

А. Л. Смирнов

БИНАРНОЕ ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

ВВЕДЕНИЕ

Построенная в работе Н. Дурова [1] теория обобщенных схем значительно расширила рамки алгебраической геометрии. Однако для содержательных применений построенной теории предстоит проделать значительную работу. В частности, следует добиться лучшего понимания хотя бы основных вновь появившихся пространств. К таким пространствам заведомо относятся обобщенные проективные пространства над \mathbb{F}_0 , а именно $\mathbf{P}^r = \text{Proj } \mathbb{F}_0[t_1, \dots, t_n]$, где $r = (r_1, \dots, r_n)$ – произвольный набор неотрицательных целых чисел, а t_i – свободная переменная арности r_i . Отметим, что классические проективные пространства соответствуют наборам вида $r = (1, \dots, 1)$. Поэтому особый интерес представляет одно из простейших неклассических проективных пространств, соответствующее набору $r = (2)$. Основная цель данной заметки – начать изучение пространства \mathbf{P}^{AB} , тесно связанного с $\mathbf{P}^{(2)}$.

Более конкретно, в заметке вычислены глобальные сечения структурного пучка на элементах некоторого аффинного покрытия \mathbf{P}^{AB} , а также вычислены схемные точки унарной версии этого пространства.

1. СТРУКТУРА \mathbf{P}^{AB}

Пусть AB – градуированное подкольцо $\mathbb{Z}[A, B]$ ($\deg A = \deg B = 1$), порожденное \mathbb{F}_{1^2} и бинарной операцией (A, B) . Согласно [2, 3.4.3]

$$AB_d(n) = \{f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{Z}[A, B]^n \mid \deg(f_i) = d \text{ и } \|f\| \leq (A+B)^d\}. \quad (1)$$

Неравенство в этом описании означает, иными словами, что

$$|a_1(i, j)| + \dots + |a_n(i, j)| \leq \binom{d}{i}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00471) и INTAS (грант 05-1000008-8118).

для всяких i, j с условием $i + j = d$, где $a_m(i, j)$ – коэффициент в f_m при $A^i B^j$.

С градуированным кольцом \mathbf{AB} связана [1, 6.6.18] обобщенная схема

$$\mathbf{P}^{\mathbf{AB}} = \text{Proj } \mathbf{AB}.$$

Точнее говоря, понятие обобщенной схемы [1, 6.5] опирается на выбор некоторой теории локализации [1, 6.3.4], то есть выбор “обобщенного малого ситуса Зарисского”. Далее считаем зафиксированной некоторую теорию локализации \mathcal{T} . Даже для фиксированной \mathcal{T} имеется несколько параллельных теорий [1, 6.4.14]. Дело в том, что для каждого обобщенного кольца A на категории $\mathcal{S}_A = (\mathcal{T}_A)^{op}$ имеется несколько топологий (например, слабая и конечная), каждая из которых может претендовать на роль обобщенной топологии Зарисского. При этом понятие обобщенной схемы зависит от выбора такой топологии.

Итак, обобщенная схема представляет собой пару (X, \mathcal{O}_X) , где X – некоторый топос, а \mathcal{O}_X – структурный пучок обобщенных колец. Далее такие пары называются окольцованными топосами, хотя более корректно называть их обобщенно-окользованными топосами. Для того, чтобы окользованный топос (X, \mathcal{O}_X) был (обобщенной) схемой, требуется, чтобы пара (X, \mathcal{O}_X) локально была изоморфна окольцованному топосу вида $\text{Spec } A$.

Следуя [1, 6.4.14], будем считать, что выбрана конечная топология. В этом случае топос X , лежащий в основе обобщенной схемы, имеет много точек и представляет собой (трезвое) топологическое пространство [1, 6.4.12].

1.1. Автоморфизмы. Рассмотрим следующие автоморфизмы градуированного кольца $\mathbb{Z}[A, B]$: $\sigma : A \mapsto B, B \mapsto -A$ и $\iota : A \mapsto A, B \mapsto -B$. При этом $\sigma^4 = 1, \iota^2 = 1, \iota\sigma\iota = \sigma^3$. Иными словами, σ и ι порождают группу диэдра D_4 (симметрии двустороннего квадрата), которая может быть реализована как группа мономиальных (2×2) -матриц с коэффициентами ± 1 . При этом

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \iota = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из описания (1) тотчас видно, что \mathbf{AB} инвариантно относительно σ и ι . Таким образом, $D_4 \subset \text{Aut}(\mathbf{AB})$. Это включение является равенством. Действительно, поскольку \mathbf{AB} порождено бинарной операцией (A, B) и всякий автоморфизм \mathbf{AB} определен своим значением на этой

операции, то автоморфизмов не больше, чем операций в $\text{AB}_1(2)$ истинной арности два, то есть элементов вида $(\pm A, \pm B)$ и $(\pm B, \pm A)$. Все эти потенциальные образы операции (A, B) реализуются с помощью D_4 .

В общем случае несложно показать, что для градуированного кольца R ядро естественного гомоморфизма $\text{Aut}(R) \rightarrow \text{Aut}(\text{Proj } R)$ состоит из автоморфизмов вида $f \mapsto u^d f$, где $f \in R_d(n)$, а u – обратимый элемент $R_0(1)$. Таким образом, ядро естественного гомоморфизма $\text{Aut}(\text{AB}) \rightarrow \text{Aut } \mathbf{P}^{\text{AB}}$ совпадает с подгруппой диагональных мономиальных матриц $\{1, \sigma^2\}$ и проективизированная группа диэдра $PD_4 = D_4 / \{1, \sigma^2\}$ эффективно действует на \mathbf{P}^{AB} .

Проверку полноты списка автоморфизмов разумно провести после вычисления группы Пикара.

1.2. Аффинные покрытия. По определению [1, 6.6.18], имеется следующее открытое покрытие \mathbf{P}^{AB} аффинными подсхемами $\mathbf{P}^{\text{AB}} = \cup D_+(g)$, где g пробегает однородные унарные операции положительной степени. Покажем, что имеется более экономное покрытие

$$\mathbf{P}^{\text{AB}} = D_+(A) \cup D_+(B) \cup D_+(A+B) \cup D_+(A-B). \quad (2)$$

Согласно критерию [1, 6.6.20] для этого необходимо и достаточно проверить, что $|\text{AB}|_+ = \text{Rad}(I)$, где $|\text{AB}| = \text{AB}(1)$ – градуированный AB-модуль ($|\text{AB}|_d = \text{AB}_d(1)$), I – градуированный идеал [1, 6.6.20], порожденный $A, B, A+B$ и $A-B$, а радикал $\text{Rad}(I)$ определен тем, что $\text{Rad}_d(I)$ состоит из всех $g \in \text{AB}_d(1)$, таких что $g^e \in I_{de}$ для некоторого e .

