ и $h_n(\zeta) \underset{n}{\longrightarrow} (f \circ \varphi)(\zeta)$ для любого $\zeta \in \varphi^{-1}(\partial G \cap \mathbb{D})$, то $\psi_n(\zeta) \underset{n}{\longrightarrow} \psi_*(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$. Из этой сходимости и оценки (2.3) получаем, что $\psi_* \in H^\infty(\mathbb{D})$ и $\psi_n(z) \underset{n}{\longrightarrow} \psi_*(z)$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Мы заключаем, что $\psi = \psi_*$, в частности, ψ имеет угловые граничные значения $\psi_*(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \varphi^{-1}(E)$. Умножая на H_e, заключаем, что $f \circ \varphi$ имеет угловые граничные значения $(g \circ \varphi)(\zeta)$ для п.в. $\zeta \in \varphi^{-1}(E)$. Оставшаяся часть доказательства – это повторение конца доказательства леммы 2.4. $\square$

Следствие 2.9. *Пусть E – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{T}$, удовлетворяющее условию Карлесона, такое что $0 < m(E) < 1$. Пусть $\nu = m_2 + m|_E$. Тогда сжатие S_ν удовлетворяет условиям* (i)–(v), *и его изометрическая асимптота – это оператор $U(E)$.*

Доказательство. Пусть $f \in P^2(\nu)$. Тогда существует последовательность $\{p_n\}_n$ аналитических многочленов, такая что $p_n \underset{n}{\longrightarrow} f|_{\mathbb{D}}$ в

$P^2(m_2)$ и $p_n \underset{n}{\longrightarrow} f|_E$ в $L^2(E,m)$. Отсюда и из оценки (2.1) следует, что $\{p_n\}_n$, $f|_{\mathbb{D}}$ и $f|_E$ удовлетворяют условиям теоремы 2.8. Таким образом, $f|_{\mathbb{D}}$ имеет угловые граничные значения п.в. на E, совпадающие с $f|_E$. Остается применить леммы 2.1, 2.2 и 2.5. $\square$

Замечание 2.10. Пусть $h \in L^1(\mathbb{T},m)$ – положительная функция ($h > 0$ п.в. на $\mathbb{T}$), такая что $\log h \notin L^1(\mathbb{T},m)$ и для любой замкнутой дуги $J \subset \mathbb{T}\setminus\{1\}$ существуют константы C_J, $c_J > 0$ такие, что $c_J \le h \le C_J$. Пусть $\nu = m_2 + hm$. Применяя теорему 2.8 с $E = J$ для каждой дуги $J \subset \mathbb{T}\setminus\{1\}$, получаем, что если $f \in P^2(\nu)$, то $f|_{\mathbb{D}}$ имеет угловые граничные значения п.в. на $\mathbb{T}$, совпадающие с $f|_{\mathbb{T}}$. Применяя леммы 2.1, 2.2 и 2.5, видим, что сжатие S_ν удовлетворяет условиям (i)–(iv) и его изометрическая асимптота унитарно эквивалентна оператору $U(\mathbb{T})$. Такой вид примеров не является новым, более интересный и сложный субнормальный оператор исследовался в [22, 23], см. также ссылки там.

3. О сжатиях с дефектами из класса Шаттена–фон Неймана

В этом параграфе строится сжатие R, квазиподобное редуктивному унитарному оператору, удовлетворяющее условиям теоремы A и такое, что оператор $I - R^*R$ принадлежит классам Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ для всех $p > 1$. Сжатие R строится как ортогональная сумма сжатий со *скалярной внешней характеристической функцией* (см. [26]), для удобства напомним определение.

Определение. *Пусть $\theta \in H^\infty$ – внешняя функция, такая что $\|\theta\|_\infty \le 1$. Положим $\Delta(\zeta) = \Delta_\theta(\zeta) = (1 - |\theta(\zeta)|^2)^{1/2}$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$ и $\tau = \tau_\theta = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\theta(\zeta)| \ne 1\}$. Далее, положим*

$$\mathcal{K}_\theta = \begin{pmatrix} H^2 \\ L^2(\tau, m) \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} \theta \\ \Delta \end{pmatrix} H^2.$$

Обозначим через P_θ ортогональный проектор из $\begin{pmatrix} H^2 \\ L^2(\tau,m) \end{pmatrix}$ на $\mathcal{K}_\theta$. Сжатие $S(\theta)$ с характеристической функцией θ – это компрессия на $\mathcal{K}_\theta$ оператора умножения на независимую переменную в пространстве $\begin{pmatrix} H^2 \\ L^2(\tau,m) \end{pmatrix}$, то есть $S(\theta)f = P_\theta z f$, $f \in \mathcal{K}_\theta$.

В следующей лемме собраны хорошо известные факты о сжатиях со скалярными внешними характеристическими функциями, доказательства содержатся в [26].

Лемма 3.1 [26]. *Пусть* $\theta \in H^\infty$ *– внешняя функция, такая что* $\|\theta\|_\infty \leq 1$, *и пусть* $S(\theta)$ *– сжатие с характеристической функцией* θ. *Тогда сжатие* $S(\theta)$ *принадлежит классу* C_{11} *и квазиподобно оператору* $U(\tau_\theta)$, *при этом сжатие* $S(\theta)$ *подобно оператору* $U(\tau_\theta)$ *тогда и только тогда, когда* $1/\theta \in H^\infty$, $I - S(\theta)^* S(\theta)$ *– одномерный оператор и его собственное число равно* $1 - |\theta(0)|^2$. *Далее,* $\sigma(S(\theta)) = \operatorname{clos} \tau_\theta$, *и*

$$\|(S(\theta) - \lambda)^{-1}\| \geq \frac{|\theta(\lambda)|^{-1} - 1}{2(1 - |\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

Следующая лемма является частным случаем предложения 3.4 из [4].

Лемма 3.2 [4]. *Пусть* $c > 1$, $\tau \subset \mathbb{T}$ *– борелевское множество и* T *– сжатие, квазиподобное оператору* $U(\tau)$. *Положим*

$$\Lambda_c(T) = \Big\{ \lambda \in \mathbb{D} \setminus \sigma(T) : \quad \|(T - \lambda)^{-1}\| \geq \frac{c}{1 - |\lambda|} \Big\}.$$

Если почти все точки множества $\mathbb{T} \setminus \tau$ *являются некасательными пределами последовательностей точек множества* $\Lambda_c(T)$, *то* T *принадлежит классу* $\mathbb{A}$.

