Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

Е. В. Ференс-Сороцкий

О ПОСТРОЕНИИ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП С ЗАДАННЫМ ВЫДЕЛЕННЫМ ГОМОМОРФИЗМОМ

1. Введение

Наиболее хорошо изученный вид формальных групп – формальные группы Любина–Тэйта, введенные Дж. Любином и Дж. Тэйтом в статье [1] (см. также определение в [2, I.8]). Они тесно связаны с локальной теорией полей классов, символом Гильберта (символом норменного вычета) и законом взаимности. В настоящее время актуальным является обобщение классических результатов Любина и Тэйта на более широкие классы формальных групп – в том числе, в связи с возможностью определить на этих группах символ Гильберта и установить закон взаимности.

Один из этих классических результатов, доказанных в [1], формулируется следующим образом (см. [3]):

Теорема A. *Для любого степенного ряда $f(x)$ с целыми коэффициентами, такого, что $f \equiv \pi x \bmod \deg 2$ и $f \equiv x^q \bmod \pi$, существует единственная формальная группа Любина–Тейта F такая, что $f(x) = f_F$ – выделенная изогения F.*

Аналогичный результат был доказан Э. де Шали в статье [4] для относительных формальных групп Любина–Тэйта (см. также [3]).

Теорема B. *Для любого степенного ряда $f(x)$ с целыми коэффициентами, такого, что $f \equiv \pi' x \bmod \deg 2$ и $f \equiv x^q \bmod \pi'$, существует единственная относительная формальная группа Любина–Тейта F такая, что $f(x) = f_F$ – выделенный гомоморфизм из F в F^Δ.*

В своей статье [3] (точнее [3, теорема 2]) О. В. Демченко доказал аналогичный результат для формальных групп Хонды.

Теорема C. *Для любого "канонического" типа $u = \pi - a_1\blacktriangle - \cdots - a_h\blacktriangle^h$ и любого степенного ряда $f(x)$ с целыми коэффициентами та-*

Работа поддержана грантом РФФИ No. 08-01-00777-а.

кого, что $f \equiv \pi/a_h x \bmod \deg 2$ *и* $f \equiv x^{q^h} \bmod \pi$, *существует единственная формальная группа Хонды* F *этого типа такая, что* $f(x) = f_F$ – *выделенный гомоморфизм из* F *в* $\mathcal{A}F$.

(Определения и обозначения см. в [3]. Определение формальных групп Хонды – см. [2, I.7].)

В данной работе рассматриваются формальные группы (в первую очередь, p-типические) в случае малого ветвления. Они не являются ни формальными группами Любина–Тэйта, ни формальными группами Хонды. Для них доказано утверждение, аналогичное теоремам A, B и C.

Теорема 1. *Пусть дан канонический тип*

$$u(\Delta) = p - a_h\Delta^h - a_{h+1}\Delta^{h+1} - \cdots$$

и допустимый p*-типический остов* $\{f_{p^k} \mid k \geq 0\}$. *Тогда существуют и единственны допустимый ряд* $f(x)$ *с таким остовом и две* p*-типические формальные группы* F *и* F_1 *такие, что* F *имеет тип* $u(\Delta)$ *и* $f(x)$ *является выделенным гомоморфизмом из* F *в* F_1.

В отношении символа Гильберта и закона взаимности наибольший интерес представляет случай, когда $f(x)$ – многочлен степени p^h (h – высота формальной группы). Здесь доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в теореме 1* p*-типический остов является остовом многочлена степени* p^h, *то есть* $f_{p^k} = 0$ *при* $k > h$, *а также* $h > 1$. *Тогда ни при каком типе* $u(\Delta)$ *высоты* h *степенной ряд* $f(x)$ *не является многочленом.*

Основные определения и обозначения даны в следующем параграфе.

2. Определения и обозначения

K – локальное поле, конечное расширение $\mathbb{Q}_p$ (p простое, $p \neq 2$).

Свойства таких полей и связанных с ними понятий (в том числе, используемых ниже) подробно описаны в первых главах монографии [5].

$\nu(\cdot)$ – дискретное нормирование на K.

$\nu_p(\cdot)$ – p-адическое нормирование, продолженное с $\mathbb{Q}$ на K.

$\mathfrak{o}_K$ или просто $\mathfrak{o}$ – кольцо целых элементов поля K.

Слово “целый” обычно означает “лежащий в $\mathfrak{o}$”.

π – фиксированный простой элемент $\mathfrak{o}$, то есть $\nu(\pi) = 1$.

e – индекс ветвления расширения $K/\mathbb{Q}_p$, то есть $\nu(p) = e$, $\nu(\cdot) = e\nu_p(\cdot)$.

Имеет место случай *малого ветвления*: $e < p$. В этом случае для формальных групп дана удобная классификация в статье М. В. Бондарко и С. В. Востокова [6, теорема 6.3.1].

T – подполе инерции расширения $K/\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{o}_T$ – кольцо целых поля T.

σ – *автоморфизм Фробениуса* расширения $T/\mathbb{Q}_p$.

F и F_1 – формальные группы (т.е. формальные групповые законы) над $\mathfrak{o}$.

$h \in \mathbb{N}$ – заданное число, являющееся *высотой* формальной группы F (определение см. [2, I.3.2.11]);

a_h – заданный элемент из $\mathfrak{o}_T^*$.

Выражения

$$\lambda(x) = x + L_2x^2 + L_3x^3 + \cdots \in K[[X]], \tag{1}$$

$$\lambda_1(x) = x + L_2'x^2 + L_3'x^3 + \cdots \in K[[X]] \tag{2}$$

обозначают *логарифмы* (определение см. в [2, I.5.4]) формальных групп F и F_1 соответственно и их коэффициенты. Производная логарифма формальной группы над $\mathfrak{o}$ должна иметь коэффициенты в $\mathfrak{o}$ (подробнее см. [2]). Например, для $\lambda(x)$ это означает $nL_n \in \mathfrak{o}$ при всех n (аналогично $nL_n' \in \mathfrak{o}$ для $\lambda_1(x)$). Коэффициенты, удовлетворяющие этим условиям, мы будем называть *допустимыми*.