Покажем, что $I = |\text{AB}|_+$. Индукцией по d проверим, что $\text{AB}_d(1) \subset I_d$. Случай $d = 1$ (база индукции) – очевиден. Пусть $d > 1$ и $g = \sum_{i+j=d} g_{i,j} A^i B^j \in \text{AB}_d(1)$. Из описания AB (см. (1)) вытекает, что $|g_{i,j}| \leq \binom{d}{i}$. Так как $\binom{d}{i} = \binom{d-1}{i-1} + \binom{d-1}{j-1}$, то найдутся целые $u_{i-1,j}$ и $v_{i,j-1}$ такие, что $g_{i,j} = u_{i-1,j} + v_{i,j-1}$, $|u_{i-1,j}| \leq \binom{d-1}{i-1}$, $|v_{i,j-1}| \leq \binom{d-1}{j-1}$, причем $u_{-1,d} = v_{d,-1} = 0$. Тогда $u = \sum u_{i,j} A^i B^j, v = \sum v_{i,j} A^i B^j \in \text{AB}_{d-1}(1)$, лежит в I_d , поскольку $u, v \in \text{AB}_{d-1}(1)$ (см. описание AB в (1)) и по индукционному предположению $u, v \in I_{d-1}$. Таким образом, $g = Au + Bv \in I_d$.

Из существования конечного покрытия аффинными открытыми множествами вытекает квазикомпактность \mathbf{P}^{AB} (см. [1, 6.4.12] – здесь важно то, что используется конечная топология).

Рассмотрим вопрос об избыточности покрытия (2). Во-первых, покажем, что $D_+(A)$, $D_+(B)$ и $D_+(A-B)$ не покрывают \mathbf{P}^{AB} . Для этого рассмотрим идеал I , порожденный A , B и $A-B$, и покажем, что $A+B \notin \text{Rad } I$. Рассмотрим набор подмножеств $J_d \subset AB_d(1)$, состоящий из тех f , для которых $f(1,1) < 2^d$. Очевидно, что $J = \{J_d\}$ – идеал (для этого надо проверить, что $Au+Bv \in J_{d+1}$ всякий раз, когда $u,v \in J_d$), $J \supset I$ и $A+B \notin \text{Rad } J$. Следовательно, $A+B \notin \text{Rad } I$.

Несколько неожиданно оказывается, что $D_+(A) \subset D_+(B) \cup D_+(A+B) \cup D_+(A-B)$. Действительно, рассмотрим идеал I , порожденный B , $A+B$ и $A-B$. Тогда $A^2 + AB + B^2 = A(A+B) + BB \in I_2$, $A^2 + AB = A(A+B) \in I_2$, $A^3 = A(A^2 + AB + B^2) - B(A^2 + AB) \in I_3$. Таким образом, имеется еще более экономное покрытие

$$\mathbf{P}^{AB} = D_+(B) \cup D_+(A+B) \cup D_+(A-B). \quad (3)$$

Так как автоморфизм σ (см. 1.1) меняет местами $D_+(B)$ и $D_+(A)$, а также $D_+(A+B)$ и $D_+(A-B)$, то открытые подсхемы $D_+(A)$, $D_+(A+B)$ и $D_+(A-B)$ образуют покрытие \mathbf{P}^{AB} , а $D_+(A)$, $D_+(B)$ и $D_+(A+B)$ не образуют.

Не похоже, что \mathbf{P}^{AB} можно покрыть двумя главными открытыми подсхемами, но все-таки покрытие (3) можно усовершенствовать, сделав его симметричным по A и B . А именно, утверждается, что

$$\mathbf{P}^{AB} = D_+(AB) \cup D_+(A+B) \cup D_+(A-B). \quad (4)$$

Действительно, рассмотрим идеал I , порожденный AB , $A+B$ и $A-B$. Тогда $A^2 + AB = A(A+B) \in I_2$, $A^3 + A^2B + AB^2 = A(A^2 + AB) + B(AB) \in I_3$, $A^3 + A^2B = A^2(A+B) \in I_2$, $A^4 = A(A^3 + A^2B + AB^2) - B(A^3 + A^2B) \in I_4$.

Еще одно достоинство покрытия (4) состоит в том, что

$$D_+(AB) = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$$

– вполне классическое пространство, поскольку локализация AB по A и по B совпадает с $\mathbb{Z}[A, A^{-1}, B, B^{-1}]$, а ее компонента степени ноль совпадает с $\mathbb{Z}[B/A, A/B]$.

1.3. Кольца $\Gamma(D_+(A), \mathcal{O})$ и $\Gamma(D_+(B), \mathcal{O})$. По определению проективного спектра [1, 6.6.18] кольцо $\Gamma(D_+(A), \mathcal{O})$ совпадает с 0-компонентой обобщенного градуированного кольца $AB_{(A)}$ (здесь градуирующий моноид $\Delta = \mathbb{Z}$), то есть локализации AB , обращающей A

(см. [1, 6.6.12]). Вложение $\text{AB} \subset \mathbb{Z}[A, B]$ индуцирует гомоморфизм $\text{AB}_{(A)} \rightarrow \mathbb{Z}[A, B]_{(A)}$.

Из явного описания локализации (градуированных) обобщенных колец (см. [1, 6.6.13, 6.1.7]) вытекает, что вложение обобщенных градуированных колец $E \subset F$ индуцирует вложение локализаций $S^{-1}E \subset S^{-1}F$, где S – (градуированная) мультиплликативная система в E (см. также [1, 7.1.2]).

Таким образом, $\Gamma(D_+(A), \mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}[x]$, где $x = B/A$. Утверждается, что $\Gamma(D_+(A), \mathcal{O}) = R$, где R – прообраз \mathbb{F}_{1^2} при гомоморфизме $\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto 0$. Иными словами,

$$\begin{aligned} R(n) = & \{(f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{Z}[x]^n \mid \exists i \text{ такое, что } f_i(0) = 0, \pm 1, \\ & \text{а } f_j(0) = 0 \text{ при } j \neq i\}. \end{aligned}$$

Действительно, $\Gamma(D_+(A), \mathcal{O}) \subset R$, поскольку все элементы 0-компоненты $\text{AB}_{(A)}$ имеют вид $A^{-d}(g_1, \dots, g_n)$, где $(g_1, \dots, g_n) \in \text{AB}_d(n)$, а из явного описания AB (см. (1)) вытекает, что моном A^d входит не более чем в один из g_i , причем с коэффициентом ± 1 .

