Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

А. В. Прокопчук, В. И. Янчевский

О ДРУГОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ Б. СУРИ

1. Введение

Пусть K — поле характеристики, отличной от 2. Среди односвязных простых K-определённых K-анизотропных групп G типа A_m наибольший интерес с точки зрения изучения нормального строения их групп G_K K-рациональных точек вызывают группы G, для которых G_K могут быть реализованы в качестве специальных линейных и специальных унитарных групп над некоммутативными алгебрами с делением. Более точно, пусть $A/Z(A)$ – некоммутативная (конечномерная) центральная $Z(A)$-алгебра с делением, A^* (соответственно $Z(A)^*$) – мультипликативная группа A (соответственно $Z(A)$) и $\mathrm{Nrd}_A : A^* \longrightarrow Z(A)^*$ – гомоморфизм приведенной нормы.

Определение 1. *Специальной линейной группой называется группа*

$$\mathrm{SL}(1, A) = \{d \in A^* \mid \mathrm{Nrd}_A(d) = 1\}.$$

Хорошо известно, что эта группа может рассматриваться как группа G_K (где $K = Z(A)$) некоторой простой анизотропной алгебраической K-группы типа ${}^1A_{n-1}$, где n – индекс алгебры A (т.е. $n^2 = \dim_K A$).

Предположим дополнительно, что алгебра A снабжена инволюцией второго рода τ (т.е. такой, что её ограничение на центр $Z(A)$ нетривиально) и k – поле инвариантов τ в $Z(A)$.

Определение 2. *Унитарной группой алгебры A относительно τ называется группа*

$$U(A, \tau) = \{d \in A^* \mid dd^\tau = 1\},$$

а специальной унитарной группой алгебры A относительно τ называется группа

$$\mathrm{SU}(A, \tau) = \mathrm{SL}(1, A) \cap U(A, \tau).$$

Эта группа может быть реализована как группа G_k k-рациональных точек подходящей простой анизотропной алгебраической k-группы G типа ${}^2A_{n-1}$. В то время, как о нормальном строении групп $\mathrm{SL}(1,A)$ известно довольно много (по крайней мере, в случае глобальных полей k [1]), о нормальном строении групп $\mathrm{SU}(A,\tau)$ почти ничего не известно. В случае групп $\mathrm{SL}(1,A)$ для алгебр над глобальными полями отправной точкой исследований их нормального строения, как известно, послужила теорема С. Уонга [2] о совпадении $\mathrm{SL}(1,A)$ и коммутанта $[A^*,A^*]$ группы A^*.

Замечание 1. Оригинальное доказательство Уонга было достаточно длинным, по поводу короткого см. [3].

В случае специальных унитарных групп при исследовании нормального строения естественно начинать с выяснения вопроса о совпадении группы $\mathrm{SU}(D,\tau)$ и коммутанта $[U(A,\tau),U(A,\tau)]$ группы $U(A,\tau)$. Для произвольных полей K хорошо известно, что факторгруппа

$$\mathrm{SK}_1(A)=\mathrm{SL}(1,A)/[A^*,A^*]$$

вообще говоря, нетривиальна [4]. Что касается факторгруппы

$$\mathrm{SUK}_1^{an}(A,\tau)=\mathrm{SU}(A,\tau)/[U(A,\tau),U(A,\tau)],$$

то вопрос о её нетривиальности в более или менее общей ситуации до недавнего времени не обсуждался. В 2005 году в [5] Б. Сетураман и Б. Сури показали, что для произвольного $n>3$ и $k=\mathbb{Q}(\varepsilon_n)(x)$, где ε_n – примитивный корень степени n из единицы, существуют алгебры A индекса n и инволюции τ, для которых группа $\mathrm{SUK}_1^{an}(A,\tau)$ бесконечна. Таким образом, возможность того, что группа $\mathrm{SUK}_1^{an}(A,\tau)$ тривиальна для более или менее широкого класса полей и алгебр по-прежнему сохранялась лишь для алгебр кватернионов в случае глобальных полей. Однако в [6] Сури показал, что существуют алгебры кватернионов над глобальными полями, для которых эта группа также нетривиальна, но для алгебр с делением других индексов над глобальными полями проблема тривиальности по-прежнему остаётся открытой. Цель статьи – предложить другое доказательство основной теоремы из [6], идеи которого, как нам кажется, позволят рассмотреть и ситуацию алгебр произвольных индексов.

Основной идеей доказательства этой теоремы является использование разложения

$$A\cong D\otimes_k K,$$

где D/k – кватернионная алгебра и ограничение τ на D есть обычное кватернионное сопряжение, а также установление изоморфизма

$$\mathrm{SUK}_1^{an}(A,\tau) \cong \mathrm{SL}(1,D)/[S,S], \tag{1}$$

где $S = \{s \in D^* \mid \mathrm{Nrd}_D(s) \in N_{K/k}(K^*)\}$, $N_{K/k} : K^* \longrightarrow k^*$ – норменный гомоморфизм мультипликативных групп расширения полей K/k, с последующим применением теоремы Маргулиса [7], описывающей нормальное строение группы $\mathrm{SL}(1,A)$. Использование этой теоремы приводит к тому, что рассуждения Сури (достаточно элегантные, простые и несложные) на самом деле, опираются на утверждение, доказательство которого использует глубокий и сложный арсенал технических средств. В этой ситуации возникает естественное желание при доказательстве теоремы Сури обойтись более простыми соображениями, которые могли бы оказаться полезными и в ситуации алгебр произвольных индексов. Предлагаемое ниже доказательство этой теоремы, возможно, послужит этой цели.