Следующие две леммы будут использоваться для того, чтобы найти точки, принадлежащие множеству $\Lambda_c(R)$, и точки, являющиеся некасательными пределами точек этого множества. Лемма 3.3 основана на хорошо известном вычислении гармонической меры дуги окружности $\mathbb{T}$ в некоторой точке из $\mathbb{D}$ (см., например, [12, упражнение I.3]). Доказательство леммы 3.4 состоит в простых вычислениях. Поэтому их доказательства опускаются.

Лемма 3.3. *Пусть* $0 < s < 1/2$, $a > 0$, $sa < A < a/2$, $\tau \subset \mathbb{T}$ *–дуга,* $\xi_\pm$ *– ее концы,* $m(\tau) = s$, *а* θ *– внешняя функция, такая что*

$$|\theta(\zeta)| = \begin{cases} e^{-a} & \text{для п.в. } \zeta \in \tau, \\ 1 & \text{для п.в. } \zeta \in \mathbb{T} \setminus \tau. \end{cases}$$

Пусть r_* *удовлетворят равенству*

$$\frac{2r_*}{1 + r_*^2} = \frac{\cos 2\pi s - \cos \frac{2\pi A}{a}}{1 - \cos 2\pi s \cos \frac{2\pi A}{a}}.$$

Тогда $|\theta(r\xi_\pm)| \leq e^{-A}$ *для* $r_* \leq r < 1$.

Лемма 3.4. *Пусть* $0 < \ell < 1/4$, $0 < r \le \cos 2\pi\ell$ *и*

$$\gamma = \arctan \frac{r \sin \pi\ell}{1 - r\cos \pi\ell}.$$

Обозначим символом $\mathcal{S}(\zeta, \gamma)$ *угол Штольца с вершиной* ζ *раствора* γ. *Пусть* $J \subset \mathbb{T}$ *– дуга, такая что* $m(J) = \ell$, *и пусть* $\xi_\pm$ *– ее концы. Тогда для каждой точки* $\zeta \in J$ *хотя бы для одного знака "+" или "−" имеет место включение* $r\xi_\pm \in \mathcal{S}(\zeta, \gamma)$.

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 3.5. *Существуют борелевское множество* $\tau \subset \mathbb{T}$ *и а.н. сжатие* R *класса* $\mathbb{A}$, *такие что* $0 < m(\tau) < 1$, *сжатие* R *квазиподобно оператору* $U(\tau)$ *и* $I - R^*R \in \mathfrak{S}_p$ *для всех* $p > 1$ (*где* $\mathfrak{S}_p$ *– класс Шаттена–фон Неймана*).

Доказательство. Пусть $A > \log 3$, $0 < s_n < 1/2$ для $n = 0, 1, \dots$ и $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n s_n < 1$. Положим

$$\ell_n = \frac{1 - \sum_{k=0}^{n} 2^k s_k}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

и (3.1)

$$a_n = \frac{A\ell_n}{s_n}, \quad \text{если} \quad 2s_n < \ell_n.$$

Выберем a_n так, чтобы $s_n a_n < A < a_n/2$, если $\ell_n \le 2s_n$. Так как $\frac{s_n}{\ell_n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$, то числа a_n определены равенством (3.1) для достаточно больших n.

Построим обобщенное канторовское множество на отрезке $[0, 2\pi]$, используя последовательность $\{2\pi s_n\}_{n=0}^{\infty}$. Именно, возьмем один открытый интервал $\mathcal{I}_{01}$ с центром в точке π, такой что $|\mathcal{I}_{01}| = 2\pi s_0$, тогда множество $[0, 2\pi] \setminus \mathcal{I}_{01}$ состоит из двух отрезков $\mathcal{J}_{01}$, $\mathcal{J}_{02}$. Возьмем два открытых интервала $\mathcal{I}_{11}$, $\mathcal{I}_{12}$ с центрами в тех же самых точках, что и у $\mathcal{J}_{01}$, $\mathcal{J}_{02}$, и таких, что $|\mathcal{I}_{1k}| = 2\pi s_1$, $k = 1, 2$. Тогда множество $[0, 2\pi] \setminus (\mathcal{I}_{01} \cup \mathcal{I}_{11} \cup \mathcal{I}_{12})$ состоит из четырех отрезков $\mathcal{J}_{11}$, $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{13}$, $\mathcal{J}_{14}$. Возьмем четыре открытых интервала $\mathcal{I}_{21}$, $\mathcal{I}_{22}$, $\mathcal{I}_{23}$, $\mathcal{I}_{24}$ с центрами в тех же самых точках, что и у $\mathcal{J}_{11}$, $\mathcal{J}_{12}$, $\mathcal{J}_{13}$, $\mathcal{J}_{14}$, и таких, что $|\mathcal{I}_{2k}| = 2\pi s_2$, $k = 1, 2, 3, 4$, и так далее. (Через $|\mathcal{I}|$ обозначается длина интервала $\mathcal{I}$). Положим

$$\tau_{nk} = \{e^{it} : t \in \mathcal{I}_{nk}\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 1, \dots, 2^n, \tag{3.2}$$

и возьмем внешние функции θ_{nk}, такие что

$$|\theta_{nk}(\zeta)| = \begin{cases} e^{-a_n} & \text{для п.в. } \zeta \in \tau_{nk}, \\ 1 & \text{для п.в. } \zeta \in \mathbb{T} \setminus \tau_{nk}. \end{cases}$$

Наконец, положим

$$R = \oplus_{n=0}^{\infty} \oplus_{k=1}^{2^n} S(\theta_{nk}).$$

Покажем, что R удовлетворяет заключению теоремы 3.5.

По лемме 3.1 сжатия $S(\theta_{nk})$ подобны операторам $U(\tau_{nk})$, поэтому сжатие R квазиподобно оператору

$$U = \oplus_{n=0}^{\infty} \oplus_{k=1}^{2^n} U(\tau_{nk}).$$

Так как множества τ_{nk} попарно не пересекаются, то оператор U унитарно эквивалентен оператору $U(\tau)$, где

$$\tau = \cup_{n=0}^{\infty} \cup_{k=1}^{2^n} \tau_{nk}.$$

Имеем $m(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n s_n < 1$, поэтому оператор U редуктивный.