$f(x)$ – степенной ряд над $\mathfrak{o}$, такой, что $f(0) = 0$. Обозначим коэффициенты

$$f(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots, \tag{3}$$

$$f(x)^k = f_1^{(k)}x + f_2^{(k)}x^2 + f_3^{(k)}x^3 + \cdots. \tag{4}$$

Очевидно, что $f_n^{(1)} = f_n$, $f_n^{(n)} = f_1^n$ и $f_n^{(k)} = 0$ при $k > n$. В общем случае, $f_n^{(k)}$ выражается через $f_1, \ldots, f_{n-1}$.

Будем рассматривать только степенные ряды $f(x)$ со свойствами:

1) $f(x) \equiv (p/a_h)x \bmod \deg 2$, т.е. $f_1 = p/a_h$;

2) $f(x) \equiv x^{p^h} \bmod p$, т.е. $f_{p^h} \equiv 1 \bmod p$, а при $n \neq p^h$, $f_n \equiv 0 \bmod p$.

Такой степенной ряд, мы будем называть *допустимым рядом*.

Назовем *p-типическим остовом* или просто *остовом* ряда $f(x)$ набор коэффициентов f_1, f_p, f_{p^2} ... (в некой ситуации нам будет дан только остов, а остальное мы будем достраивать). Назовем остов *допустимым*, если он обладает свойствами:

1) $f_1 = p/a_h$;

2) $f_{p^h} \equiv 1 \bmod p$, а при $k \neq h$, $f_{p^k} \equiv 0 \bmod p$.

Очевидно, что остов допустимого ряда – допустимый остов.

Назовем *p-типическими частями* логарифмов $\lambda(x)$ и $\lambda_1(x)$ выражения

$$\lambda_p(x) = x + L_p x^p + L_{p^2} x^{p^2} + \cdots, \tag{5}$$

$$\lambda_{p,1}(x) = x + L'_p x^p + L'_{p^2} x^{p^2} + \cdots. \tag{6}$$

Согласно [2, Теорема 16.4.14], $\lambda_p(x)$ и $\lambda_{p,1}(x)$ являются логарифмами формальных групп F_p и $F_{p,1}$, строго изоморфных F и F_1 соответственно.

Через *оператор Фробениуса* Δ

$$\Delta\left(\sum c_i x^i\right) = \sum c_i^\sigma x^{pi}, \quad c_i \in T \tag{7}$$

запишем

$$\lambda_p(x) = (\Lambda(\Delta))(x) = (1 + L_p\Delta + L_{p^2}\Delta^2 + \cdots)(x). \tag{8}$$

Согласно классификационной теореме [6, Теорема 6.3.1], то, что ряд $\lambda_p(x)$ действительно является логарифмом формальной группы, равносильно наличию разложения

$$\Lambda(\Delta) = v(\Delta)u^{-1}(\Delta), \tag{9}$$

$$v(\Delta) = p + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + \cdots, \quad b_i \in \pi\mathfrak{o}, \tag{10}$$

$$u(\Delta) = p - a_h\Delta^h a_{h+1}\Delta^{h+1} - \cdots, \quad a_i \in \mathfrak{o}_T,\ a_h \in \mathfrak{o}_T^*. \tag{11}$$

Здесь h будет высотой формальных групп F_p и F, $u(\Delta)$ называется *типом* F_p и F, а умножение рядов от Δ – некоммутативное, по правилу

$$b\Delta^i * a\Delta^j = ba^{\sigma^i}\Delta^{i+j}, \quad b \in K, \quad a \in T. \tag{12}$$

Двусторонний обратный для $u(\Delta)$ относительно этого умножения существует, как и для любого ряда из $T[[\Delta]]$ с ненулевым свободным членом

$$R(\Delta) = r_0(1 + S(\Delta)\Delta) \in T[[\Delta]], \tag{13}$$

$$R^{-1}(\Delta)=(1-S(\Delta)\Delta+(S(\Delta)\Delta)^2-(S(\Delta)\Delta)^3+\cdots)r_0^{-1}. \tag{14}$$

Наконец, введем удобное обозначение

$$\begin{aligned} B(\Delta) &= 1+\frac{a_{h+1}}{a_h}\Delta+\frac{a_{h+2}}{a_h}\Delta^2+\cdots \\ &= 1+B_1\Delta+B_2\Delta^2+\cdots, \quad B_k\in\mathfrak{o}_T, \end{aligned} \tag{15}$$

которое позволяет записать $u(\Delta)=p-a_hB(\Delta)\Delta^h$. Задать тип формальной группы означает задать h, a_h и набор $\{B_k\}$.

Аналогично, для F_1 и $\lambda_{p,1}$ введем $\Lambda_1(\Delta)=v_1(\Delta)u_1^{-1}(\Delta)$. Назовем F и F_1 *выделенной парой*, если

$$v_1(\Delta)=a_h^{-1}v(\Delta)a_h, \tag{16}$$

$$u_1(\Delta)=u^{\sigma^h}(\Delta)B^{-1}(\Delta). \tag{17}$$

(Степень σ^h означает применение σ^h к коэффициентам $u(\Delta)$.)

Для $e=1$ и формальных групп Хонды эти соотношения перейдут в $\lambda_1(x)=B(\Delta)(\lambda^{\sigma^h}(x))$ из статьи [3], так что F и $\mathcal{A}F$ из теоремы C – выделенная пара.

Допустимый степенной ряд $f(x)$ называется *выделенным гомоморфизмом*, если есть такая выделенная пара формальных групп F и F_1, что $f(x)$ – гомоморфизм из F в F_1, т.е.

$$f(x)=\left[\frac{p}{a_h}\right]_{F,F_1}. \tag{18}$$

3. Основная формула и формула связи

Распишем формулу (18) подробнее (ср. с [2, I.1.4.1] и [2, I.5.4])

$$\lambda_1(f(x))=\frac{p}{a_h}\lambda(x), \quad \sum_{k\in\mathbb{N}}L'_kf(x)^k=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{p}{a_h}L_nx^n \ (L_1=L'_1=1) \tag{19}$$

и приравняем для всех n коэффициенты при x^n в левой и правой части

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}L'_kf_n^{(k)}=f_n+\sum_{1<k<n}L'_kf_n^{(k)}+L'_n\left(\frac{p}{a_h}\right)^n=\frac{p}{a_h}L_n. \tag{20}$$

Введем обозначение (отсюда и до конца статьи)

$$S_n = f_n + \sum_{1<k<n} L'_k f_n^{(k)}. \tag{21}$$

Используя это обозначение, преобразуем (20)

$$L_n = \frac{a_h}{p} S_n + \left(\frac{p}{a_h}\right)^{n-1} L'_n. \tag{22}$$

Формулу (22) будем называть *основной формулой.* Утверждение "допустимый ряд $f(x)$ является гомоморфизмом из F в F_1" означает в точности, что основная формула имеет место при всех $n \in \mathbb{N}$.

