Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

А. Л. Смирнов

ОДНА ЗАДАЧА ВЫПУКЛОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Введение

В этой заметке решается задача выпуклой целочисленной интерполяции, возникшая при изучении бинарного обобщенного проективного пространства в [1]. А именно, для подмножества $M \subset X \times \mathbb{R}^n$, где X – отрезок $[0,1]$ в $\mathbb{R}$, требуется найти набор целочисленных полиномов $f = (f_1, \dots, f_n)$, график которого попадает в M. Эта задача интересует нас в том случае, когда все M_x выпуклы, где M_x – прообраз точки x при проекции $p : X \times \mathbb{R}^n \to X$. Более того, нас интересует случай, когда для всех x, кроме граничных точек $x = 0$ и $x = 1$, множество M_x открыто в $x \times \mathbb{R}^n$. Что касается M_0 и M_1, то эти множества могут состоять, например, из одной точки.

Есть несколько очевидных препятствий к существованию f. Некоторые из них носят топологический характер. Например, в окрестности каждой точки x должно существовать непрерывное сечение проекции $M \to X$. Другие препятствия связаны с целочисленностью f. Например, M_0 должно содержать хотя бы одну целую точку. Более того, должна существовать целочисленная траектория, выходящая из M_0 и лежащая в M в некоторой окрестности нуля.

В заметке выделен достаточно обширный класс семейств, для которых локальные препятствия к разрешимости задачи интерполяции допускают простое описание, а разрешимость глобальной задачи сводится к разрешимости всех локальных задач.

Кроме того, приведены критерии потенциальной малости элементов упорядоченного кольца, оказавшиеся полезными при изучении простых идеалов в обобщенных кольцах, связанных с обобщенными проективными пространствами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00471) и INTAS (грант 05-1000008-8118) .

1. Вещественная интерполяция

Ниже $X = [0,1]$, V – пространство $\mathbb{R}^n$, рассматриваемое как аффинное пространство над $\mathbb{R}$, а p – проекция $X \times V \to X$.

Подмножество $M \subset X \times V$ называется ниже семейством множеств. Для семейства M задача (вещественной) интерполяции состоит в том, чтобы найти (вещественно) полиномиальное сечение отображения $p : M \to X$, где p – проекция $X \times V \to X$.

1.1. Допустимые семейства. Ближайшая цель – выделить достаточно обширный класс семейств (допустимые семейства), для которых локальные препятствия к разрешимости задачи интерполяции допускают простое описание. К тому же, позже окажется, что для допустимых семейств разрешимость глобальной задачи сводится к разрешимости всех локальных задач.

При описании допустимых семейств имеется в виду, что в приложениях M задано конечной системой неравенств вида $\psi(v,x) < 0$, где функция ψ аффинна по $v \in V$ и рациональна по x. Оказывается, что технически удобнее срезать полюса ψ и работать с функциями, каждая из которых задана на некотором замкнутом подмножестве X и продолжима в некоторую его окрестность. При этом строго внутри X достаточно непрерывной зависимости ψ от x, а вблизи границы – аналитической зависимости.

Для конечномерного аффинного пространства W над $\mathbb{R}$ и открытого $U \subset X$ множество допустимых W-значных функций $W_{\mathrm{ad}}(U)$ определим как множество тех непрерывных отображений $U \to W$, каждое из которых аналитично в некоторой окрестности точки $x = 0$ (если она входит в U) и в некоторой окрестности точки $x = 1$ (если она входит в U).

Для замкнутого $Z \subset X$ пусть $W_{\mathrm{ad}}(Z)$ – пространство ростков допустимых W-значных функций на Z. Иными словами, элемент $W_{\mathrm{ad}}(Z)$ представляет собой допустимую функцию, определенную в некоторой окрестности Z. При этом две такие функции отождествляются, если они совпадают в некоторой окрестности Z.