Для проверки включения $R \subset \Gamma(D_+(A), \mathcal{O})$ заметим, что если $(f_1, \dots, f_n) \in R(n)$, то $A^d(f_1(B/A), \dots, f_n(B/A)) \in \text{AB}_d(n)$ для некоторого d . При выборе такого d необходимо и достаточно обеспечить два условия: (1) отсутствие знаменателя у каждого из $A^d f_i(B/A)$ – для этого достаточно взять $d \geq \max(\deg f_i)$; (2) неравенство $a_j \leq \binom{d}{j}$, где a_j – коэффициент при $A^j B^{d-j}$ в полиноме $A^d(|f_1|(B/A) + \dots + |f_n|(B/A))$. Второе условие выполнено при больших d , поскольку с ростом d биномиальный коэффициент растет (при $j \neq 0$), а a_j нет.

Соответственно имеется вложение $\Gamma(D_+(B), \mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}[y]$, где $y = -A/B$. Аналогично проверяется, что $\Gamma(D_+(B), \mathcal{O})$ – прообраз \mathbb{F}_{1^2} при гомоморфизме $\mathbb{Z}[y] \rightarrow \mathbb{Z}$, $y \mapsto 0$. Иными словами,

$$\begin{aligned} \Gamma(D_+(B))(n) = & \{(f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{Z}[y]^n \mid \exists i \text{ такое, что} \\ & f_i(0) = 0, \pm 1, \text{ а } f_j(0) = 0 \text{ при } j \neq i\}. \end{aligned}$$

1.4. Кольцо $\Gamma(D_+(A + B), \mathcal{O})$. Вычислим $T = \Gamma(D_+(C), \mathcal{O})$, где $C = A + B$. В этом случае $T \subset \mathbb{Z}[t]$, где $t = A/C$, причем набору $C^{-d}(f_1, \dots, f_n) \in T(n)$ соответствует набор $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \in \mathbb{Z}[t](n)$, где $\bar{f}_i(t) = f_i(t, 1-t)$.

Далее для $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ символом f_ε обозначаем выражение $\varepsilon_1 f_1 + \dots + \varepsilon_n f_n$.

Пусть $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{Z}[t]$. Имеется следующий критерий принадлежности к T : $f \in T(n)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

1. $f_\varepsilon(\tau) \leq 1$ для всяких $\tau \in [0, 1]$ и $\varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$; (5)
2. если $f_\varepsilon(\tau) = 1$ для некоторых $\varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$
и $\tau \in (0, 1)$, то $f_\varepsilon = 1$.

В качестве следствия отметим, что $T(1)$ состоит из ± 1 и тех $f \in \mathbb{Z}[t]$, которые по модулю строго меньше единицы на открытом интервале $(0, 1)$.

Проверим необходимость условий (5). Предположим, что $f = \bar{g}$, где $g \in AB_d(n)$, $\varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$ и $\tau \in [0, 1]$. Пусть $g_m = \sum a_m(i, j)A^iB^j$ ($i + j = d$, $m = 1, \dots, n$). Тогда

$$f_\varepsilon(\tau) = \sum \varepsilon_m a_m(i, j) \tau^i (1 - \tau)^j \leq \sum \binom{d}{i} \tau^i (1 - \tau)^j = 1,$$

где неравенство вытекает из явного описания АВ (см. (1)) и неотрицательности τ и $1 - \tau$. Таким образом проверена необходимость первого условия. Отсюда же вытекает и необходимость второго условия, поскольку для $\tau \in (0, 1)$ приведенное неравенство не может обратиться в равенство ввиду положительности τ и $1 - \tau$.

Проверка достаточности (5) становится простой, если воспользоваться одним фактом из [3, решение задачи VI, 49]. А именно, рассмотрим полином $\alpha(z) \in \mathbb{R}[z]$. Если $\alpha(\zeta) > 0$ при $\zeta > 0$, то

найдется такое $d \geq 0$, что все коэффициенты
 $(1 + z)^d \alpha(z)$ неотрицательны. (6)

Перейдем к проверке достаточности условий (5). Пусть $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{Z}[t]^n$ – набор, удовлетворяющий этим условиям. Для каждого $\varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$ рассмотрим полином

$$h_\varepsilon(z) = (1 + z)^e \left(1 - f_\varepsilon\left(\frac{1}{1 + z}\right)\right), \quad e = \max \deg f_i.$$

Условие $f_\varepsilon(\tau) < 1$ для $\tau \in (0, 1)$ превращается в условие $h_\varepsilon(\zeta) > 0$ при $\zeta > 0$. Если $h_\varepsilon(\zeta) = 0$ для некоторого $\zeta > 0$, то положим $d(\varepsilon) = 0$. Если

$h_\varepsilon(\zeta) > 0$ для всех $\zeta > 0$, то пусть $d(\varepsilon)$ – число, удовлетворяющее (6) для $\alpha = h_\varepsilon$. Положим

$$d = \max d(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n.$$

Рассмотрим набор полиномов $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{Z}[A, B]^n$, где

$$g_i(A, B) = (A + B)^{e+d} f_i\left(\frac{A}{A + B}\right).$$

Так как $g_i(t, 1 - t) = f_i(t)$, то достаточность условий (5) будет следовать из того, что $g \in \text{AB}_{e+d}(n)$. Проверим это. Пусть

$$g_m = \sum_{i+j=d+e} b_{m,d}(i, j) A^i B^j.$$

Из явного описания АВ (см. (1)) вытекает, что $g \in \text{AB}_{d+e}(n)$ тогда и только тогда, когда для каждой пары (i, j) с условием $i + j = d + e$ и всякого $\varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$ выполнено неравенство

$$\binom{d+e}{i} - \sum_{m=1}^n \varepsilon_m b_{m,d}(i, j) \geq 0. \quad (7)$$

Заметим, что в левой части этого неравенства находится коэффициент при z^j полинома $(1+z)^d h_\varepsilon(z)$. Если $f_\varepsilon(\tau) < 1$ для всякого $\tau \in (0, 1)$, то все коэффициенты $(1+z)^d h_\varepsilon(z) = (1+z)^{d-d(\varepsilon)} (1+z)^{d(\varepsilon)} h_\varepsilon(z)$ неотрицательны по выбору $d(\varepsilon)$. Если же $f_\varepsilon(\tau) = 1$ для некоторого $\tau \in (0, 1)$, то $h_\varepsilon(z) = 0$, поскольку в этом случае $f_\varepsilon = 1$ по второму условию из (5).