Теперь распишем соотношения, связанные с понятием выделенной пары.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$a_h B(\Delta)(u^{\sigma^h}(\Delta))^{-1} = u^{-1}(\Delta) a_h B(\Delta).$$

Доказательство. Заметим, что из правила умножения (12) следует $\Delta^h u(\Delta) = u^{\sigma^h}(\Delta)\Delta^h$. Пользуясь этим и определением $B(\Delta)$ (см. (15)), напишем

$$\begin{aligned}
&a_h B(\Delta)(u^{\sigma^h}(\Delta))^{-1}\Delta^h = a_h B(\Delta)(u^{\sigma^h}(\Delta))^{-1}\Delta^h u(\Delta) u^{-1}(\Delta)\\
&= a_h B(\Delta)(u^{\sigma^h}(\Delta))^{-1} u^{\sigma^h}(\Delta)\Delta^h u^{-1}(\Delta) = a_h B(\Delta)\Delta^h u^{-1}(\Delta)\\
&= (p - u(\Delta))u^{-1}(\Delta) = pu^{-1}(\Delta) - u(\Delta)u^{-1}(\Delta)\\
&= u^{-1}(\Delta)p - u^{-1}(\Delta)u(\Delta) = u^{-1}(\Delta)(p - u(\Delta))\\
&= u^{-1}(\Delta) a_h B(\Delta)\Delta^h.
\end{aligned} \tag{23}$$

Сократив в начале и в конце Δ^h, получим искомое равенство, ч.т.д. Используем определение выделенной пары (16), (17) и лемму 1:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(\Delta) &= v_1(\Delta) u_1^{-1}(\Delta) = a_h^{-1} v(\Delta) a_h (u^{\sigma^h}(\Delta) B^{-1}(\Delta))^{-1}\\
&= a_h^{-1} v(\Delta) a_h B(\Delta)(u^{\sigma^h}(\Delta))^{-1} = a_h^{-1} v(\Delta) u^{-1}(\Delta) a_h B(\Delta)\\
&= a_h^{-1}\Lambda(\Delta) a_h B(\Delta).
\end{aligned} \tag{24}$$

С другой стороны, аналогично (8), имеем

$$\Lambda_1(\Delta) = 1 + L'_p\Delta + L'_{p^2}\Delta^2 + \cdots . \tag{25}$$

Раскроем правую часть (24) в соответствии с (8) и (15) и приравняем в формулах (25) и (24) коэффициенты при Δ^k:

$$L'_{p^k} = a_h^{\sigma^k-1}L_{p^k} + a_h^{\sigma^{k-1}-1}L_{p^{k-1}}B_1^{\sigma^{k-1}} + \cdots + a_h^{\sigma-1}L_pB_{k-1}^{\sigma} + B_k. \tag{26}$$

Введем обозначение (опять же, отсюда и до конца статьи)

$$Z_k = a_h^{\sigma^{k-1}-1}L_{p^{k-1}}B_1^{\sigma^{k-1}} + \cdots + a_h^{\sigma-1}L_pB_{k-1}^{\sigma} + B_k. \tag{27}$$

Тогда (26) можно сокращенно записать таким образом

$$L'_{p^k} = a_h^{\sigma^k-1}L_{p^k} + Z_k. \tag{28}$$

Формулы (26) и (28) мы назовем *формулой p-типической связи* или просто *формулой связи*. Утверждение “формальные группы F и F_1 образуют выделенную пару” означает в точности, что формула связи имеет место при всех $k \in \mathbb{N}$ (при $k = 0$ она всегда верна).

4. Леммы о делимости

В этом параграфе будут доказаны некоторые технические леммы и выведены важные следствия из них. Предполагается, что $f(x)$ – допустимый ряд (см. §2), а также, что имеют место основная формула и формула связи.

Лемма 2. *Пусть $j_1, \ldots j_m \in \mathbb{N}$, $k = j_1 + \cdots + j_m$, d – это* НОД *$(j_1, \ldots j_m)$, $s = \nu_p(k)$, $t = \nu_p(d)$. Тогда мультиномиальный коэффициент*

$$C = C_k^{j_1,\ldots,j_m} = \frac{k!}{j_1!\ldots j_m!} \tag{29}$$

делится на p^{s-t} (возможно, и на большую степень p).

Доказательство. По известной формуле вхождения степени простого числа в факториал, получаем

$$\nu_p(C) = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{k}{p^r}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{j_1}{p^r}\right\rfloor - \cdots - \left\lfloor\frac{j_m}{p^r}\right\rfloor\right). \tag{30}$$

Замечание. Для любых натуральных чисел a, b и c

$$\left\lfloor \frac{a}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{c} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor. \tag{31}$$

Из замечания следует, что все слагаемые в (30) неотрицательны. Также слагаемые при $r = t+1, \dots, s$ строго положительны, поскольку

$$\left\lfloor \frac{k}{p^r} \right\rfloor = \frac{k}{p^r} = \frac{j_1 + \dots + j_m}{p^r} = \frac{j_1}{p^r} + \dots + \frac{j_m}{p^r} > \left\lfloor \frac{j_1}{p^r} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{j_m}{p^r} \right\rfloor. \tag{32}$$

Таким образом, $\nu_p(C) \ge s - t$, то есть $p^{s-t} \mid C$. Лемма доказана.

Обозначения из леммы 2 в этом параграфе используем без пояснений.

Лемма 3. *Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $n \ne p^h k$. Тогда $f_n^{(k)} \vdots p^{s+1}$.*

Доказательство. Легко видеть (см. (4)), что $f_n^{(k)}$ – сумма всевозможных слагаемых вида

$$C_k^{j_1,\dots,j_m} f_{i_1}^{j_1} \dots f_{i_m}^{j_m}, \tag{33}$$

где $j_1 + \dots + j_m = k$ и $i_1 j_1 + \dots + i_m j_m = n$ (число m не фиксировано!).