Семейство множеств M назовем допустимым, если оно может быть представлено как конечное (возможно пустое) пересечение элементарных допустимых семейств. При этом элементарное допустимое семейство определено парой (Z, ψ), где Z – замкнутое подмножество в X, а $\psi \in V^*_{\mathrm{ad}}(Z)$ – росток допустимой функции в пространство V^*

аффинных функционалов на V, как

$$M(Z,\psi)=\{(x,v)\in X\times V\,|\,\psi(x,v)<0 \text{ для всех } x\in Z \text{ кроме } x=0 \text{ и } x=1\}.$$

Ниже M – допустимое семейство, причем

$$\begin{aligned} &M=\cap M_i, i\in I, \quad \text{где}\\ &M_i=M(Z_i,\psi_i) - \text{элементарное допустимое семейство.} \end{aligned} \tag{1}$$

С допустимым семейством M связан пучок $\tilde{M}$ на X, для которого $\tilde{M}(U)$ состоит из тех $f\in V_{\mathrm{ad}}(U)$, график которых попадает в M. Ниже на $\mathbb{R}_{\mathrm{ad}}(U)$ рассматривается частичный порядок, при котором

$$f<g \text{ тогда и только тогда, когда } f(x)<g(x) \text{ для всех } x\in U-\{0,1\}. \tag{2}$$

На постоянном пучке $\mathbb{R}[t]$ рассматривается порядок, индуцированный из $\mathbb{R}_{\mathrm{ad}}$ при естественном вложении $\mathbb{R}[t]\subset\mathbb{R}_{\mathrm{ad}}$ (полиному соответствует заданная им функция).

1.2. Локальные задачи интерполяции. Будем говорить, что локальная задача интерполяции разрешима в точке $x\in X$, если существует такой набор полиномов $f=(f_1,\dots,f_n)$, $f_i\in\mathbb{R}[t]$, что росток в точке x отображения $u\mapsto f(u)$ принадлежит слою $\tilde{M}_x$ пучка $\tilde{M}$.

С точкой $x\in X$ в множестве I, индексирующем систему (1), связано подмножество

$$I_x=\{i\in I\,|\,x\in Z_i\}.$$

Для внутренней точки $x\in(0,1)$ локальная разрешимость равносильна условию

$$M_x\neq\varnothing, \tag{3}$$

где M_x задано в пространстве $x\times V$ линейными неравенствами $\psi_i(x,v)<0$, $i\in I_x$.

Для анализа локальной разрешимости в точке $x=0$ (соответственно, $x=1$) рассмотрим на $\mathbb{R}[[t_0]]$ (соответственно, $\mathbb{R}[[t_1]]$)порядок, при котором $f>g$ тогда и только тогда, когда первый нетривиальный коэффициент $f-g$ положителен. Для каждого $i\in I_0$ (соответственно, $i\in I_1$) пусть $\widehat{\psi}_{i,0}\in\mathbb{R}[[t_0]]$ (соответственно, $\widehat{\psi}_{i,1}\in\mathbb{R}[[t_1]]$) разложение ψ_i в ряд Тейлора по параметру $t_0=t$ (соответственно, $t_1=1-t$). В $\widehat{V}_0=V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[[t_0]]$ рассмотрим подмножество

$$\widehat{M_0}=\{v\in\widehat{V}_0\,|\,\widehat{\psi}_{i,0}(v)<0 \text{ для всех } i\in I_0\}.$$

Соответственно в $\widehat{V}_1 = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[[t_1]]$ рассмотрим подмножество

$$\widehat{M_1} = \{v \in \widehat{V}_1 | \widehat{\psi}_{i,1}(v) < 0 \text{ для всех } i \in I_1\}.$$

Очевидно, что локальная разрешимость в точках $x = 0$ и $x = 1$ равносильна условиям

$$\widehat{M_0} \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \widehat{M_1} \neq \varnothing. \tag{4}$$

1.3. Глобальная вещественная интерполяция. Следующий результат потребуется при доказательстве основной теоремы в 2.3.