Таким образом, завершена проверка неравенства (7) и, следовательно, проверка достаточности условий (5).

Отметим, что условия (5) в каждом конкретном случае позволяют эффективно (за конечное число шагов) распознавать принадлежность к $T = \Gamma(D_+(C), \mathcal{O})$. Для этого надо проверить конечное число неравенств и отсутствие нулей у некоторых полиномов на отрезке $[0, 1]$. Это можно сделать, например, методом Штурма.

В качестве примера рассмотрим полином Чебышева (приведенный к отрезку $[0, 1]$) $f(t) = 8t^2 - 8t + 1$. Этот полином не лежит в $T(1)$ (не выполнено второе условие из (5)), хотя его значение на $[0, 1]$ по модулю не превосходит 1.

В качестве другого примера рассмотрим $f(t) = 5t^2 - 4t$. В этом случае $f \in T(1)$ (условия (5) легко проверяются), однако явное нахождение d и $g \in \text{AB}_d(1)$, таких что $f = \bar{g}$, требует некоторых вычислений. При $d = 2, 3, 4, 5$ полином $(A + B)^d f(A/(A + B))$ не лежит в $\text{AB}_d(1)$. Только при $d = 6$ получаем полином с требуемыми ограничениями на коэффициенты.

Можно сказать, что $T(n)$ состоит из алгебраических (и даже “целочисленных”) путей в полиэдре $\mathbb{Z}_\infty(n)$, причем условия выхода этих путей на границу весьма жесткие: для всякой (замкнутой) грани Γ либо путь полностью живет на Γ , либо может выйти на Γ только на концах отрезка $[0, 1]$.

1.5. Кольцо $\Gamma(D_+(A - B), \mathcal{O})$. Вычислим $\Gamma(D_+(D), \mathcal{O})$, где $D = A - B$. В этом случае $\Gamma(D_+(D), \mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}[s]$, где $s = A/D$, причем набору $D^{-d}(f_1, \dots, f_n) \in \Gamma(D_+(D))(n)$ соответствует набор $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \in \mathbb{Z}[s](n)$, где $\bar{f}_i(s) = f_i(s, 1 - s)$.

Пусть $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{Z}[s]$. Утверждается, что $f \in \Gamma(D_+(D), \mathcal{O})(n)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. $f_\varepsilon(\sigma) \leq 1$ для всяких $\sigma \in [0, 1]$ и $\varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$;
 2. если $f_\varepsilon(\sigma) = 1$ для некоторых $\varepsilon \in [\mathbb{F}_{1^2}(1)]^n$ и $\sigma \in (0, 1)$, то $f_\varepsilon = 1$.
- (8)

Этот критерий выводится из критерия для $\Gamma(D_+(A + B), \mathcal{O})$ (см. 1.4) с помощью автоморфизма ι (см. 1.1), переставляющего $D_+(A + B)$ и $D_+(A - B)$.

1.6. Кольцо $\Gamma(D_+(A + B) \cap D_+(A - B), \mathcal{O}_X)$. Указанное в названии раздела кольцо является локализацией $T = \Gamma(D_+(A + B), \mathcal{O}_X)$ по элементу $(A - B)/(A + B) = 2t - 1$. Так как $T \subset \mathbb{Z}[t]$, то $R \subset \mathbb{Z}[t, (1 - 2t)^{-1}]$. Утверждается, что

$$\Gamma(D_+(A + B) \cap D_+(A - B), \mathcal{O}_X) = \nu^{-1}(\mathbb{F}_{1^2} \times \mathbb{F}_{1^2}),$$

где ν – гомоморфизм $\mathbb{Z}[t, (1 - 2t)^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f \mapsto f(0) \times f(1)$.

Действительно, левая часть содержится в правой, так как $\nu(T) \subset \mathbb{F}_{1^2} \times \mathbb{F}_{1^2}$ (вытекает из описания T в 1.4), а локализующий элемент $1 - 2t$ принимает значения ± 1 в точках $t = 0$ и $t = 1$. Обратное включение также легко выводится из описания T в 1.4, поскольку любая функция из $\mathbb{Z}[t, (1 - 2t)^{-1}]$, не превосходящая по модулю единицы на концах отрезка $[0, 1]$, домножением на некоторую степень $1 - 2t$ может быть сделана по модулю меньше единицы на открытом отрезке $(0, 1)$.

2. СХЕМНЫЕ ТОЧКИ

Здесь описаны схемные точки пространства \mathbf{P}^{AB} , причем это сделано только для унарной версии этого пространства. Иными словами, в данном разделе теорию локализации \mathcal{T} (см. начало §1) считаем унарной [1, 6.3.4].

Прежде всего опишем схемные точки \mathbf{P}^{AB} из дополнения к классической части $D_+(AB) = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ (см. 1.2).

2.1. Кольцо $AB/(AB \sim 0)$ и его проективный спектр. Пусть $R = AB/(AB \sim 0[2])$ и $\phi : AB \rightarrow R$ – естественная проекция.

Нам потребуется одна общая конструкция (см. [1, 6.6.33]). Пусть $\phi : A \rightarrow B$ гомоморфизм градуированных обобщенных колец. Рассмотрим в $\text{Proj } B$ открытую подсхему $D_+(\phi) = \cup D_+(\phi g)$, где g пробегает $\sqcup A_d(1)$ ($d > 0$). Тогда существует единственный морфизм $D_+(\phi) \rightarrow \text{Proj } A$ (далее обозначается ϕ^* и называется морфизмом, индуцированным ϕ), такой, что для всякого $g \in A_d(1)$ ($d > 0$) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} D_+(\phi g) & \xrightarrow{\phi_g^*} & D_+(g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_+(\phi) & \xrightarrow{\phi^*} & \text{Proj } A, \end{array}$$

где вертикальные стрелки – структурные вложения, а ϕ_g^* индуцирован морфизмом $\phi_g : [A_{(g)}]_0 \rightarrow [B_{(\phi g)}]_0$, происходящим из ϕ с помощью локализации (проверка этого утверждения не приводится). В частности, если $\phi : A \rightarrow B$ – строгий эпиморфизм градуированных колец, то есть для всех d и n отображение $\phi : A_d(n) \rightarrow B_d(n)$ сюръективно, то морфизм ϕ^* всюду определен, то есть отображает $\text{Proj } B$ в $\text{Proj } A$.