Пусть, например, $i_m \ne p^h$. Если нельзя так сделать, то $m = 1$ и $i_1 = p^h$, так что $k = j_1$ и $n = p^h k$ – противоречие.

Так как $f(x) \equiv x^{p^h} \bmod p$, то $p \mid f_{i_m}$ (т.е. $f_{i_m} \in p\mathfrak{o}$), и $p^{j_m} \mid f_{i_m}^{j_m}$. Также $d \mid j_m$ и $p^t \mid d$, откуда $p^t \mid j_m$ и $j_m \ge p^t \ge t+1$ – получаем $p^{t+1} \mid f_{i_m}^{j_m}$.

По лемме 2, $p^{s-t} \mid C_k^{j_1,\dots,j_m}$, так что слагаемое (33) делится на p^{s+1}. Сумма этих слагаемых, равная $f_n^{(k)}$, тогда тоже делится на p^{s+1}.

Лемма 3′. *Пусть $n = p^h k$. Тогда $f_n^{(k)} \equiv 1 \bmod p^{s+1}$.*

Доказательство. Отличие от леммы 3 – только в слагаемом $f_{p^h}^k$. Так как $f_{p^h} \equiv 1 \bmod p$, то существует $a \in \mathfrak{o}$ такое, что

$$f_{p^h}^k = (1 + pa)^k = 1 + \sum_{r=1}^{k} C_k^r p^r a^r. \tag{34}$$

Каждое слагаемое в последней сумме делится на p^{s+1}: пусть $q = \nu_p(r)$, тогда $p^{s-q} \mid C_k^r$ по лемме 2; также $r \ge p^q \ge q+1$, так что $p^{q+1} \mid p^r$. Тогда $f_{p^h}^k \equiv 1 \bmod p^{s+1}$, а следовательно, и $f_n^{(k)}$ сравнимо с 1 по модулю p^{s+1}.

Следствие 1. *Если $n \neq p^h k$, то $p \mid L'_k f_n^{(k)}$ при любом допустимом L'_k.*

Доказательство. Допустимость L'_k означает, что $kL'_k \in \mathfrak{o}$, т.е. $p^s L'_k \in \mathfrak{o}$ ($(k/p^s, p) = 1 \Rightarrow k/p^s \in \mathbb{Z}_p^* \subset \mathfrak{o}^*$). Лемма 3 означает, что $f_n^{(k)} \in p^{s+1}\mathfrak{o}$. Объединяя эти факты, получаем нужную делимость.

Следствие 2. *Если $p^h \nmid n$, то $p \mid S_n$ при любых допустимых $L'_1, \ldots L'_{n-1}$.*

Доказательство. Вспомним определение (21). Так как $p^h \nmid n$, то везде $n \neq p^h k$, и по следствию 1, $p \mid L'_k f_n^{(k)}$. Наконец, $p \mid f_n$, так как $n \neq p^h$. Из делимости слагаемых следует делимость суммы.

Замечание 1. Если $n = p^h m$, то в следующей формуле $p \mid S'_n$

$$\begin{aligned} S_n &= f_n + \sum_{1<k<n} L'_k f_n^{(k)} = f_n + \sum_{k \neq m} L'_k f_n^{(k)} + L'_m f_n^{(m)} \\ &= S'_n + L'_m f_n^{(m)}. \end{aligned} \tag{35}$$

Это замечание доказывается так же, как следствие 2.

Утверждение 1. *При любых допустимых $L'_1, \ldots L'_n$, если $p^h \nmid n$, то обязательно $L_n \in \mathfrak{o}$. Если же $\nu_p(n) = r \geq h$, то обязательно $p^{r-h+1} L_n \in \mathfrak{o}$.*

Доказательство. Положим $r = \nu_p(n)$. Тогда $n - 1 \geq p^r - 1 \geq r$ и $p^r \mid p^{n-1}$, а также $p^r \mid (p/a_h)^{n-1}$. Так как L'_n – допустимое, то $p^r L'_n \in \mathfrak{o}$ (см. следствие 1). Поэтому $(p/a_h)^{n-1} L'_n \in \mathfrak{o}$ – см. основную формулу (22).

Если $p^h \nmid n$, то $p \mid S_n$ по следствию 2 $\Rightarrow (a_h/p) S_n \in \mathfrak{o}$. Тогда $L_n \in \mathfrak{o}$ из (22).

Если же $r \geq h$, то $p \mid S'_n$, так что $(a_h/p) S'_n \in \mathfrak{o}$ (см. замечание 1). Остается $(a_h/p) L'_m f_n^{(m)}$, где $m = n/p^h$. Так как $\nu_p(m) = r - h$, а L'_m – допустимое, то $p^{r-h} L'_m \in \mathfrak{o}$. Тогда ясно, что $p^{r-h+1}(a_h/p) L'_m f_n^{(m)} \in \mathfrak{o}$. Применяя (22), получаем требуемое $p^{r-h+1} L_n \in \mathfrak{o}$.

Лемма 4. $p^{k-1} Z_k \in \mathfrak{o}$ ($k \in \mathbb{N}$) при любых допустимых L_p, L_{p^2}, $\ldots$ $L_{p^{k-1}}$.

Доказательство. Домножим формулу (27) на p^{k-1} и сгруппируем так

$$p^{k-1} Z_k = p^{k-1} B_k + \sum_{r=1}^{k-1} p^{k-1-r} a_h^{\sigma^r - 1} (p^r L_{p^r}) B_{k-r}^{\sigma^r}. \tag{36}$$

Так как все L_{p^r} допустимые, то $p^r L_{p^r} \in \mathfrak{o}$. Поэтому все слагаемые правой части целые (вспомним, что $B_1, \ldots, B_k$ все целые). А тогда и $p^{k-1} Z_k$ целое.

5. p-типические части

Теперь мы рассмотрим подробнее значения L_n и L'_n для n, являющегося степенью p (в этом параграфе обозначим $n = p^k$). Предполагается, что имеет место основная формула (22) и формула связи (28).