Теорема. *Для допустимого семейства M глобальная разрешимость задачи вещественной интерполяции вытекает из разрешимости всех локальных задач вещественной интерполяции.*

Доказательство. Редуцируем задачу к случаю $\dim V = 1$. Пользуясь локальной разрешимостью, для каждой точки $x \in X$ выберем систему полиномов $s^x \in \tilde{M}_x$. Кроме того, для каждой точки $x \in X$ выберем допустимые функции $\varepsilon_1^x, \ldots, \varepsilon_n^x$, каждая из которых определена в некоторой окрестности x, достаточно мала и не обращается в ноль (за исключением точки x при $x = 0$ и $x = 1$). При этом малость ε_j^x для внутренней точки x означает малость значения $\varepsilon_j^x(x)$, а малость для $x = 0$ и $x = 1$ означает малость в $\mathbb{R}[[t_0]]$ и $\mathbb{R}[[t_1]]$, соответственно. Можно считать, что все s_j^x, ε_j^x определены в некоторой окрестности U^x точки x. Выберем в каждом U^x замкнутое в X подмножество Z^x, содержащее некоторую окрестность x. Пользуясь компактностью X, выберем конечный набор x_k так, что Z^{x_i} покрывают X, включив в этот набор $x = 0$ и $x = 1$. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ рассмотрим одномерное допустимое семейство $M^j = \cap M_k^j$, где

$$M_k^j = \{(x, w) \in X \times \mathbb{R} | s_j^{x_k}(x) - \varepsilon_j^{x_k}(x) < w < s_j^{x_k}(x) + \varepsilon_j^{x_k}(x) \\ \text{при } x \in Z^{x_k} \text{ и } x \neq 0, 1\}.$$

Для каждого семейства M^j локальная задача разрешима по построению. Кроме того, если f_j решение глобальной задачи для M^j, то $(f_1, \ldots, f_n)$ – решение глобальной задачи для M за счет малости $\varepsilon_j^x(x)$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $n = 1$, что ниже и предполагается.

Заметим сначала, что задача интерполяции разрешима глобально в допустимых функциях, то есть $\tilde{M}(X) \neq \emptyset$. Это следствие существования разбиения единицы, подчиненного конечному покрытию X, в классе допустимых функций. Покажем теперь, что глобальная задача разрешима в полиномах. Для этого найдем решения $u, v \in \tilde{M}(X)$ такие, что $u < v$. Пусть v – любой элемент $\tilde{M}(X)$, существующий по доказанному. Чтобы найти u, достаточно расширить систему неравенств для M, добавив неравенство, обеспечивающее условие $u(x) < v(x)$ для $x \neq 0, 1$, и учесть локальную разрешимость расширенной системы неравенств.

Разрешимость глобальной задачи вытекает из существования полинома p такого, что $u(x) < p(x) < v(x)$ для $x \neq 0, 1$. Следующий способ построения p автор узнал от С. В. Кислякова. Пусть $d_0 = \mathrm{ord}_0(v-u)$ и $d_1 = \mathrm{ord}_1(v-u)$. Найдем $s_0, s_1 \in \mathbb{R}[t]$ таким образом, что $u < s_0 < v$ в $\mathbb{R}[[t_0]]$ и $u < s_1 < v$ в $\mathbb{R}[[t_1]]$. Выберем $q \in \mathbb{R}[t]$ таким образом, что $\mathrm{ord}_0(q - s_0) > d_0$ и $\mathrm{ord}_1(q - s_1) > d_1$. Тогда функции $g = (v - q)/(t^{d_0}(1-t)^{d_1})$ и $f = (u - q)/(t^{d_0}(1-t)^{d_1})$ непрерывны и $g > f$ на всем $X = [0, 1]$. С помощью теоремы Стоуна–Вейерштрасса найдем полином r, для которого $g(x) > r(x) > f(x)$ на всем X. Полином $p = q + t^{d_0}(1-t)^{d_1} r$ удовлетворяет условию $u(x) < p(x) < v(x)$ при $x \neq 0, 1$.

2. Целочисленная интерполяция

Для семейства M задача целочисленной интерполяции состоит в том, чтобы найти набор целочисленных полиномов $f = (f_1, \ldots, f_n)$, график которого попадает в M. Ниже M – допустимое семейство.

2.1. Локальные задачи интерполяции. Будем говорить, что локальная задача интерполяции разрешима в точке $x \in X$, если существует такой набор полиномов $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in \mathbb{Z}[t]$, что росток в точке x отображения $u \mapsto f(u)$ принадлежит слою $\tilde{M}_x$ пучка $\tilde{M}$.