Далее, по лемме 3.1, операторы $I - S(\theta_{nk})^* S(\theta_{nk})$ одномерны, и их собственные числа равны $1 - e^{-2a_n s_n}$ для $k = 1, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, \dots$. Поэтому $I - R^*R \in \mathfrak{S}_p$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} (1 - e^{-2a_n s_n})^p = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (1 - e^{-2a_n s_n})^p < \infty.$$

Имеем $1 - e^{-2a_n s_n} < 2a_n s_n = 2A\ell_n$ для достаточно больших n (для определенности, для $n \geq N$) и $\ell_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} 2^n (1 - e^{-2a_n s_n})^p &\leq (2A)^p \sum_{n=N}^{\infty} 2^n \Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)^p \\ &= (2A)^p \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)+p}} < \infty \end{aligned}$$

для $p > 1$. Мы получили, что $I - R^*R \in \mathfrak{S}_p$ для $p > 1$.

Остается показать, что R принадлежит классу $\mathbb{A}$. Положим $c = (e^A - 1)/2$. По лемме 3.2 достаточно проверить, что почти все точки множества $\mathbb{T}\setminus\tau$ являются некасательными пределами последовательности точек из $\Lambda_c(R)$.

Возьмем числа r_n, $0<r_n<1$, такие, что для $n=0,1,\dots$ выполняются равенства
$$\frac{2r_n}{1+r_n^2}=\frac{\cos 2\pi s_n-\cos\frac{2\pi A}{a_n}}{1-\cos 2\pi s_n\cos\frac{2\pi A}{a_n}}. \tag{3.3}$$
Очевидно, r_n равно r_* из леммы 3.3, примененной к θ_{nk}. Значит, $|\theta_{nk}(r\xi_{\pm nk})|\le e^{-A}$ для $r_n\le r<1$, где $\xi_{\pm nk}$ – это концы дуг τ_{nk}. По лемме 3.1
$$\|(S(\theta_{nk})-r\xi_{\pm nk})^{-1}\|\ge\frac{c}{1-r}\quad\text{для}\quad r_n\le r<1.$$
Так как $\|(R-\lambda)^{-1}\|\ge\|(S(\theta_{nk})-\lambda)^{-1}\|$ для всех индексов n, k и всех $\lambda\in\mathbb{D}$, получаем, что
$$r\xi_{\pm nk}\in\Lambda_c(R)\quad\text{для}\quad r_n\le r<1,\quad\text{где}\quad\xi_{\pm nk}\quad\text{– концы дуг}\quad\tau_{nk}. \tag{3.4}$$
Заметим, что для достаточно больших n (именно, для таких, что a_n определены равенством (3.1)) имеет место равенство
$$\frac{2r_n}{1+r_n^2}=\frac{\cos 2\pi s_n-\cos\frac{2\pi s_n}{\ell_n}}{1-\cos 2\pi s_n\cos\frac{2\pi s_n}{\ell_n}}. \tag{3.5}$$

Покажем, что
$$1-\frac{2r_n}{1+r_n^2}\sim_n 2\ell_n^2. \tag{3.6}$$
Из (3.5) следует, что
$$\frac{1}{1-\frac{2r_n}{1+r_n^2}}=\left(1+\frac{\cos 2\pi s_n(1-\cos\frac{2\pi s_n}{\ell_n})}{1-\cos 2\pi s_n}\right)\frac{1}{1+\cos\frac{2\pi s_n}{\ell_n}}$$
и
$$\frac{\cos 2\pi s_n(1-\cos\frac{2\pi s_n}{\ell_n})}{1-\cos 2\pi s_n}\sim_n\frac{1}{\ell_n^2}.$$
Таким образом, (3.6) доказано.

Покажем, что, начиная с некоторого места, последовательность $\{r_n\}_n$ становится возрастающей. Положим $c_n = 1 - \frac{2r_n}{1+r_n^2}$. Из соотношения (3.6) получаем, что

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} \sim_n \frac{\ell_n^2}{\ell_{n+1}^2} \underset{n}{\longrightarrow} 4,$$

поэтому $c_{n+1} \le c_n$ для достаточно больших n, следовательно, $r_n \le r_{n+1}$ для достаточно больших n.

Далее, покажем, что

$$\sup_n \frac{r_n \sin \pi\ell_n}{1 - r_n \cos \pi\ell_n} < \infty \quad \text{и} \quad 0 < r_n \le \cos 2\pi\ell_n \tag{3.7}$$

для достаточно больших n. Очевидно, $r_n \underset{n}{\longrightarrow} 1$, поэтому

$$\frac{(1-r_n)^2}{2} \sim_n \frac{(1-r_n)^2}{1+r_n^2} = 1 - \frac{2r_n}{1+r_n^2} \sim_n 2\ell_n^2$$

(мы применили соотношение (3.6)), значит,

$$1 - r_n \sim_n 2\ell_n. \tag{3.8}$$

Так как $\ell_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, из (3.8) получаем, что $1 - r_n \ge 2\pi^2\ell_n^2 \ge 2\sin^2 \pi\ell_n = 1 - \cos 2\pi\ell_n$ для достаточно больших n. Вторая часть оценки (3.7) доказана. Далее,

$$\frac{1 - r_n \cos \pi\ell_n}{r_n \sin \pi\ell_n} \ge \frac{1 - r_n \cos \pi\ell_n}{\sin \pi\ell_n} \ge \frac{(1-r_n)\cos \pi\ell_n}{\sin \pi\ell_n} \sim_n \frac{1-r_n}{\pi\ell_n}.$$

Применяя (3.8), заключаем, что

$$\inf_n \frac{1 - r_n \cos \pi\ell_n}{r_n \sin \pi\ell_n} > 0,$$

и первая часть оценки (3.7) доказана.

Теперь вернемся к построению обобщенного канторовского множества, описанному в начале доказательства. Положим

$$J_{nk} = \{e^{it} : t \in \mathcal{J}_{nk}\}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 1, \dots, 2^{n+1},$$

Заметим, что $m(J_{nk}) = \ell_n$ и что концы дуг J_{nk} (кроме равных 1) совпадают с концами дуг $\tau_{n'k'}$ для некоторых индексов n', k', причем $n' \le n$. Покажем, что каждая точка из $(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \setminus \tau$ является пределом последовательности точек $r_n\xi_n$, где r_n определено в (3.3), а ξ_n – конец дуги J_{nk} для некоторого k. Ясно, что каждая точка $\zeta \in (\mathbb{T} \setminus \{1\}) \setminus \tau$ является пределом последовательности ξ_n, где ξ_n – конец дуги J_{nk} и, так как $r_n \underset{n}{\longrightarrow} 1$, то ζ – предел последовательности $r_n\xi_n$. Положим $\gamma = \arctan C$, где C – супремум из (3.7). По лемме 3.4 $r_n\xi_n \in \mathcal{S}(\zeta, \gamma)$. (Если выбранный конец ξ_n дуги J_{nk} не удовлетворяет заключению леммы 3.4, мы можем заменить его другим, поскольку $m(J_{nk}) = \ell_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$.) Мы получили, что каждая точка из $(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \setminus \tau$ является некасательным пределом последовательности точек $r_n\xi_n$.