Сначала подставим формулу связи в основную формулу

$$\begin{aligned} L_{p^k} &= \frac{a_h}{p} S_{p^k} + \left(\frac{p}{a_h}\right)^{p^k-1} L'_{p^k} \\ &= \frac{a_h}{p} S_{p^k} + \left(\frac{p}{a_h}\right)^{p^k-1} (a_h^{\sigma^k-1} L_{p^k} + Z_k). \end{aligned} \tag{37}$$

Раскрывая, получим при L_{p^k} коэффициент $1 - p^{p^k-1} a_h^{\sigma^k - p^k}$. Очевидно, он лежит в $\mathfrak{o}^*$; обозначим обратный к нему символом e_k. Ясно, что $e_k \equiv 1 \bmod p^{p^k-1}$. Тогда можно записать

$$L_{p^k} = \frac{a_h e_k}{p} S_{p^k} + \left(\frac{p}{a_h}\right)^{p^k-1} e_k Z_k. \tag{38}$$

Теперь наоборот, подставим основную формулу в формулу связи

$$L'_{p^k} = a_h^{\sigma^k-1} L_{p^k} + Z_k = a_h^{\sigma^k-1} \left(\frac{a_h}{p} S_{p^k} + \left(\frac{p}{a_h}\right)^{p^k-1} L'_{p^k} \right) + Z_k. \tag{39}$$

Аналогично, приходим к формуле

$$L'_{p^k} = \frac{a_h^{\sigma^k} e_k}{p} S_{p^k} + e_k Z_k. \tag{40}$$

Рассматривая определения (21) и (27), легко видеть следующее: если известны $f_1, \ldots, f_{p^k}, B_1, \ldots, B_k$ и все L_m и L'_m для $m < p^k$, то L_{p^k} и L'_{p^k} однозначно определяются по формулам (38) и (40) соответственно.

Лемма 5. *Пусть все L_n и L'_n при $n < p^k$ – допустимые. Тогда L_{p^k} и L'_{p^k}, определенные по формулам* (38) *и* (40), *тоже допустимые.*

Доказательство. Заметим, что $p^{k-1}S_{p^k} \in \mathfrak{o}$. Если $k < h$, см. следствие 2. Иначе, $p^{k-1}S'_{p^k} \in \mathfrak{o}$ (и даже $\in p^k\mathfrak{o}$), см. замечание 1. Остается $p^{k-1}L'_m f_n^{(m)}$, где $m = p^{k-h}$ – и оно целое из допустимости L'_m (т.к. $k-1 \geq k-h$).

Также, по лемме 4, $p^{k-1}Z_k \in \mathfrak{o}$ и тем более $p^k Z_k \in \mathfrak{o}$.

Домножив (38) и (40) на p^k и используя вышесказанное, получаем, что $p^k L_{p^k} \in \mathfrak{o}$ и $p^k L'_{p^k} \in \mathfrak{o}$, ч.т.д.

Оценка из леммы 5 очень грубая. Сейчас мы докажем гораздо более сильную оценку (которую в дальнейшем будем использовать).

Утверждение 2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых допустимых L'_n при $n < p^k$, n – не степень p, имеем $p^q L_{p^k} \in \mathfrak{o}$, $p^q L'_{p^k} \in \mathfrak{o}$, где $q = \lfloor k/h \rfloor$. Также если $k = hq$, то $p^q L_{p^k}$, $p^q L'_{p^k} \in \mathfrak{o}^*$, то есть $\nu(L_{p^k}) = \nu(L'_{p^k}) = \nu(p^{-q}) = -qe$.*

Доказательство. Если $h = 1$, то $q = k$ и утверждение сводится к лемме 5. Далее считаем, что $h \geq 2$. Будем доказывать индукцией по k.

База индукции: $k = 1$. Тогда $k < h$, так что $q = 0$, а согласно следствия 2, $p \mid S_p = S_{p^k}$. Также, согласно (27), $Z_1 = B_1 \in \mathfrak{o}$. Рассматривая (38) и (40) при $k = 1$, легко видеть, что L_p и L'_p – целые.

Индукционный переход: Для всех $r < k$ имеем $\lfloor r/h \rfloor \leq q$, и по предположению индукции, $p^q L_{p^r} \in \mathfrak{o}$. По формуле (27) получаем, что $p^q Z_k$ – целое.

Если же $k = hq$, то $\lfloor r/h \rfloor \leq q-1$ при $r < k$, так что $p^{q-1}L_{p^r} \in \mathfrak{o}$, и $p^q Z_k$ не просто целое, а делится на p (лежит в $p\mathfrak{o}$).

Теперь докажем, что $p^{q-1}S_{p^k} \in \mathfrak{o}$. При $k < h$ это очевидно, так как $q = 0$, а $p \mid S_{p^k}$ согласно следствию 2. При $k \geq h$ обратимся к замечанию 1 и формуле (35): $S_{p^k} = S'_{p^k} + L'_m f_{p^k}^{(m)}$, где $m = p^{k-h}$. Поскольку $p \mid S'_{p^k}$, то $p^{q-1}S'_{p^k} \in p^q\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}$. Также $\lfloor (k-h)/h \rfloor = q-1$, и по предположению индукции, $p^{q-1}L'_m \in \mathfrak{o}$, так что и $p^{q-1}L'_m f_{p^k}^{(m)} \in \mathfrak{o}$. Складывая, получаем $p^{q-1}S_{p^k} \in \mathfrak{o}$.

Из $p^q Z_k \in \mathfrak{o}$, $p^{q-1}S_{p^k} \in \mathfrak{o}$, (38) и (40) следует, что $p^q L_{p^k} \in \mathfrak{o}$ и $p^q L'_{p^k} \in \mathfrak{o}$.

Рассмотрим случай $k = hq$, то есть $h \mid k$. Тогда (см. выше) $p^q Z_k \in p\mathfrak{o}$ и $p^{q-1} S'_{p^k} \in p^q \mathfrak{o}$. Поэтому $p^q L_{p^k}$, $p^q L'_{p^k} \in \mathfrak{o}^* \Leftrightarrow p^{q-1} L'_m f^{(m)}_{p^k} \in \mathfrak{o}^*$ (см. (35), (38) и (40)). По лемме 3′, $f^{(m)}_{p^k} \in \mathfrak{o}^*$, так что остается доказать $p^{q-1} L'_m \in \mathfrak{o}^*$. Но это верно по предположению индукции, а при $q = 1$ очевидно ($L'_1 = 1$).

Утверждение 2 полностью доказано.