В нашей ситуации ϕ , будучи строгим эпиморфизмом, индуцирует морфизм $\phi^* : \text{Proj } R \rightarrow \mathbf{P}^{AB}$. Так как $\mathbf{P}^{AB} = D_+(AB) \cup D_+(A + B) \cup D_+(A - B)$ (см. 1.2), то

$$\text{Proj } R = D_+(\phi C) \cup D_+(\phi D). \quad (9)$$

Поэтому изучение $\text{Proj } R$ в значительной степени сводится к изучению $D_+(\phi C) = \text{Spec } R_{(\phi C)}$ и $D_+(\phi D) = \text{Spec } R_{(\phi D)}$.

Чтобы получить представление о $\text{Spec } R_{(\phi C)}$, изучим унарный спектр, то есть пространство простых идеалов кольца $R_{(\phi C)}$. Строгий

эпиморфизм $\phi : \text{AB} \rightarrow R$ индуцирует строгий эпиморфизм локализаций $\text{AB}_{(C)} \rightarrow R_{(\phi C)}$ и отождествление множеств

$$\text{Spec}^u R_{(\phi C)} \xrightarrow{\cong} P = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^u T \mid t(1-t) \in \mathfrak{p}\}, \quad (10)$$

где $T = \Gamma(D_+(C), \mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}[t]$, $t = A/C$, $t(1-t) = AB/C^2$ (см. 1.4). Утверждается, что упорядоченное множество P устроено следующим образом:

$$\mathfrak{p}^{t=0} \subset \mathfrak{p}_1^{t=0} \subset \cdots \subset \mathfrak{m}^{0 < t < 1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_1^{t=1} \supset \mathfrak{p}^{t=1}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^{0 < t < 1} &= \{f \in T(1) \mid |f(\tau)| < 1 \quad \text{для всех } \tau \in (0, 1)\}, \\ \mathfrak{p}^{t=0} &= \{f \in T(1) \mid f(0) = 0\}, \\ \mathfrak{p}^{t=1} &= \{f \in T(1) \mid f(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Кроме того, для $n = 1, 2, \dots$

$$\mathfrak{p}_n^{t=0} = \{f \in T(1) \mid -1 + t_0^n \leq f|_0 \leq 1 - t_0^n\}$$

и

$$\mathfrak{p}_n^{t=1} = \{f \in T(1) \mid -1 + t_1^n \leq f|_1 \leq 1 - t_1^n\},$$

где $t_0 = t$, $t_1 = 1 - t$, а отношение порядка \leq в $\mathbb{R}[[t_0]]$ (и в $\mathbb{R}[[t_1]]$) определено асимптотикой при приближении к соответствующей точке. Иными словами, $f < g$, если первый нетривиальный коэффициент $g - f$ положителен.

Очевидно, список (11) состоит из идеалов. Что касается простоты, то пояснений требует лишь случай $\mathfrak{p}_n^{t=0}$ при $n \geq 1$. Пусть $f, g \in T(1)$ и $fg \in \mathfrak{p}_n^{t=0}$. Надо проверить, что либо $f \in \mathfrak{p}_n^{t=0}$, либо $g \in \mathfrak{p}_n^{t=0}$. По очевидным причинам достаточно рассмотреть случай, когда $f(0) = g(0) = 1$. В этом случае $[\partial^i(fg)](0) = 0$ при $i < n$ и $[\partial^n(fg)](0) = \partial^n f(0) + \partial^n g(0) < 0$. Поэтому либо $\partial^n f(0) < 0$, либо $\partial^n g(0) < 0$ и, соответственно, либо $f \in \mathfrak{p}_n^{t=0}$, либо $g \in \mathfrak{p}_n^{t=0}$. Итак, простота $\mathfrak{p}_n^{t=0}$ проверена.

Таким образом, идеалы из списка (11) лежат в P , так как каждый из них содержит $t(1-t)$. Чтобы завершить описание P , следует показать, что произвольный $\mathfrak{p} \in P$ содержится в списке (11). Убедимся сначала, что

$$\text{либо } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^{t=0}, \quad \text{либо } \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^{t=1}. \quad (12)$$

Для этого достаточно показать [1, 2.13.3], что $f_0 f_1 \in \mathfrak{p}$ для всяких $f_0 \in \mathfrak{p}^{t=0}$, $f_1 \in \mathfrak{p}^{t=1}$. Положим $f = f_0 f_1$ и покажем, что $f^d \in \mathfrak{p}$ для некоторого d и, следовательно, $f \in \mathfrak{p}$. Так как $t(1-t) \in \mathfrak{p}$ по определению P , то достаточно показать, что $f^d = gt(1-t)$, где $g \in \mathbb{Z}[t]$ и $-1 < g < 1$ (здесь и ниже порядок на $\mathbb{Z}[t]$ определен так, что $f < g$ тогда и только тогда, когда $f(x) < g(x)$ для всякого $x \in (0, 1)$). Так как f_0 делится на t , а f_1 делится на $1-t$ по определению $\mathfrak{p}^{t=0}$ и $\mathfrak{p}^{t=1}$, то f делится на $t(1-t)$ в $\mathbb{Z}[t]$ и достаточно проверить, что для некоторого d выполнено неравенство $-t(1-t) < f^d < t(1-t)$. Это тотчас вытекает из критерия [4, 3.2]. Таким образом, (12) проверено.

Покажем теперь, что

$$\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{p}^{t=0} \Rightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1^{t=0}. \quad (13)$$

Покажем, прежде всего, что при $e \geq 0$ найдутся $u, v \in \mathfrak{p}$, такие что $u > 0, v > 0; u(0) = 1, v(0) = 0$, то есть $v \in \mathfrak{p}^{t=0}$; u и v взаимно просты в $\mathbb{Z}[t]$; $\text{ord}_1(1-v) \geq e$.