Так как $\{r_n\}_n$ – возрастающая последовательность для достаточно больших n, мы можем выбрать такой номер N, что $r_{n'} \le r_n$ для $n' \le n$ и $n \ge N$. Пусть теперь $n \ge N$, r_n определено в (3.3), и ξ_n – конец дуги J_{nk} для некоторого k. Тогда существует номер $n' \le n$, такой что ξ_n является концом дуги $\tau_{n'k'}$ для некоторого k'. Так как $n \ge N$, то $r_{n'} \le r_n$, и из включения (3.4) получаем, что $r_n\xi_n \in \Lambda_c(R)$. Таким образом, почти все точки множества $\mathbb{T} \setminus \tau$ являются некасательными пределами последовательностей точек из $\Lambda_c(R)$. □

Следствие 3.6. *Существует сжатие T, удовлетворяющее условиям* (i)–(v) *и такое, что $I - T^*T \in \mathfrak{S}_p$ для всех $p > 1$.*

Доказательство. Легко видеть, что сжатие R из теоремы 3.5 удовлетворяет условиям теоремы A. Положим $T = R|_{\mathcal{M}}$, где $\mathcal{M}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для R. Так как $I - T^*T = P_{\mathcal{M}}(I - R^*R)|_{\mathcal{M}}$, где $P_{\mathcal{M}}$ – ортогональный проектор на $\mathcal{M}$, то $I - T^*T \in \mathfrak{S}_p$ для $p > 1$. Так как сжатие R квазиподобно оператору $U(\tau)$, то оператор $R_+^{(a)}$ унитарно эквивалентен оператору $U(\tau)$. Поэтому оператор $T_+^{(a)}$ унитарно эквивалентен сужению оператора $U(\tau)$ на его инвариантное подпространство (см. (1.1)). Так как $m(\tau) < 1$, то $U(\tau)$ – редуктивный унитарный оператор, поэтому его сужение на любое его инвариантное подпространство – редуктивный унитарный оператор. □

Замечание 3.7. Обозначим через $\operatorname{Lat} T$ решетку инвариантных подпространств сжатия T, через $\operatorname{Hyplat} T$ – решетку его гиперинвариантных подпространств, и через $\operatorname{Hyplat}_1 T$ – решетку таких гиперинвариантных подпространств сжатия T, что его сужения на них принадлежат классу C_{11}. Пусть T – вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то есть T не имеет таких инвариантных подпространств, что его сужения на них являются унитарными операторами, пусть сжатие T квазиподобно унитарному оператору U в гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$, и пусть характеристическая функция сжатия T (вообще говоря, не скалярная) имеет скалярное кратное $\delta \in H^\infty$ (которое в этом случае является внешней функцией (см. [26, V.6.2, VI.3.5]). Тогда существуют линейные ограниченные отображения $X : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ и $Y : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, сплетающие операторы T и U: $XT = UX$, $TY = YU$, и такие что $XY = \delta(U)$ и $YX = \delta(T)$. Поэтому отображения

$$q_X : \mathcal{M} \mapsto \operatorname{clos} X\mathcal{M} \quad \text{и} \quad q_Y : \mathcal{N} \mapsto \operatorname{clos} Y\mathcal{N}$$

являются взаимно обратными изоморфизмами решеток $\operatorname{Lat} T$ и $\operatorname{Lat} U$, $\operatorname{Hyplat} T$ и $\operatorname{Hyplat} U$ (более полное описание решеток инвариантных подпространств C_{11}-сжатий см. в [15, 18]). Отметим, что если сжатие T квазиподобно унитарному оператору, то условие $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$ является достаточным для того, чтобы его характеристическая функция имела скалярное кратное [26, VIII.1.1], и необходимым при дополнительном условии конечной спектральной кратности сжатия T [11].

Для сжатия R и унитарного оператора $U(\tau)$ из теоремы 3.5 не существует сплетающих линейных ограниченных отображений X и Y, таких что q_X и q_Y являются взаимно обратными изоморфизмами решеток $\operatorname{Lat} R$ и $\operatorname{Lat} U(\tau)$. Если предположить, что такие отображения X и Y существуют, то сжатие $R|_\mathcal{M}$ должно быть квазиподобно оператору $U(\tau)|_{q_X(\mathcal{M})}$ для любого $\mathcal{M} \in \operatorname{Lat} R$. Пусть $\mathcal{M}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для R, тогда $R|_\mathcal{M}$ – C_{10}-сжатие. Но $U(\tau)$ – редуктивный унитарный оператор, поэтому $U(\tau)|_{q_X(\mathcal{M})}$ – унитарный оператор и, значит, сжатие $R|_\mathcal{M}$ должно принадлежать классу C_{11} – противоречие.

Далее, если сжатие T в пространстве $\mathcal{H}$ квазиподобно унитарному оператору (который унитарно эквивалентен оператору $T_+^{(a)}$), то отображение

$$\begin{aligned} &q_{X_+} : \operatorname{Hyplat}_1 T \to \operatorname{Hyplat} T_+^{(a)}, \\ &q_{X_+}(\mathcal{M}) = \operatorname{clos} X_+\mathcal{M}, \quad \mathcal{M} \in \operatorname{Hyplat}_1 T, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $X_+ : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_+^{(a)}$ – естественное вложение, является изоморфизмом решеток [15, 18]. Пусть опять R и τ – сжатие и множество из теоремы 3.5. Так как $U(\tau)$ – циклический редуктивный унитарный оператор, то $\operatorname{Hyplat} U(\tau) = \operatorname{Lat} U(\tau)$ и q_{X_+} является изоморфизмом решеток $\operatorname{Hyplat}_1 R$ и $\operatorname{Lat} U(\tau)$. По теореме A у сжатия R есть много полных аналитических инвариантных подпространств, и они не принадлежат решетке $\operatorname{Hyplat}_1 R$, то есть у R "больше" инвариантных подпространств, чем у $U(\tau)$.