6. Корректность рядов v и v_1

Утверждение 3. *При любых наборах допустимых L_n и L'_n, ряд $v(\Delta)$ (см. формулу (10)), имеет коэффициенты $b_k \in p\mathfrak{o}$ и, тем более, $b_k \in \pi\mathfrak{o}$.*

Доказательство. Используя формулы (9), (15) и (24), находим

$$\begin{aligned} v(\Delta) &= \Lambda(\Delta) u(\Delta) = \Lambda(\Delta)(p - a_h B(\Delta)\Delta^h) \\ &= p\Lambda(\Delta) - \Lambda(\Delta) a_h B(\Delta)\Delta^h = p\Lambda(\Delta) - a_h \Lambda_1(\Delta)\Delta^h; \end{aligned} \tag{41}$$

$$b_k = \begin{cases} pL_{p^k}, & \text{если } k < h, \\ pL_{p^k} - a_h L'_{p^{k-h}}, & \text{если } k \geq h. \end{cases} \tag{42}$$

Если $k < h$, то $L_{p^k} \in \mathfrak{o}$ (см. утверждение 1), так что $b_k = pL_{p^k} \in p\mathfrak{o}$.

Если же $k \geq h$, вспомним формулу (38), лемму 4, и замечание 1

$$\begin{aligned} pL_{p^k} &= a_h e_k S_{p^k} + \frac{p^{p^k}}{a_h^{p^k - 1}} e_k Z_k \equiv a_h e_k S_{p^k} \\ &\equiv a_h e_k L'_{p^{k-h}} f^{(p^{k-h})}_{p^k} \bmod p. \end{aligned} \tag{43}$$

По лемме 3′, $f^{(p^{k-h})}_{p^k} \equiv 1 \bmod p^{k-h+1}$. Кроме того, как мы заметили, $e_k \equiv 1 \bmod p^{p^k - 1}$ и тем более, по модулю p^{k-h+1}. Отсюда, из (42) и (43)

$$b_k \equiv a_h L'_{p^{k-h}} \left(e_k f^{(p^{k-h})}_{p^k} - 1 \right) \in a_h L'_{p^{k-h}} p^{k-h+1} \mathfrak{o} \subset p\mathfrak{o}. \tag{44}$$

Первое сравнение – по модулю p, последнее включение – так как $p^{k-h} L'_{p^{k-h}} \in \mathfrak{o}$ ($L'_{p^{k-h}}$ допустимое). Получаем, что и в этом случае $b_k \in p\mathfrak{o}$.

Замечание 2. Поскольку (см. (16)) $v_1 = a_h^{-1} v a_h$, то утверждение 3 влечет корректность не только ряда $v(\Delta)$, но и ряда $v_1(\Delta)$ (у него $b_{k,1} \in p\mathfrak{o}$).

7. Индукционный процесс построения решения

Пусть задан тип $u(\Delta)$ (т.е. h, a_h и набор $\{B_k\}$) и допустимый ряд $f(x)$. Рассмотрим построение формальных групп F типа u и F_1 таких, что $f(x)$ – выделенный гомоморфизм из F в F_1.

Начиная с $L_1 = L'_1 = 1$, будем последовательно вычислять L_n, L'_n и по индукции доказывать их допустимость (переход от всех $m < n$ к n).

Переход первого рода: n – не степень p, $\nu_p(n) = r$. По предположению индукции, $L'_1, \ldots L'_{n-1}$ допустимы. При каком угодно допустимом L'_n, согласно утверждению 1, $p^{r-h+1}L_n \in \mathfrak{o}$ или (при $r < h$) $L_n \in \mathfrak{o}$, а тем более $p^r L_n \in \mathfrak{o}$. Значит, $nL_n \in \mathfrak{o}$, т.е. L_n – допустимое.

Переход второго рода: $n = p^k$. По предположению индукции, все L_m и L'_m при $m < p^k$ – допустимые, а L_{p^k} и L'_{p^k} выражаются через них по формулам (38) и (40). Тогда L_{p^k} и L'_{p^k} допустимые, согласно лемме 5.

Корректны и получающиеся ряды $v(\Delta)$ и $v_1(\Delta)$ (см. утверждение 3 и замечание 2). Таким образом, при любых допустимых L'_n (n – не степень p), $\lambda_p(x)$ и $\lambda_{p,1}(x)$ – действительно логарифмы p-типических формальных групп. При этом $\lambda(x)$ и $\lambda_1(x)$ не обязательно являются логарифмами формальных групп. Возможно, это можно исправить, выбрав подходящие L'_n, но в данной работе мы ограничимся p-типическим случаем: $F = F_p$, $F_1 = F_{p,1}$.

8. Теорема для p-типического случая

В этом параграфе мы, наконец, докажем теорему 1, сформулированную во введении. То, что F и F_1 должны быть p-типическими, означает $F = F_p$, $F_1 = F_{p,1}$, $\lambda = \lambda_p$, $\lambda_1 = \lambda_{p,1}$, то есть $L_n = L'_n = 0$, если n – не степень p.

Согласно (21) и (22) для таких n будем иметь

$$\begin{gathered} f_n = -\sum_{1<k<n} L'_k f_n^{(k)} = -\sum_{k=1}^{k=l} L'_{p^k} f_n^{(p^k)}, \\ l = \lfloor \log_p n \rfloor, p^l < n < p^{l+1}. \end{gathered} \tag{45}$$

Таким образом, f_n однозначно выражается через f_m, $m < n$ и L_{p^k}, $p^k < n$. Поэтому $f(x)$ можно восстановить по p-типическому остову. Докажем допустимость этого $f(x)$, если его остов допустим.

Лемма 6. *Пусть n – не степень p, все f_m при $m < n$ делятся на p, кроме f_{p^h}, а все L'_{p^k} при $k \le l$ – допустимые. Тогда f_n, полученное по формуле* (45), *тоже делится на p.*

Доказательство. Так как $n \ne p^h \cdot p^k$, для всех $k \le l$ можно применить следствие 1; все $L'_{p^k} f_n^{(p^k)}$ делятся на p. Тогда из (45) следует, что $p \mid f_n$.

Доказательство теоремы 1. Начиная с $L_1 = L'_1 = 1$, $f_1 = p/a_h$, будем последовательно вычислять f_n, L_n и L'_n и по индукции доказывать их допустимость (переход от всех $m < n$ к n).