Действительно, возьмем произвольный $u_0 \in \mathfrak{p} - \mathfrak{p}^{t=0}$ и положим $u = (1-t)u_0^2 + t \cdot v_0$, где $v_0 = t$. Тогда $u \in \mathfrak{p}$, так как $u_0 \in \mathfrak{p}$, $v_0 \in \mathfrak{p}$ ($v_0 \in \mathfrak{p}^{t=0} \subset \mathfrak{p}$) и $(t, 1-t) \in T(2)$. Кроме того, $u(0) = u_0^2(0) > 0$ и, следовательно, $u(0) = 1$ ввиду целочисленности u и неравенства $u < 1$, вытекающего из того, что $u \in T(1), u \neq 1$. Отметим, что построенный элемент u обладает еще одним свойством: $u > 0$. Действительно, $u(x) \geq tv_0(x) = x^2 > 0$ для $x \in (0, 1)$. Положим $v = 1 - (1-t)^e u$. Тогда $v \in \mathfrak{p}^{t=0}$, так как $v(0) = 0$ и $0 < v < 1$ (здесь используем полученное выше неравенство $u > 0$). Взаимная простота u и v , а также неравенство $\text{ord}_1(1-v) \geq e$ очевидны. Таким образом, требуемые u и v существуют.

Пусть f – произвольный элемент $\mathfrak{p}_1^{t=0}$. Мы намерены показать, что $f \in \mathfrak{p}$. Если $f(0) = 0$, то $f \subset \mathfrak{p}^{t=0}$ по определению $\mathfrak{p}^{t=0}$ и, следовательно, $f \in \mathfrak{p}$, так как $\mathfrak{p}^{t=0} \subset \mathfrak{p}$ по условию. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $f(0) = \pm 1$. Более того, меняя знак, если требуется, видим, что достаточно рассмотреть случай $f(0) = 1$.

Для $e > \text{ord}_1(1-f)$ найдем u и v с вышеуказанными свойствами и проверим, что найдется d , такой что

$$f^d \quad \text{принадлежит идеалу в } T, \quad \text{порожденному} \quad u \quad \text{и} \quad v. \quad (14)$$

Этого будет достаточно для доказательства (13) ввиду простоты \mathfrak{p} и того, что $u, v \in \mathfrak{p}$. Покажем, что (14) выполнено для всех достаточно

больших d . Для этого сведем (14) к некоторой задаче выпуклой целочисленной интерполяции [4].

Для кольца $A = \mathbb{Z}[t]$ рассмотрим A -модуль A^2 , гомоморфизм $\phi : A^2 \rightarrow A$, $(y, z) \mapsto yu + zv$ и Af_A -модуль $F = \{m \in A^2 \mid \phi m = f^d\}$. Ввиду взаимной простоты u и v этот Af_A -модуль изоморден A . Итак, выберем произвольное аффинное вложение $\psi : A \rightarrow A^2$, образ которого совпадает с F . Значение $\psi(x)$ при произвольном вещественном x задает, таким образом, аффинное вложение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Положим $X = [0, 1]$ и рассмотрим в $X \times \mathbb{R}$ семейство выпуклых множеств M , определенное как $\{(x, y) | \psi(x)(y) \in B\}$, где $B \subset \mathbb{R}^2$ задано системой неравенств $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 < 1$ при $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ пробегающем $\mathbb{F}_{12}(1)^2$.

Ввиду описания $T(2)$ в 1.6 утверждение (14) равносильно тому, что найдется d , для которого разрешима целочисленная задача интерполяции, связанная с M . Покажем, что это так для всех достаточно больших d .

Согласно [4, 2.3] для этого достаточно проверить локальную разрешимость задачи целочисленной интерполяции в каждой точке X .

Проверим локальную разрешимость в точке $x = 0$ с помощью критерия [4, 2.1]. Пусть \widehat{F}_0 – расширение скаляров F при гомоморфизме $Af_A \rightarrow Af_{\mathbb{Z}[[t_0]]}$, $t \mapsto t_0$. Тривиализуем \widehat{F}_0 , то есть выберем изоморфизм $Af_{\mathbb{Z}[[t_0]]}$ -модулей $\alpha : \mathbb{Z}[[t_0]] \rightarrow \widehat{F}_0$, следующим образом. Так как $u(0) = 1$ и $v(0) = 0$, то $u + v$ – обратимо в $\mathbb{Z}[[t_0]]$. Положим

$$\alpha(s) = \left(\frac{f^d - sv}{u + v}, \frac{su - f^d}{u + v} \right) \in \mathbb{Z}[[t_0]]^2 = M(X) \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbb{Z}[[t_0]].$$

Включение $\alpha(\mathbb{Z}[[t_0]]) \subset \widehat{F}_0$ очевидно. Обратное включение вытекает из регулярности пары (u, v) , точности соответствующего комплекса Кошуля и плоскости $\mathbb{Z}[[t_0]]$ над $\mathbb{Z}[t]$. С помощью α система неравенств $\psi_\varepsilon < 0$, определяющая M , превращается в систему неравенств

$$\varepsilon_1(f^d - sv) + \varepsilon_2(su - f^d) < u + v \quad \text{на} \quad \mathbb{Z}[[t_0]]. \quad (15)$$

Эта система имеет решение $s = 1$. Действительно, так как $\text{ord}_0(1 - u) > 0$ и $f \in \mathfrak{p}_1^{t=0}$, то $u > f^d$ в $\mathbb{Z}[[t_0]]$ при достаточно больших d . Кроме того, $f(0) = 1 > v(0) = 0$ и, стало быть, $v < f^d < u$. Отсюда, с учетом неравенства $v > 0$, вытекает (15) для $s = 1$.

Проверим локальную разрешимость в точке $x = 1$ с помощью критерия [4, 2.1]. Пусть \widehat{F}_1 – расширение скаляров F при гомоморфизме

$\text{Af}_A \rightarrow \text{Af}_{\mathbb{Z}[[t_1]]}$, $t \mapsto 1 - t_1$. Тривиализуем \widehat{F}_1 , то есть выберем изоморфизм $\text{Af}_{\mathbb{Z}[[t_1]]}$ -модулей $\alpha : \mathbb{Z}[[t_1]] \rightarrow \widehat{F}_1$, полагая $\alpha(s) = (sv, v^{-1}f^d - su)$. Так как $\text{ord}_1(1 - v) \geq e > \text{ord}_1(1 - f)$, то v обратимо в $\mathbb{Z}[[t_1]]$ — это доказывает корректность определения α . Включение $\alpha(\mathbb{Z}[[t_1]]) \subset \widehat{F}_1$ очевидно. Обратное включение вытекает из регулярности пары (u, v) , точности соответствующего комплекса Кошуля и плоскости $\mathbb{Z}[[t_1]]$ над $\mathbb{Z}[t]$. С помощью α система неравенств, определяющая M , превращается в систему неравенств

$$\varepsilon_1 sv^2 + \varepsilon_2(f^d - suv) < v \quad \text{на } \mathbb{Z}[[t_1]]. \quad (16)$$

Эта система имеет решение $s = 0$. Действительно, так как $\text{ord}_1(1 - v) \geq e > \text{ord}_1(1 - f)$, то $v > \pm f^d$ в $\mathbb{Z}[[t_1]]$. Отсюда вытекает (16) для $s = 0$.