Лемма 3.8. *Пусть R и τ – сжатие и множество из теоремы 3.5, пусть $\mathcal{M}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство для R, и пусть $T = R|_{\mathcal{M}}$. Тогда $\sigma(T_+^{(a)}) = \mathbb{T}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{H}$ пространство, в котором действует R, а символом $\cong$ – унитарную эквивалентность операторов. Так как R – C_{11}-сжатие, то $P_{\mathcal{M}^\perp} R|_{\mathcal{M}^\perp}$ – $C_{\cdot 1}$-сжатие, поэтому $P_{\mathcal{M}^\perp} R|_{\mathcal{M}^\perp}$ имеет триангуляцию вида $\begin{pmatrix} C_{0\cdot} & * \\ 0 & C_{11} \end{pmatrix}$ (см. [26, гл. II, §4]), то есть существует подпространство $\mathcal{N}$, инвариантное для $R^*|_{\mathcal{M}^\perp}$ и такое, что $R^*|_{\mathcal{N}}$ – C_{11}-сжатие, а $P_{\mathcal{M}^\perp} R|_{\mathcal{M}^\perp \ominus \mathcal{N}}$ – $C_{0\cdot}$-сжатие. Положим $T_1 = R|_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{N}}$ и $T_2 = P_{\mathcal{N}} R|_{\mathcal{N}}$. Имеем $T_+^{(a)} \cong (T_1)_+^{(a)}$ и $U(\tau) \cong (T_1)_+^{(a)} \oplus (T_2)_+^{(a)}$ [18]. Поэтому существуют два борелевских множества η_1, η_2, такие, что $m(\eta_1 \cap \eta_2) = 0$ и $\tau = \eta_1 \cup \eta_2$ (по модулю множества нулевой меры m) и $(T_j)_+^{(a)} \cong U(\eta_j)$, $j = 1, 2$.

Далее, R^* – это циклическое C_{11}-сжатие, а $\mathcal{N}$ – его инвариантное подпространство, такое что $R^*|_{\mathcal{N}}$ – C_{11}-сжатие, поэтому $\mathcal{N} \in \operatorname{Hyplat}_1 R^*$ (см. [16, теорема 15]). Обозначим через q изоморфизм решеток из определения (3.9), примененного к R^* и $U(\tau)^*$. Так как $R^*|_{\mathcal{N}}$ является квазиаффинным преобразованием оператора $U(\tau)^*|_{q(\mathcal{N})}$ и сжатие $R^*|_{\mathcal{N}}$ квазиподобно оператору $U(\eta_2)^*$, то $U(\tau)^*|_{q(\mathcal{N})} \cong U(\eta_2)^*$, поэтому $q(\mathcal{N}) = L^2(\eta_2, m)$.

Теперь предположим, что $\sigma((T_1)_+^{(a)})(= \operatorname{clos}\eta_1) \neq \mathbb{T}$. Тогда существуют индексы n, k, такие, что $\tau_{nk} \subset \mathbb{T} \setminus \operatorname{clos}\eta_1$, где множества τ_{nk} определены в (3.2). Очевидно, $\tau_{nk} \subset \eta_2$, и из построения сжатия R легко видеть, что $q(\mathcal{K}_{\theta_{nk}}) = L^2(\tau_{nk}, m)$. Так как q – изоморфизм решеток, заключаем, что $\mathcal{K}_{\theta_{nk}} \subset \mathcal{N}$. Таким образом, $\mathcal{H}\ominus\mathcal{K}_{\theta_{nk}} \supset \mathcal{N}^\perp \supset \mathcal{M}$. Так как $\mathcal{M}$ – полное аналитическое инвариантное подпространство, то оператор $R|_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{K}_{\theta_{nk}}}$ должен принадлежать классу $\mathbb{A}$. Но $\sigma(R|_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{K}_{\theta_{nk}}}) = \mathbb{T} \setminus \tau_{nk}$ – противоречие. $\square$

Замечание 3.9. Известно ([6, 24]), что если R – такой оператор, что $I - R^*R \in \mathfrak{S}_\omega$, где $\mathfrak{S}_\omega$ – класс Мацаева компактных операторов (напомним, что $\mathfrak{S}_p \subset \mathfrak{S}_\omega$ для $1 \le p < \infty$), и оператор R квазиподобен унитарному оператору U, то $\sigma(R) = \sigma(U)$. Если, кроме того, R – сжатие класса $\mathbb{A}$, то $\sigma(R) = \mathbb{T}$, поэтому $\sigma(U) = \mathbb{T}$. Значит, если R и τ удовлетворяют заключению теоремы 3.5, то $\sigma(U(\tau)) = \operatorname{clos}\tau = \mathbb{T}$. Автор не знает, существуют ли сжатия T, удовлетворяющие условиям (i)–(v), такие что $I - T^*T \in \mathfrak{S}_\omega$ и $\sigma(T_+^{(a)}) \ne \mathbb{T}$.

4. О спектрах C_{11}-сжатий с компактными дефектами

Пусть T – C_{11}-сжатие с компактным дефектом, то есть оператор $I - T^*T$ – компактный. Тогда $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$, см., например, [8, предложение 7]. В статье [2] дана полная характеризация множеств, являющихся спектрами C_{11}-сжатий. В этом параграфе мы показываем, что если подмножество окружности $\mathbb{T}$ является спектром сжатия, квазиподобного данному абсолютно непрерывному унитарному оператору, то это сжатие T может быть выбрано так, чтобы оператор $I - T^*T$ был компактен. Кроме того, если это подмножество – вся окружность $\mathbb{T}$, сжатие T может быть выбрано из класса $\mathbb{A}$.

Приведенное здесь доказательство – это очень небольшая модификация доказательства из [2].

Следующая лемма содержится в [26, гл. VIII, §1]. Для удобства наметим ее доказательство.