Как и в случае интерполяции вещественными полиномами, для внутренней точки $x \in (0, 1)$ локальная разрешимость равносильна условию $M_x \neq \varnothing$. Однако для локальной разрешимости задачи целочисленной интерполяции в точках $x = 0$ и $x = 1$ условий $\widehat{M}_0 \neq \varnothing$ и $\widehat{M}_1 \neq \varnothing$ не достаточно. В этом случае локальная разрешимость, очевидно, эквивалентна следующим более сильным условиям

$$\widehat{M}_0 \cap \mathbb{Z}[[t_0]]^n \neq \varnothing \text{ и } \widehat{M}_1 \cap \mathbb{Z}[[t_1]]^n \neq \varnothing.$$

В доказательстве разрешимости глобальной задачи целочисленной интерполяции потребуется сравнивать отношения частичного порядка на полиномах, одно из которых определено значениями полиномов, а другое – их коэффициентами.

2.2. Сравнение порядков. Для $\alpha \in \mathbb{R}[z]$ функция $\overset{\vee}{\alpha} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ переводит i в коэффициент α при z^i, т. е. $\alpha = \sum \overset{\vee}{\alpha}(i) z^i$. На $\mathbb{R}[z]$ рассмотрим два частичных порядка:

$$\alpha < \beta, \text{ если } \alpha(\zeta) < \beta(\zeta) \text{ для всякого } \zeta > 0;$$

$$\alpha \preceq \beta, \text{ если } \overset{\vee}{\alpha}(i) \leq \overset{\vee}{\beta}(i) \text{ для всякого } i \in \mathbb{Z}.$$

Неравенство $\alpha \prec \beta$ очевидно влечет за собой неравенство $\alpha < \beta$. При этом конус положительных элементов для отношения $\alpha \prec \beta$ строго меньше конуса положительных элементов для отношения $\alpha < \beta$ (например, $0 < 1 - z + z^2$). Тем не менее,

$$\alpha > 0 \Rightarrow (1+z)^d \alpha \succ 0 \text{ при } d >> 0. \tag{5}$$

Это утверждение можно найти в [2, решение задачи VI, 49]. Его проверка основана на интерполяционной технике.

Ниже нам потребуется следующее вспомогательное утверждение. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}[z]$ и $D(\alpha) = [m, n]$, где $D(\alpha)$ – выпуклая оболочка в $\mathbb{R}$ множества $\operatorname{Supp} \alpha = \{i | \overset{\vee}{\alpha}(i) \neq 0\}$. Положим $\beta_d = (1+z)^d \alpha$ для $d \geq 0$. Утверждается, что если $\alpha \succ 0$, то для всякой константы c при $d \gg 0$ верны неравенства

$$\overset{\vee}{\beta}_d(i) \geq c \quad \text{при} \quad m < i < n + d. \tag{6}$$

Иными словами, при достаточно больших d все коэффициенты $(1+z)^d \alpha$, кроме крайних, больше любой наперед заданной границы.

Действительно, по условию $\alpha \succeq \overset{\vee}{\alpha}(m) z^m + \overset{\vee}{\alpha}(n) z^n$. Поэтому $(1+z)^d \alpha \succeq (1+z)^d (\overset{\vee}{\alpha}(m) z^m + \overset{\vee}{\alpha}(n) z^n)$. Коэффициент этого полинома при z^i равен

$$\overset{\vee}{\alpha}(m) \binom{d}{i-m} + \overset{\vee}{\alpha}(n) \binom{d}{i-n},$$

где $\binom{d}{j} = 0$ при $j < 0$ и $j > d$. Поэтому неравенство (6) вытекает из неравенства $d \geq c/\varepsilon$, где $\varepsilon = \min(\overset{\vee}{\alpha}(m), \overset{\vee}{\alpha}(n)) > 0$ по выбору m, n и условию $\alpha \succ 0$.

2.3. Глобальная целочисленная интерполяция. Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема. *Для допустимого семейства M глобальная разрешимость задачи целочисленной интерполяции вытекает из разрешимости всех локальных задач целочисленной интерполяции.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что разрешимость n-мерной задачи может быть выведена из разрешимости одномерных точно так же, как и в доказательстве теоремы 1.3. Ниже считаем, что $n = 1$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $f^-, f^+ \in \mathbb{R}[t]$, причем $f^- < f^+$. Предположим, кроме того, что существуют $h_0 \in \mathbb{Z}[t_0]$ $(t_0 = t)$ и $h_1 \in \mathbb{Z}[t_1]$ $(t_1 = 1-t)$ такие, что $f^- < h_0 < f^+$ в $\mathbb{R}[[t_0]]$ и $f^- < h_1 < f^+$ в $\mathbb{R}[[t_1]]$. При этих условиях

$$\text{требуется найти } h \in \mathbb{Z}[t], \quad \text{так что} \quad f^- < h < f^+. \tag{7}$$