Проверим локальную разрешимость в точке $x \in (0, 1)$ с помощью критерия [4, 2.1]. Эта разрешимость равносильна тому, что $f^d(x)$ представимо октаэдральной комбинацией $u(x)$ и $v(x)$. Представимость вытекает из того, что $u(x) > 0$ и $f^d(x) \rightarrow 0$ при d , стремящемся к бесконечности, так как $|f(x)| < 1$.

Таким образом, доказаны утверждения (14) и (13).

Покажем теперь, что

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_n^{t=0} \Rightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_{n+1}^{t=0}. \quad (17)$$

Покажем, прежде всего, что при $e \geq 0$ найдутся $u, v \in \mathfrak{p}$, такие что $u > 0, v > 0; u \geq 1 - at_0^{n+1}$ в $\mathbb{Z}[[t_0]]$ для некоторого $a > 0, v(0) = 0$, то есть $v \in \mathfrak{p}^{t=0}$; u и v взаимно просты в $\mathbb{Z}[t]$; $\text{ord}_1(1 - v) \geq e$.

Действительно, возьмем произвольный $u_0 \in \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_n^{t=0}$ и положим $u = (1 - t^{n+1})u_0^2 + t^{n+1} \cdot v_0$, где $v_0 = t$. Тогда $u \in \mathfrak{p}$, так как $u_0 \in \mathfrak{p}$, $v_0 \in \mathfrak{p}$ ($v_0 \in \mathfrak{p}^{t=0} \subset \mathfrak{p}$) и $(t^{n+1}, 1 - t^{n+1}) \in T(2)$. Неравенство $u \geq 1 - at_0^{n+1}$ в $\mathbb{Z}[[t_0]]$ с $a > 0$ вытекает из того, что $u_0 \notin \mathfrak{p}_n^{t=0}$. Отметим, что построенный элемент u обладает еще одним свойством: $u > 0$. Действительно, $u(x) \geq tv_0(x) = x^2 > 0$ для $x \in (0, 1)$. Положим $v = 1 - (1 - t)^e u$. Тогда $v \in \mathfrak{p}^{t=0}$, так как $v(0) = 0$ и $0 < v < 1$ (здесь используем полученное выше неравенство $u > 0$). Взаимная простота u и v , а также неравенство $\text{ord}_1(1 - v) \geq e$ очевидны. Таким образом, требуемые u и v существуют.

Пусть f — произвольный элемент $\mathfrak{p}_{n+1}^{t=0}$. Мы намерены показать, что $f \in \mathfrak{p}$. Если $f(0) = 0$, то $f \subset \mathfrak{p}^{t=0}$ по определению $\mathfrak{p}^{t=0}$ и, следовательно, $f \in \mathfrak{p}$, так как $\mathfrak{p}^{t=0} \subset \mathfrak{p}$ по условию. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $f(0) = \pm 1$. Более того, меняя знак, если требуется, видим, что достаточно рассмотреть случай $f(0) = 1$.

Для $e > \text{ord}_1(1 - f)$ найдем u и v с вышеуказанными свойствами и проверим, что найдется d , такой что f^d принадлежит идеалу в T , порожденному u и v . Этого будет достаточно для доказательства (17) ввиду простоты \mathfrak{p} и того, что $u, v \in \mathfrak{p}$. Проверка этого утверждения аналогична проверке (14) и не приводится. Таким образом, утверждение (17) доказано.

Кроме того, очевидно, что $\mathfrak{m}^{0 < t < 1}$ – единственный максимальный элемент P (следует из описания $\mathfrak{m}^{0 < t < 1} = T(1) - \{\pm 1\}$, вытекающего из критерия (5) в 1.4), и что

$$\bigcup \mathfrak{p}_n^{t=0} = \mathfrak{m}^{0 < t < 1}. \quad (18)$$

Утверждения (12), (13), (17) и (18) (а также аналогичные утверждения для точки $x = 1$) доказывают полноту списка простых идеалов (11).

Чтобы получить представление о $\text{Spec } R_{(\phi D)}$ (см. (9) и ниже), изучим унарный спектр кольца $R_{(\phi D)}$. Его описание получается из рассмотренного C -случая (см. (10)) с помощью симметрии ι (см. 1.1), переставляющей $D_+(A+B)$ и $D_+(A-B)$. Приведем результат. Гомоморфизм $\phi : AB \rightarrow R$ индуцирует отождествление множеств

$$\text{Spec}^u R_{(\phi D)} \xrightarrow{\sim} P = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^u S \mid s(1-s) \in \mathfrak{p}\},$$

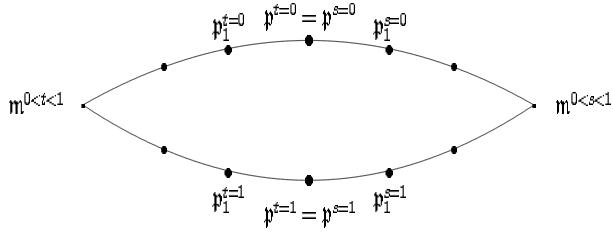
где $S = \Gamma(D_+(D), \mathcal{O}) \subset \mathbb{Z}[s]$, $s = A/D$, $s(1-s) = -AB/D^2$ (см. 1.4). Утверждается, что упорядоченное множество P устроено следующим образом:

$$\mathfrak{p}^{s=0} \subset \mathfrak{p}_1^{s=0} \subset \cdots \subset \mathfrak{m}^{0 < s < 1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_1^{s=1} \supset \mathfrak{p}^{s=1}, \quad (19)$$

где все идеалы определены, как и в (11), с заменой t на s .