Лемма 4.1 [26]. *Пусть T – C_{11}-сжатие. Тогда оператор $I - TT^*$ компактен, если и только если оператор $I - T^*T$ компактен.*

Доказательство. Очевидно, мы можем ограничиться доказательством достаточности. Так как T – сжатие, то $I - T^*T$ – неотрицательный оператор, и, так как он компактен, то существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_n$ пространства $\mathcal{H}$, в котором действует T, такой, что $I - T^*T = \sum_n \lambda_n(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$, где $0 \le \lambda_n < 1$ – собственные числа оператора $I - T^*T$. Положим $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_n}} T\varphi_n$, тогда $\{\psi_n\}_n$ – ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$ и $I - TT^* = \sum_n \lambda_n(\cdot, \psi_n)\psi_n$. Так как $\lambda_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, мы заключаем, что оператор $I - TT^*$ компактен. $\square$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть u, $\theta \in H^\infty$, $\|u\|_\infty \le 1$, $\|\theta\|_\infty \le 1$, $1/u \in H^\infty$, функция θ – внешняя и $|u| = 1$ п.в. на $\tau_\theta = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\theta(\zeta)| \ne 1\}$. Положим $T = u(S(\theta))$. Тогда $\|I - TT^*\| \le \|1/u\|_\infty^2 - 1$.*

Доказательство. Обозначим через P_+ ортогональный проектор из $L^2(\mathbb{T}, m)$ на H^2. Имеем

$$T\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = P_\theta \begin{pmatrix} uh \\ ug \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T^*\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+\overline{u}h \\ \overline{u}g \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_\theta \subset \begin{pmatrix} H^2 \\ L^2(\tau_\theta, m) \end{pmatrix}$$

(см. определение в начале §3). Имеем

$$\begin{aligned}(I - TT^*)\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} &= P_\theta\Big(\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} uP_+\overline{u}h \\ |u|^2 g \end{pmatrix}\Big) \\ &= P_\theta\begin{pmatrix} h - uP_+\overline{u}h \\ (1-|u|^2)g \end{pmatrix} = P_\theta\begin{pmatrix} h - uP_+\overline{u}h \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Big\|(I - TT^*)\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}\Big\| &\le \Big\|\begin{pmatrix} h - uP_+\overline{u}h \\ 0 \end{pmatrix}\Big\| \le \|I - uP_+\overline{u}\|_{H^2\to H^2}\|h\|_{H^2} \\ &\le \|I - uP_+\overline{u}\|_{H^2\to H^2}\Big\|\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}\Big\|_{\mathcal{K}_\theta},\end{aligned}$$

то есть $\|I - TT^*\| \le \|I - uP_+\overline{u}\|_{H^2\to H^2}$.

Так как $\|u\|_\infty \le 1$, то $I - uP_+\overline{u}$ – неотрицательный оператор в H^2, поэтому

$$\|I - uP_+\overline{u}\| = \|(I - uP_+\overline{u})^{1/2}\|^2 = \sup_{\|h\|\le 1,\ h\in H^2}((I - uP_+\overline{u})h, h)$$

и $((I - uP_+\overline{u})h, h) = \|h\|^2 - \|P_+\overline{u}h\|^2$. Так как $1/u \in H^\infty$, то оператор $f \mapsto P_+(1/\overline{u})f$, $f \in H^2$, – обратимый оператор в H^2. Положим $h = P_+(1/\overline{u})f$, тогда

$$\begin{aligned}\|h\|^2 - \|P_+\overline{u}h\|^2 &= \|P_+(1/\overline{u})f\|^2 - \|f\|^2 \le (\|1/\overline{u}\|_\infty^2 - 1)\|f\|^2 \\ &= (\|1/u\|_\infty^2 - 1)\|P_+\overline{u}h\|^2 \le (\|1/u\|_\infty^2 - 1)\|h\|^2.\end{aligned}$$

Таким образом, $\|I - uP_+\overline{u}\| \le \|1/u\|_\infty^2 - 1$. □

Следующая лемма – это более полная версия леммы 4 из [2].

Лемма 4.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{D}$ – односвязная область, ее граница $\partial\Omega$ – спрямляемая жорданова кривая, J – дуга, $J \subset \partial\Omega \cap \mathbb{T}$, α – борелевское множество, такое что $m(\alpha) > 0$ и $\alpha \subset J$, $0 \notin \operatorname{clos}\Omega$, $\mu \in \Omega$, $K > 0$. Тогда существует вполне неунитарное сжатие T, такое что*

(a) *сжатие T подобно оператору $U(\alpha)$;*

(b) $\|(\mu I - T)^{-1}\| \geq K$;

(c) $\|(zI - T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\operatorname{dist}(z, \Omega)}$ *для* $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{clos}\Omega$;

(d) $\|I - TT^*\| \leq \dfrac{1}{(\operatorname{dist}(0, \Omega))^2} - 1$.

Доказательство. Пусть $u : \mathbb{D} \to \Omega$ – конформное отображение, такое что $u(0) = \mu$. Из условий на область Ω следует, что u может быть продолжено до гомеоморфизма $u : \overline{\mathbb{D}} \to \operatorname{clos}\Omega$. Положим $\beta = u^{-1}(\alpha)$ и обозначим через θ внешнюю функцию, такую что

$$|\theta| = \begin{cases} a & \text{п.в. на } \beta, \\ 1 & \text{п.в. на } \mathbb{T} \setminus \beta, \end{cases}$$

где a, $0 < a < 1$, определено в доказательстве леммы 4 из [2]. Положим $T = u(S(\theta))$. То, что T удовлетворяет заключениям (a)–(c) леммы, доказано в [2]. Чтобы доказать, что T удовлетворяет заключению (d), применим лемму 4.2. Имеем $\tau_\theta = \beta$, и $|u(\zeta)| = 1$ для любой точки $\zeta \in \beta$. Так как $0 \notin \operatorname{clos}\Omega$, то $1/u \in H^\infty$ и $\|1/u\|_\infty = 1/\operatorname{dist}(0, \Omega)$. □

Приведем определение из [2].

Определение. *Пусть $E \subset \mathbb{T}$ – замкнутое множество. Говорят, что E регулярно, если $\sigma(U(E)) = E$.*

Теорема 4.4. *Пусть $\sigma \subset \mathbb{T}$ – замкнутое множество, $E \subset \sigma$ – регулярное замкнутое множество, $\tau \subset E$ – борелевское множество, такое что $\sigma(U(\tau)) = E$, и $m(\sigma' \cap E) > 0$ для любого (непустого) замкнутого подмножества $\sigma' \subset \sigma$, такого что σ' открыто как подмножество множества σ. Тогда существует вполне неунитарное сжатие T, такое что T квазиподобно оператору $U(\tau)$, оператор $I - T^*T$ компактен, и $\sigma(T) = \sigma$. Кроме того, если $\sigma = \mathbb{T}$, то существут сжатие T класса $\mathbb{A}$ с указанными выше свойствами.*

Доказательство. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность точек из $\mathbb{D}$, такая что $\mu_n/|\mu_n| \in \sigma$, $\{\mu_n\}_n$ не имеет предельных точек в $\mathbb{D}$, и для каждой точки $\lambda \in \sigma$ существует подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}_k$ последовательности $\{\mu_n\}_n$, такая что $\mu_{n_k} \underset{k}{\longrightarrow} \lambda$. Очевидно, $|\mu_n| \underset{n}{\longrightarrow} 1$. Далее, пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательности положительных чисел, такие что $\varepsilon_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$ и $K_n \underset{n}{\longrightarrow} \infty$.