Переход первого рода: n – не степень p. Положим $L_n = L'_n = 0$ (очевидно, допустимые) и вычислим f_n с помощью (45). По лемме 6, тогда $p \mid f_n$.

Переход второго рода: $n = p^k$. Тогда f_n допустимое по условию. Найдем L_{p^k} и L'_{p^k} по формулам (38) и (40) – по лемме 5, они будут допустимыми.

Применимость лемм, на которые мы ссылаемся, следует из предположения индукции и из условия. Доказательство корректности $v(\Delta)$ и $v_1(\Delta)$ остается в силе. Как и в предыдущем параграфе, $\lambda_p(x)$ и $\lambda_{p,1}(x)$ – действительно логарифмы p-типических формальных групп F_p и $F_{p,1}$. Кроме того, $F = F_p$, $F_1 = F_{p,1}$. По построению, F имеет тип $u(\Delta)$ и $f(x)$ – выделенный гомоморфизм из F в F_1. Теорема 1 полностью доказана.

9. Восстановление многочлена

В теореме 1 нас больше всего интересует случай, когда наш остов – остов многочлена степени p^h. Будет ли восстановленный из остова $f(x)$ многочленом? Мы докажем теорему 2, которая дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Лемма 7. *Для любого $h \in \mathbb{N}$ функция $\Phi(k) = k - \lfloor k/h \rfloor$ неубывающая, причем $\Phi(k) = \Phi(k+1)$ только при $h \mid k+1$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$\Phi(k+1) = k+1 - \left\lfloor \frac{k+1}{h} \right\rfloor \ge k+1 - \left\lfloor \frac{k}{h} \right\rfloor - 1 = k - \left\lfloor \frac{k}{h} \right\rfloor = \Phi(k), \quad (46)$$

причем понятно, что достижение равенства равносильно тому, что $h \mid k+1$.

Замечание 3. *Если $n \neq p^{h+k}$, то $p^{\Phi(k)+1} \mid L'_{p^k} f_n^{(p^k)}$.* Действительно, $p^{k+1} \mid f_n^{(p^k)}$ по лемме 3, а $p^q L'_{p^k} \in \mathfrak{o}$ по утверждению 2. Перемножая, получаем $p^{k+1-q} \mid L'_{p^k} f_n^{(p^k)}$. Но по определению, как раз $\Phi(k)+1 = k+1-q$.

Лемма 8. *Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $n > p^{h+k}$, $M \in \mathbb{Z}$, $M \geq 0$, и $\nu(f_m) \geq e + M$ для всех $m \geq n/p^k$. Тогда $\nu(f_n^{(p^k)}) \geq (k+1)e + M$.*

Доказательство. Разобьем $f_n^{(p^k)}$ на слагаемые (ср. с доказательством леммы 3) вида

$$C_{p^k}^{j_1,\dots,j_m} f_{i_1}^{j_1} \dots f_{i_m}^{j_m}, \tag{47}$$

где $j_1 + \dots + j_m = p^k$ и $i_1 j_1 + \dots + i_m j_m = n$ (число m не фиксировано!). Пусть $i_m = \max(i_1, \dots i_m)$ – тогда $n \leq i_m(j_1 + \dots + j_m) = p^k i_m$, так что $i_m \geq n/p^k$ и $\nu(f_{i_m}) \geq e + M$. Обозначим d – НОД $(j_1, \dots, j_m)$ и $t = \nu_p(d)$. Как в лемме 3, $j_m \geq t+1$, поэтому $p^{t+1}\pi^{M(t+1)} \mid f_{i_m}^{j_m}$. По лемме 2, коэффициент в (47) делится на p^{k-t}, так что (47) делится на $p^{k+1}\pi^M$. Тогда и сумма этих слагаемых, равная $f_n^{(p^k)}$, делится на $p^{k+1}\pi^M$, то есть имеет требуемое нормирование.

Утверждение 4. *Пусть в теореме 1 $f_{p^k} = 0$ при $k > h$ (остов многочлена степени p^h). Тогда $\nu(f_n) \geq (\Phi(k)+1)e$ для $p^{h+k-1} < n < p^{h+k}$.*

Доказательство. Если $h = 1$, то $\Phi(k) = 0$ и утверждение сводится к лемме 6. Далее считаем, что $h \geq 2$. Будем доказывать индукцией по k.

Так как n – не степень p, то перепишем для него (45) и докажем, что каждое слагаемое в правой части делится на $p^{\Phi(k)+1}$

$$f_n = -\sum_{r=1}^{r=h+k-1} L'_{p^r} f_n^{(p^r)}. \tag{48}$$

Рассмотрим слагаемое с $r \geq k$ (при $k = 1$ они все такие). По замечанию 3, оно делится на $p^{\Phi(r)+1}$, а тем более на $p^{\Phi(k)+1}$ ($\Phi(r) \geq \Phi(k)$ по лемме 7).

Разберемся со слагаемым, где $r < k$. По предположению индукции, для $m < n$ и $p^{h+l-1} < m < p^{h+l}$ имеем $p^{\Phi(l)+1} \mid f_m$. Если $m \geq n/p^r$, то $l \geq k - r$ и $p^{\Phi(k-r)+1} \mid f_m$ (лемма 7). Применив лемму 8 для r вместо k и $M = \Phi(k-r)e$, получим $p^{r+\Phi(k-r)+1} \mid f_n^{(p^r)}$. Пусть $\Phi(r) = r - s$:

из утверждения 2 следует $p^s L'_{p^r} \in \mathfrak{o}$, а тогда $p^{\Phi(r)+\Phi(k-r)+1} \mid L'_{p^r} f_n^{(p^r)}$. Наконец, (31) влечет $\Phi(r)+\Phi(k-r) \geq \Phi(k)$, так что $p^{\Phi(k)+1} \mid L'_{p^r} f_n^{(p^r)}$. Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Если $h \neq 1$, $k = hq$, $n = p^h(p^k - 1) + 1$, то в неравенстве из утверждения 4 для f_n достигается равенство (очевидно $p^{h+k-1} < n < p^{h+k}$).*

Доказательство. Рассмотрим нормирование каждого слагаемого в формуле (48). Обозначения из лемм 8 и 3 будем использовать без пояснений.