Пользуясь глобальной разрешимостью системы в вещественных полиномах (1.3), покажем, что теорема сводится к задаче (7). Действительно, в качестве f^+ достаточно взять решение в $\mathbb{R}[t]$ для семейства M с добавленными неравенствами $(0, -y < -h_0)$ и $(1, -y < -h_1)$, а в качестве f_- – решение в $\mathbb{R}[t]$ для семейства M с добавленными неравенствами $(0, y < h_0)$ и $(1, y < h_1)$.

Далее решается задача (7). Для $d \geq \max(\deg f_+, \deg f_-)$ рассмотрим в $\mathbb{R}[z]$ полиномы $\phi_d^-(z) = (1+z)^d f^-(1/(1+z))$ и $\phi_d^+(z) = (1+z)^d f^+(1/(1+z))$. Тогда

$$f^-(t) = t^d \phi_d^-((1-t)/t), \quad f^+(t) = t^d \phi_d^+((1-t)/t). \tag{8}$$

Утверждается, что

$$\text{при } \ d \gg 0 \quad \exists \psi \in \mathbb{Z}[z]: \quad \phi_d^- \prec \psi \prec \phi_d^+. \tag{9}$$

Этого будет достаточно для решения задачи (7). Действительно, положим $h(t) = t^d \psi((1-t)/t)$. Ввиду (9) степень ψ не превосходит d и, таким образом, $h \in \mathbb{Z}[t]$. Кроме того, из (8) очевидно вытекает неравенство $\phi_d^- < \psi < \phi_d^+$ и, с учетом (8), требуемое неравенство $f^- < h < f^+$. Осталось проверить (9).

Так как $f^- < f^+$ по условию задачи (7), то $\phi_d^- < \phi_d^+$. Поэтому ввиду (5) для некоторого e верно неравенство $\phi_e^- \prec \phi_e^+$, то есть $\alpha =$

$\phi_e^+ - \phi_e^- \succ 0$. Пусть $D(\alpha) = [m, n]$, где $D(\alpha)$ – выпуклая оболочка в $\mathbb{R}$ множества тех индексов i, для которых коэффициент α при z^i отличен от нуля. Ввиду (6) для $d \gg e$ верны неравенства

$$a_i^+ - a_i^- > 1 \quad \text{при} \quad m < i < n + d - e, \tag{10}$$

где $\phi_d^- = \sum a_i^- z^i$ и $\phi_d^+ = \sum a_i^+ z^i$. Утверждается, что такие d удовлетворяют (9).

Чтобы проверить это, нужно доказать существование требуемого в (9) полинома $\psi \in \mathbb{Z}[z]$. Для этого достаточно для каждого i в пределах $0 \le i \le d$ показать, что

$$\mathbb{Z} \cap [a_i^-, a_i^+] \ne \varnothing, \tag{11}$$

причем хотя бы для одного i непусто пересечение $\mathbb{Z}$ с открытым интервалом (a_i^-, a_i^+).

Для i в границах $d_1 < i < d - d_0$, где $d_0 = \operatorname{ord}_0(f^+ - f^-)$ и $d_1 = \operatorname{ord}_1(f^+ - f^-)$, утверждение (11), включая и случай открытого интервала, вытекает из (10) и того, что $m = d_1$, а $n = e - d_0$. Осталось рассмотреть случаи $i \le d_1$ и $i \ge d - d_0$.

Чтобы проверить (11) при $i \le d_1$, воспользуемся существованием целочисленной струи h_1 из условий задачи (7). Положим $\gamma_1(z) = (1 + z)^d h_1(z/(1+z)) \in \mathbb{Z}[z]$. Неравенство $f^- < h_1 < f^+$ в $\mathbb{R}[[t_1]]$ из условия задачи (7) влечет неравенство $\phi_d^-(\zeta) < \gamma_1(\zeta) < \phi_d^+(\zeta)$ при ζ близком к нулю и $\zeta \ne 0$. Это неравенство означает, в частности, что для $i < d_1$ верны равенства $a_i^- = c_i = a_i^+$, где $\gamma_1(z) = \sum c_i z^i$, а при $i = m$ верно неравенство $a_i^- \le c_i \le a_i^+$. Так как $c_i \in \mathbb{Z}$, то в этом случае (11) доказано.