Обозначим через J_n связную компоненту множества $\{\zeta \in \mathbb{T} : \operatorname{dist}(\zeta, \sigma) < \varepsilon_n\}$, содержащую точку $\mu_n/|\mu_n|$. Очевидно, J_n – дуга. Далее, множество $J_n \cap \sigma$ открыто и замкнуто в σ, и значит, по предположению теоремы, $m(J_n \cap E) > 0$. Так как $\sigma(U(\tau)) = E$, мы заключаем, что $m(J_n \cap \tau) > 0$. Найдем по индукции борелевские множества $\beta_n \subset J_n \cap \tau$, такие что

$$0 < m(\beta_n) < m(\beta_{n-1})/3, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

и положим $\alpha_n = \beta_n \setminus \cup_{k=n+1}^{\infty} \beta_k$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\alpha_0 = \tau \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Заметим, что множества $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ попарно не пересекаются и $m(\alpha_n) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. подробное доказательство в [2]).

Положим $\Omega_n = \{z \in \mathbb{D} : \ |\mu_n| - \varepsilon_n < |z| < 1, \ z/|z| \in J_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\mu_n \in \Omega_n$ и $\partial\Omega_n \cap \mathbb{T} \supset J_n$. Применим лемму 4.3 к Ω_n, J_n, α_n, μ_n, и K_n, обозначим через T_n сжатие, удовлетворяющее заключению леммы 4.3. Если $m(\alpha_0) > 0$, положим $T_0 = S(\theta)$, где θ – внешняя функция, такая что

$$|\theta| = \begin{cases} a & \text{п.в. на } \alpha_0, \\ 1 & \text{п.в. на } \mathbb{T} \setminus \alpha_0 \end{cases}$$

для некоторого a, $0 < a < 1$ (T_0 действует на нулевом пространстве, если $m(\alpha_0) = 0$). Наконец, положим

$$T = \oplus_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Покажем, что T удовлетворяет заключению теоремы.

Сжатия T_n подобны операторам $U(\alpha_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Следовательно, сжатие T квазиподобно оператору $U(\cup_{n=0}^{\infty} \alpha_n) = U(\tau)$, и операторы $I - T_n T_n^*$ – ядерные (см. [25] или [11]). По лемме 4.3 (d),

$$\|I - T_n T_n^*\| \leq \frac{1}{(|\mu_n| - \varepsilon_n)^2} - 1.$$

Так как $|\mu_n| - \varepsilon_n \underset{n}{\longrightarrow} 1$, то $\|I - T_n T_n^*\| \underset{n}{\longrightarrow} 0$, поэтому оператор $I - TT^*$ является пределом в операторной норме последовательности ядерных операторов. Таким образом, оператор $I - TT^*$ компактен; по лемме 4.1, оператор $I - T^*T$ тоже компактен. Также мы получили, что $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ (см. начало параграфа).

Покажем, что $\sigma(T) = \sigma$. Пусть $\lambda \in \sigma$, тогда, по построению, существует подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}_k$ последовательности $\{\mu_n\}_n$, такая что $\mu_{n_k} \underset{k}{\longrightarrow} \lambda$. По лемме 4.3 (b), $\|(\mu_{n_k} I - T_{n_k})^{-1}\| \geq K_{n_k}$, поэтому $\|(\mu_{n_k} I - T)^{-1}\| \geq K_{n_k}$, и мы заключаем, что $\lambda \in \sigma(T)$. Пусть теперь $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \sigma$, положим $\delta = \operatorname{dist}(\zeta, \sigma)$. Так как $\varepsilon_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, то существует номер N, такой что $\varepsilon_n < \delta$ для $n > N$. Легко видеть, что $\sigma(\oplus_{n=0}^{N} T_n) \subset E$ и $\zeta \notin \operatorname{clos} \Omega_n$ для $n > N$. По лемме 4.3 (c) справедливо неравенство $\|(\zeta I - T_n)^{-1}\| \leq 1/(\delta - \varepsilon_n)$, и мы заключаем, что $\zeta \notin \sigma(\oplus_{n=N+1}^{\infty} T_n)$.

Пусть теперь $\sigma = \mathbb{T}$. Чтобы построить сжатие T, удовлетворяющее заключению теоремы и принадлежащее классу $\mathbb{A}$, нужно более аккуратно строить последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$. Фиксируем число γ, $0 < \gamma < \pi/2$. Для каждого r, $0 < r < 1$, существует натуральное число $N(r)$, такое что для каждой точки $\zeta \in \mathbb{T}$ существует число k, $k = 0, 1, \dots, N(r) - 1$, такое что $re^{2\pi i k/N(r)} \in \mathcal{S}(\zeta, \gamma)$, где $\mathcal{S}(\zeta, \gamma)$ – угол Штольца с вершиной в ζ раствора γ. Возьмем последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$, такую что $r_j \to_j 1$, и положим

$$\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ r_j e^{2\pi i k/N(r_j)}, \quad k = 0, 1, \dots, N(r_j) - 1, \quad j = 0, 1, \dots \right\}.$$

Фиксируем число $c > 1$ и положим $K_n = c/(1 - |\mu_n|)$. Как доказано выше, $\|(\mu_n I - T)^{-1}\| \geq K_n$, и, применяя лемму 3.2, получаем, что T принадлежит классу $\mathbb{A}$. $\square$

Замечание 4.5. Известно (см. [6, 24]), что если оператор T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таков, что $I - T^*T \in \mathfrak{S}_\omega$, где $\mathfrak{S}_\omega$ – класс Мацаева компактных операторов, и $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$, то оператор T *разложим*. В частности, если $\sigma(T) \subset G_1 \cup G_2$, где G_1, G_2 – открытые множества, то существуют $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \operatorname{Hyplat} T$, такие что $\mathcal{H} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ и $\sigma(T|_{\mathcal{M}_k}) \subset G_k$, $k = 1, 2$. Это утверждение является точным, именно, построены примеры операторов T, таких, что оператор $I - T^*T$ компактен и

$$\sigma(T|_{\mathcal{M}}) = \mathbb{T} \quad \text{для любого} \quad \mathcal{M} \in \operatorname{Hyplat} T, \quad \mathcal{M} \neq \{0\}, \tag{4.1}$$