1. $r > k$. Согласно замечанию 3, $\nu(L'_{p^r} f_n^{(p^r)}) \geq (\Phi(r)+1)e$. По лемме 7, $\Phi(r) \geq \Phi(k+1)$ и $\Phi(k+1) > \Phi(k)$ ($h \mid k$, так что $h \nmid k+1$). Поэтому $\nu(L'_{p^r} f_n^{(p^r)}) > (\Phi(k)+1)e$ – строгое неравенство.

2. $r < k$. Оценивая нормирование, мы использовали $\Phi(r)+\Phi(k-r) \geq \Phi(k)$. При $h \mid k$, $h \nmid r$ это неравенство строгое (см. внимательно (31)), так что мы получаем $\nu(L'_{p^r} f_n^{(p^r)}) > (\Phi(k)+1)e$.

Если $h \mid r$, $r = hs$, то рассмотрим $f_n^{(p^r)}$, разложив его в сумму слагаемых (47) (с заменой k на r). Пусть в очередном слагаемом $i_m = \max(i_1, \dots i_m)$, так что $i_m \geq n/p^r$ и, согласно утверждению 4, $\nu(f_{i_m}) \geq (\Phi(k-r)+1)e$

$$\begin{aligned} \nu\left(f_{i_1}^{j_1} \dots f_{i_m}^{j_m}\right) &\geq j_m \nu(f_{i_m}) \geq p^t(\Phi(k-r)+1)e \\ &\geq (t+1)(\Phi(k-r)+1)e \geq (\Phi(k-r)+t+1)e. \end{aligned} \tag{49}$$

Согласно лемме 2, коэффициент в (47) делится на p^{r-t}, так что нормирование (47) не меньше $(\Phi(k-r)+r+1)e$. Равенство возможно, только если в (49) везде равенство, т.е. при $m = 2$ ($m = 1$ невозможно, т.к. тогда $j_1 = p^r$ и $n = i_1 p^r$, а у нас $p \nmid n$), $i_1 = p^h$, $t = 0$ и $j_m = p^t = 1$. Это бывает только для

$$C_{p^r}^1 f_{p^h}^{p^r-1} f_i = p^r f_{p^h}^{p^r-1} f_i. \tag{50}$$

Но тогда у нас $i = n - p^h(p^r - 1) = p^{h+k} - p^{h+r} + 1 > p^{h+k-1}$ (и еще $i < n < p^{h+k}$), поэтому утверждение 4 влечет $\nu(f_i) \geq (\Phi(k)+1)e$. Нормирование (50) не меньше $(r+\Phi(k)+1)e$, что строго больше $(\Phi(k-r)+r+1)e$ (т.к. $r \geq 2$, ибо $h \mid r$). Складывая выражения (47), получаем $\nu(f_n^{(p^r)}) > (\Phi(k-r)+r+1)e$, а отсюда (см. доказательство утверждения 4) следует $\nu(L'_{p^r} f_n^{(p^r)}) > (\Phi(k)+1)e$.

3. $r = k$. Для завершения доказательства утверждения 5, покажем, что $\nu(L'_{p^k} f_n^{(p^k)}) = (\Phi(k)+1)e$. Это равносильно $\nu(f_n^{(p^k)}) = (k+1)e$, так как $\nu(L'_{p^k}) = -qe$, согласно утверждению 2. Как и выше, $m \geq 2$. Если среди $i_1, \ldots, i_m$ есть p^h – пусть это будет i_1, так что $p \mid f_{i_2}$, $\ldots$, $p \mid f_{i_m}$. Тогда

$$\nu\left(C_{p^k}^{j_1,\ldots,j_m} f_{i_1}^{j_1} \ldots f_{i_m}^{j_m}\right) \geq (k-t)e + j_m \nu(f_{i_m}) \geq (k-t+j_m)e \geq (k+1)e \quad (51)$$

(нормирование мультиномиального коэффициента оценили по лемме 2). Равенство возможно только если в (51) везде равенство: при $m = 2$, $i_1 = p^h$, $t = 0$ и $j_m = p^t = 1$ и т.д. Есть одно подходящее слагаемое

$$C_{p^k}^1 f_{p^h}^{p^k-1} f_1 = p^k f_{p^h}^{p^k-1} \frac{p}{a_h}. \quad (52)$$

Его нормирование в точности $(k+1)e$, у остальных слагаемых оно строго больше, так что $\nu(f_n^{(p^k)}) = (k+1)e$. Утверждение 5 полностью доказано.

Теперь мы легко выведем из полученного утверждения 5 теорему 2, сформулированную во введении.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим $f(x)$, построенный согласно теореме 1. Возьмем $N_q = p^h(p^{hq}-1)+1$ для всех $q \in \mathbb{N}$. Согласно утверждению 5, $\nu(f_{N_q}) = (\Phi(N_q)+1)e$. Следовательно, f_{N_q} не равно нулю. Так как последовательность N_q бесконечная, то у $f(x)$ есть сколь угодно далекие ненулевые коэффициенты. Это и означает, что $f(x)$ не является многочленом. Теорема 2 доказана.

Литература

1. J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields.* — Ann. Math. (2) **81** (1965), 380–387.
2. M. Hazewinkel, *Formal Groups and Applications.* New York, Academic Press, 1978.
3. О. В. Демченко, *Новые соотношения между формальными группами Любина–Тейта и формальными группами Хонды.* — Алгебра и анализ **10**, вып. 5 (1998), 77–84.
4. E. de Shalit, *Relative Lubin-Tate groups.* — Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 1–4.
5. I. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions: A Constructive Approach.* — Translations of Mathematical Monographs **121**, AMS (1993).

6. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, *Явная классификация формальных групп над локальными полями.* — Труды Математического Института имени В. А. Стеклова **241** (2003), 43–67.

Ferens-Sorotskiy E. V. On construction of formal groups with a given distinguished homomorphism.

It is known from Lubin-Tate theory that a Lubin–Tate formal group can be constructed by its distinguished isogeny, which can be taken to be an arbitrary power series (with a few restrictions). Analogous statement is also known for Honda formal groups. In the given article similar statement is proved in detail for p-typical formal groups in so-called small ramification case. It is also proved that a distinguished homomorphism, in general, can not be taken to be a polynomial.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: sorotskiy@rambler.ru

Поступило 12 ноября 2008 г.