Для описания точек (унарной версии) пространства $\text{Proj } R$ (см. (9)) осталось описать $D_+(\phi C) \cap D_+(\phi D)$. Реализация этого пространства как подпространства в $D_+(\phi C)$ представляет собой спектр кольца $R_{(\phi C)}$, локализованного обращением $D/C = 2t - 1$. Этот элемент лежит во всех идеалах списка (11), кроме $\mathfrak{p}^{t=0}$ и $\mathfrak{p}^{t=1}$. Поэтому $D_+(\phi C) \cap D_+(\phi D)$ состоит из двух точек, которые в списке (11) указаны как $\mathfrak{p}^{t=0}$ и $\mathfrak{p}^{t=1}$, а в списке (19) как $\mathfrak{p}^{s=0}$ и $\mathfrak{p}^{s=1}$, соответственно. Таким образом, пространство $\text{Proj } R$ (унарная версия) может быть

представлено картинкой



2.1.1. Вещественная версия кольца $AB/(AB \sim 0)$. Пусть $T_{\mathbb{R}}$ – обобщенное подкольцо $\mathbb{R}[t]$, выделенное теми же неравенствами, что и подкольцо $T \subset \mathbb{Z}[t]$ (см. (5) в (4), $P = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}^u T_{\mathbb{R}} | t(1-t) \in \mathfrak{p}\}$) (интерес к этому множеству пояснен в 2.1). Утверждается, что упорядоченное множество P устроено следующим образом:

$$\mathfrak{p}^{t=0} \subset \mathfrak{p}_0^{t=0} \subset \mathfrak{p}_1^{t=0} \subset \cdots \subset \mathfrak{m}^{0 < t < 1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_1^{t=1} \supset \mathfrak{p}_0^{t=1} \supset \mathfrak{p}^{t=1}, \quad (20)$$

где $\mathfrak{m}^{0 < t < 1}$, $\mathfrak{p}^{t=0}$ и $\mathfrak{p}^{t=1}$ описываются точно так же, как и в 2.1. Описание идеалов $\mathfrak{p}_n^{t=0}$ и $\mathfrak{p}_n^{t=1}$ при $n \geq 1$ требует некоторой модификации, а именно $\mathfrak{p}_n^{t=0}$ состоит из тех $f \in T_{\mathbb{R}}(1)$ для которых найдется $\lambda > 0$, так что $-1 + \lambda t_0^n \leq f \leq 1 - \lambda t_0^n$ в $\mathbb{R}[[t_0]]$ (в \mathbb{Z} -случае всегда можно взять $\lambda = 1$) и аналогично для $\mathfrak{p}_n^{t=1}$.

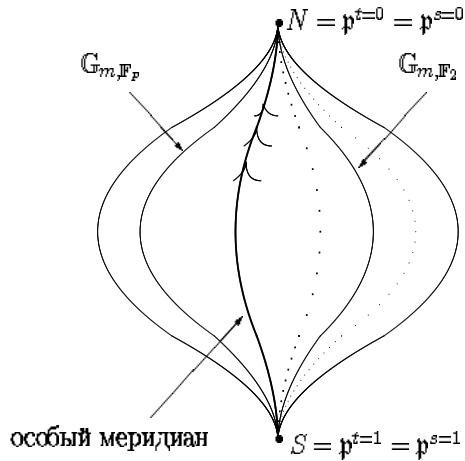
Наконец, идеалы $\mathfrak{p}_0^{t=0}$ и $\mathfrak{p}_0^{t=1}$ не имеют аналогов в \mathbb{Z} -случае (значение целочисленного полинома в нуле – целое число и не может лежать строго между нулем и единицей) и описываются следующим образом:

$$\mathfrak{p}_0^{t=0} = \{f \in T(1) | |f(0)| < 1\}, \quad \mathfrak{p}_0^{t=1} = \{f \in T(1) | |f(1)| < 1\}.$$

Проверка полноты списка (20) может быть выполнена методами, аналогичными использованными в 2.1, и здесь не приводится.

2.1.2. Одна из распространенных точек зрения на (алгебраическую) геометрию состоит в том, что полезно рисовать изучаемые пространства. Некоторое представление о \mathbf{P}^{AB} можно получить с помощью

изображения поверхности луковицы.



Наиболее понятная часть этой картинки представляет собой классическое пространство $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}} = D_+(A) \cap D_+(B) = D_+(AB)$. Чтобы увидеть $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ на картинке, нужно из поверхности луковицы выбросить особый меридиан (включая его “невидимую” часть, выделенную пунктиром). Оставшаяся часть разбита на дважды проколотые кругосветные меридианы, каждый из которых изображает “окружность” $\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_p}$ для некоторого простого p .

Обобщенная подсхема $D_+(A)$ представлена на картинке объединением $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ и S . Эту подсхему можно представлять себе как результат стягивания в точку S кривой $\text{Spec } \mathbb{Z}$, заданной уравнением $x = 0$ в схеме $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec } \mathbb{Z}[x]$. Соответственно, обобщенная подсхема $D_+(B)$ представлена на картинке объединением $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ и N . Эту подсхему можно представлять себе как результат стягивания в точку N кривой $\text{Spec } \mathbb{Z}$, заданной уравнением $y = 0$ в схеме $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 = \text{Spec } \mathbb{Z}[y]$, $y = -1/x$.

Особый меридиан представляет собой обобщенную схему $\text{Proj } AB / (AB \sim 0)$. Это пространство изучено в 2.1 и представляет собой особенность типа “черная дыра” (пространство \mathbf{P}^{AB} настолько уплотняется при приближении к особенности $\text{Proj } AB / (AB \sim 0)$, что размерность \mathbf{P}^{AB} подскакивает внутри особенности). Более простой пример особенности такого типа имеется в [1, 7.1.15]).

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Durov, *New Approach to Arakelov Geometry*. arXiv: 0704.2030 v1 [math AG] 16 Apr (2007).
2. А. Л. Смирнов, *Градуированные монады и кольца полиномов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2007), 174–210.
3. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*. — Наука, М. (1978).
4. А. Л. Смирнов, *Одна задача выпуклой целочисленной интерполяции*. — Этот том.

Smirnov A. L. Binary projective space.

A study of a generalized projective scheme closely related to the binary projective space $\mathbf{P}^{(2)} = \text{Proj } \mathbb{F}_0[t]$, where t is a free binary variable, is started. In particular, the global sections of the structure sheaf on elements of certain affine covering are computed and the scheme point of the unary version are described.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: smirnov@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2008 г.