Чтобы проверить (11) при $i \ge d - d_0$, воспользуемся существованием целочисленной струи h_0 из условий задачи (7). Положим $\gamma_0(z) = (1 + z)^d h_0(1/(1+z)) \in \mathbb{Z}[z]$. Неравенство $f^- < h_0 < f^+$ в $\mathbb{R}[[t_0]]$ из условия задачи (7) влечет неравенство $\phi_d^-(\eta) < \gamma_0(\eta) < \phi_d^+(\eta)$ при η близком к бесконечности. Это неравенство означает, в частности, что для $i > d - d_1$ верны равенства $a_i^- = b_i = a_i^+$, где $\gamma_0(z) = \sum b_i z^i$, а при $i = d - d_1$ верно неравенство $a_i^- \le b_i \le a_i^+$. Так как $b_i \in \mathbb{Z}$, то в этом случае (11) доказано.

3. Критерий потенциальной малости

При исследовании простых идеалов в обобщенных кольцах, связаных с порядками, приходится сравнивать степени одного элемента с другим элементом. В этом разделе приведены некоторые полезные для такого сравнения утверждения.

3.1. Локальный критерий потенциальной малости. Пусть R – кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом μ, полем вычетов $F = R/\mu$ и полем частных K. Таким образом, имеется проекция $R \to F$, $f \mapsto \bar{f}$ и нормирование $\operatorname{ord} : K^* \to \mathbb{Z}$. Далее предполагается, что F упорядочено и, в частности, $\operatorname{char} F = 0$.

Упорядочение K называется согласованным с упорядочением F, если неравенство $f > g$ влечет неравенство $\bar{f} \geq \bar{g}$, а неравенство $\bar{f} > \bar{g}$ влечет неравенство $f > g$ для всех $f, g \in R$.

Упорядочения K, согласованные с упорядочением F, находятся в биекции с $\mathbf{P}_{>0}(T)$ – фактор-пространством множества ненулевых элементов одномерного векторного F-пространства $T = \mu/\mu^2$ по группе положительных элементов $F^*_{>0}$. Иными словами, речь идет о множестве лучей в T. Действительно, упорядочение K определяет луч положительных элементов T. Наоборот, луч положительных элементов определяет множество положительных локальных параметров и, следовательно, упорядочение K, при котором $f > 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{f}_0 > 0$, где $f_0 = fu^{-\operatorname{ord} f}$, а u – произвольный положительный локальный параметр.

В частности, отсюда вытекает, что для положительных $f, g \in R$

$$f \leq g \Rightarrow \operatorname{ord} f \geq \operatorname{ord} g. \tag{12}$$

Действительно, если $a = \operatorname{ord} f < \operatorname{ord} g$, то $\bar{f}_1 > 0$, а $\bar{g}_1 = 0$, где $f_1 = fu^{-a}$, а $g_1 = gu^{-a}$. Это противоречит неравенству $\bar{f}_1 \leq \bar{g}_1$, вытекающему из неравенства $f_1 \leq g_1$ и согласованности упорядочений F и K.

Далее предполагаем, что зафиксировано некоторое упорядочение K, согласованное с упорядочением F, и, кроме того, что поле вычетов F архимедово. Пусть $m \in R$, причем $1 > m > 0$. Нас интересуют условия на $f \in R$, гарантирующие выполнение неравенств

$$-m < f^d < m \quad \text{при всех достаточно больших} \quad d. \tag{13}$$

Покажем, что необходимы и достаточны следующие условия:

1. если $\operatorname{ord} m > 0$, то имеется единственное условие $\operatorname{ord} f > 0$;
2. если $\operatorname{ord} m = 0$, то имеются следующие условия:
   (a) $-1 < f < 1$ и
   (b) $\operatorname{ord}(1 - m) \geq \max(\operatorname{ord}(1 - f), \operatorname{ord}(1 + f))$.