см. [3, 13]. Эти примеры являются операторами весового сдвига. Известно, что спектральная кратность обратимого весового сдвига равна 1 или 2 [14, предложение 2]. Теорема 4.4 позволяет построить циклическое сжатие T, квазиподобное унитарному оператору U, такое что $\sigma(T) \neq \sigma(U)$. В этом случае $I - T^*T \notin \mathfrak{S}_\omega$ (см. [6, 24], и замечание 3.9). Легко видеть, что сжатие T, построенное в теореме 4.4, не удовлетворяет условию (4.1). Более того, любое C_{11}-сжатие T с конечной спектральной кратностью (даже если оператор $I - T^*T$ не компактен) имеет много подпространств $\mathcal{M} \in \operatorname{Hyplat} T$, таких что множество $\sigma(T|_{\mathcal{M}})$ является собственным подмножеством окружности $\mathbb{T}$ [16].

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Васюнину, И. В. Виденскому и Н. А. Широкову за полезные обсуждения.

Литература

1. B. Beauzamy, *Introduction to operator theory and invariant subspaces.* North Holland, Amsterdam, 1988.
2. H. Bercovici, L. Kérchy, *On the spectra of C_{11}-contractions.* — Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 412–418.
3. L. de Branges, *Some Hilbert spaces of analitic functions.* II, III. — J. Math. Anal. Appl. **11** (1965), 44–72, **12** (1965), 149–186.
4. B. Chevreau, *Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique.* II. — J. Operator Theory **20** (1988), 269–293.
5. B. Chevreau, G. Exner, C. Pearcy, *On the structure of contraction operators.* III. — Michigan Math. J. **36** (1989), 29–62.
6. I. Colojoara, C. Foiaş, *Theory of generalized spectral operators.* Gordon and Breach, Science Publishers, 1968.
7. J. B. Conway, *The theory of subnormal operators.* — Math. Surveys and Monographs, v. 36, Amer. Math. Soc., 1991.
8. B. P. Duggal, S. V. Djordjević, C. S. Kubrusly, *Hereditarily normaloid contractions.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), 337–352.
9. J. Esterle, *Singular inner functions and biinvariant subspaces for dissymetric weighted shifts.* — J. Funct. Anal. **144** (1997), 64–104.
10. М. Ф. Гамаль, *$C_{\cdot 0}$-сжатия: жорданова модель и решетки инвариантных подпространств.* — Алгебра и анализ **15** (2003), no. 5, 198–227.
11. M. F. Gamal', *On contractions that are quasiaffine transforms of unilateral shifts.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **74** (2008), 755–765.
12. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М., 1984.
13. D. A. Herrero, *Indecomposable compact perturbations of the bilateral shift.* — Proc. Amer. Math. Soc. **62** (1977), 254–258.
14. D. A. Herrero, *On multicyclic operators.* — Integral Equations and Operator Theory **1** (1978), 57–102.
15. L. Kérchy, *A description of invariant subspaces of C_{11}-contractions.* — J. Operator Theory **15** (1986), 327–344
16. L. Kérchy, *Contraction being weakly similar to unitaries.* — Oper. Theory Adv. Appl. **17** (1986), 187–200.

17. L. Kérchy, *On the spectra of contractions belonging to special classes.* — J. Funct. Anal. **67** (1986), 153–166.
18. L. Kérchy, *Isometric asymptotes of power bounded operators.* — Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 173–188.
19. L. Kérchy, *On the hyperinvariant subspace problem for asymptotically nonvanishing contractions.* — Oper. Theory Adv. Appl. **127** (2001), 399–422.
20. L. Kérchy, *Shift-type invariant subspaces of contractions.* — J. Funct. Anal. **246** (2007), 281–301.
21. С. В. Хрущев, *Проблема одновременной аппроксимации и стирание особенностей интегралов типа Коши.* — Труды МИАН **130** (1978), 124–195.
22. T. L. Kriete, D. Trutt, *The Cesàro operator in l^2 is subnormal.* — Amer. J. Math. **93** (1971), 215–225.
23. T. L. Kriete, D. Trutt, *On the Cesàro operator.* — Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 197–214.
24. M. Radjabalipour, H. Radjavi, *On invariant subspaces of compact perturbations of operators.* — Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **21** (1976), 1247–1260.
25. Л. А. Сахнович, *Операторы, подобные унитарным, с абсолютно непрерывным спектром.* — Функц. анализ и его приложения **2** (1968), вып. 1, 51–63.
26. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* Мир, М., 1970.
27. K. Takahashi, *$C_{1\cdot}$-contractions with Hilbert–Schmidt defect operators.* — J. Operator Theory **12** (1984), 331–347.
28. M. Uchiyama, *Contractions and unilateral shifts.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **46** (1983), 345–356.
29. M. Uchiyama, *Contractions with (σ, c) defect operators.* — J. Operator Theory **12** (1984), 221–233.

Gamal' M. F. On contractions with compact defects.

In [8], the following question was posed: suppose that T is a contraction of class C_{10} such that $I-T^*T$ is compact and the spectrum of T is the unit disk. Can the isometric asymptote of T be a reductive unitary operator? In this paper, we give a positive answer to this question. We construct two kinds of examples. One of them is the operators of multiplication by the independent variable in the closure of analytic polynomials in $L^2(\nu)$, where ν is an appropiate positive finite Borel measure on the closed unit disk. The second kind of examples is based on Theorem 6.2 in [5]. We obtain a contraction T satisfying all required conditions and such that $I-T^*T$ belongs to Schatten–von Neumann classes $\mathfrak{S}_p$ for all $p>1$. Also we give an example of a contraction T such that $I-T^*T$ belongs to $\mathfrak{S}_p$ for all $p>1$, T is quasisimilar to a unitary operator and has "more" invariant subspaces than this unitary operator. Also, following [2], we show that if a subset of the unit circle is the spectrum of a contraction quasisimilar

to an absolutely continuous unitary operator, then this contraction T can be chosen such that $I - T^*T$ is compact.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия

E-mail: gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 20 апреля 2009 г.