При этом условие (b) может быть записано в равносильной форме $\operatorname{ord}(1-m) \geq \operatorname{ord}(1-f^2)$, так как $\operatorname{ord}(1-g^2) = \max(\operatorname{ord}(1-g), \operatorname{ord}(1+g))$ для всякого $g \in R$.

Будем считать, что $f > 0$. Это не уменьшает общности, так как утверждение инвариантно относительно замены $f \mapsto -f$. Случай $\operatorname{ord} m > 0$ очевиден, и далее $\operatorname{ord} m = 0$. Необходимость условия (a) очевидна: если $f > 1$, то $f^d > 1$. Проверим необходимость условия (b). Во-первых, $\operatorname{ord}(1 - f^d) = \operatorname{ord}(1 - f)$, так как $-1 < f < 1$. Во-вторых, неравенство $f^d < m$ влечет неравенство положительных элементов $1 - f^d > 1 - m$ и, с учетом (12), неравенство $\operatorname{ord}(1 - f^d) \le \operatorname{ord}(1 - m)$.

Проверим достаточность условий (a) и (b), по-прежнему считая, что $f > 0$. Если $\bar{f} < 1$, то $-\bar{m} < \bar{f}^d < \bar{m}$ при больших d, ввиду неравенства $\bar{m} > 0$ (следует из того, что рассматривается случай $\operatorname{ord} m = 0$) и архимедовости F. Этого достаточно для выполнения (13). Осталось рассмотреть случай $\bar{f} = 1$ и $\bar{m} = 1$. В этом случае $m = 1 - u^i a$, $f = 1 - u^j b$, где $i = \operatorname{ord}(1 - m)$, $j = \operatorname{ord}(1 - f)$, $\bar{a} > 0$ и $\bar{b} > 0$ и, по условию, $j \le i$. Если $j < i$, то (13) выполнено при всех $d \ge 1$. Если $i = j$, то (13) выполнено при всех $d > \bar{a}/\bar{b}$. Это завершает доказательство ввиду архимедовости F.

3.2. Глобальный критерий потенциальной малости. Пусть $m \in \mathbb{R}[t]$, причем $0 < m < 1$ (здесь и ниже имеется в виду порядок, указанный в (2)). Нас интересуют условия на $f \in \mathbb{R}[t]$, гарантирующие неравенства $-m < f^n < m$ при всех достаточно больших n. Покажем, что необходимы и достаточны следующие условия:

(a) $1 > f > -1$;

(b) $\operatorname{ord}_0(1 - m) \ge \operatorname{ord}_0(1 - f^2)$ и $\operatorname{ord}_1(1 - m) \ge \operatorname{ord}_1(1 - f^2)$;

(c) если $m(0) = 0$, то $f(0) = 0$ и, если $m(1) = 0$, то $f(1) = 0$.

Необходимость условия (a) очевидна. Необходимость остальных условий вытекает из критерия 3.1, примененного к $R = \mathbb{R}[[t_0]]$ с положительным локальным параметром $t_0 = t$ и $R = \mathbb{R}[[t_1]]$ с положительным локальным параметром $t_1 = 1 - t$. Проверим достаточность условий (a), (b) и (c).

Пользуясь критерием 3.1, найдем $i > 0$ и окрестности U_0 и U_1 точек 0 и 1, так что $-m(x) < f^i(x) < m(x)$ при $x \in U_0 \cap (0,1)$ и $x \in U_1 \cap (0,1)$. Выберем замкнутый отрезок $I \subset (0,1)$ так, что $[0,1] = U_0 \cup U_1 \cup I$. Так как $1 > f > -1$ и $m > 0$, то найдется j, так что $-m(x) < f^j(x) < m(x)$ для $x \in I$. Тогда неравенства $-m < f^n < m$ выполнены при всех $n \ge \max(i, j)$.

Литература

1. А. Л. Смирнов, *Бинарное проективное пространство.* — Этот том.
2. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа.* Наука, М. (1978).

Smirnov A. L. On a problem of integer convex interpolation.

A problem of integer convex interpolation on the unit interval arisen when studying generalized rings related to the binary projective space is solved. A criterion of potential smallness in ordered rings related to the binary projective space is given.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2008 г.