2. Специальные образующие мультипликативных групп кватернионных алгебр с делением над глобальными полями

Пусть k – поле с дискретным нормированием (по поводу нормирований в кольцах, телах и т.п см. §3, гл. 6 [8]). Положим $R_v = \{x \in k \mid v(x) \geqslant 0\}$ – кольцо нормирования v, $\mathfrak{p}_v = \{x \in k \mid v(x) > 0\}$ – идеал нормирования v, $U_v = R_v \setminus \mathfrak{p}_v = \{x \in k \mid v(x) = 0\}$ – единицы кольца R_v, $\overline{k}_v = R_v/\mathfrak{p}_v$ – поле вычетов нормирования v. Для всякого элемента $r \in R_v$ через $\overline{r}_v$ ниже будет обозначаться образ r в поле вычетов $\overline{k}_v$, $1+\mathfrak{p}_v = \{x \in R_v \mid \overline{x}_v = 1\}$. Всякая образующая π идеала $\mathfrak{p}_v$ называется униформизующей кольца R_v.

Пусть k – глобальное поле. Ниже через V_k обозначается множество всех его попарно неэквивалентных нормирований (дискретных V_f и архимедовых V_∞ (по поводу архимедовых нормирований см., например, §2 [9])). Таким образом, $V_k = V_f \cup V_\infty$. Через k_v будем обозначать пополнение поля k относительно $v \in V_k$. Для центральной простой конечномерной алгебры с делением D/k положим

$$V_D = \{v \in V_k \mid D_v = D \otimes_k k_v \text{ алгебра с делением}\},$$

$$T = V_D \cap V_f.$$

Отметим, что V_D и T – конечные множества. Для всякой алгебры с делением D_v/k_v $(v \in T)$ v однозначно продолжается до нормирования w на D_v по формулам

$$w(0) = \infty,$$

$$w(d) = \frac{1}{n} v(\mathrm{Nrd}_{D_v}(d)), d \in D_v^*, n^2 = [D_v : k_v].$$

Таким образом, группа значений нормирования w совпадает с $\{\frac{1}{n}\mathbb{Z}\} \cup \{\infty\}$. Ввиду однозначности продолжения v до w ниже w будет обозначаться той же буквой v. Ограничение v на D приводит к следующим объектам:

$$U_D = \{d \in D \mid v(d) = 0 \ \forall v \in T\},$$

$$1 + \mathfrak{p}_D = \{d \in D \mid \overline{d}_v = 1 \ \forall v \in T\}.$$

Пусть теперь $\mathrm{char}\, k \neq 2$ и K/k – квадратичное расширение полей, $K = k(\sqrt{\alpha})$. Далее, множество T может быть представлено в виде $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, где T_i определяются следующим образом:

1) T_1 состоит из тех нормирований v, для которых $K \otimes_k k_v/k_v$ неразветвлено и алгебра D_v нетривиальна;

2) T_2 состоит из тех нормирований v, для которых $K \otimes_k k_v/k_v$ вполне разветвлено, $\mathrm{char}\, \overline{k}_v \neq 2$ и алгебра D_v нетривиальна;

3) T_3 состоит из тех нормирований v, для которых $K \otimes_k k_v/k_v$ вполне разветвлено, $\mathrm{char}\, \overline{k}_v = 2$ и алгебра D_v нетривиальна;

4) T_4 состоит их тех нормирований v, для которых $K \otimes_k k_v$ – не поле.

Как и во введении, положим $S = \{d \in D^* \mid \mathrm{Nrd}_D(d) \in N_{K/k}(K^*)\}$.

Замечание 2. Ниже мы будем считать, что для любого $v \in T$ $v(\alpha) \in \{0, 1\}$.

Легко видеть, что это не ограничивает нас в общности.

В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть D/k – кватернионная алгебра с делением. Тогда в D существуют элементы Π_i, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $v_i(\Pi_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$ *для любого* $v_i \in T$;

2) $\Pi_i \in S$ *для любого* $v_i \in T \setminus T_1$;

3) *элементы* Π_i *и* Π_j *коммутируют между собой для любых* i, j.

Доказательство. Для каждого нормирования $v_i \in T_2 \cup T_3$ рассмотрим вполне разветвлённое расширение $L_{v_i} = K \otimes_k k_{v_i}$ поля k_{v_i}, а

для $v_i \in T_1 \cup T_4$ рассмотрим произвольное вполне разветвлённое расширение полей L_{v_i}/k_{v_i}. Легко видеть, что для любого нормирования $v_i \in T \setminus T_1$ существует униформизующий элемент $\widetilde{\pi}_i$ со свойством $\widetilde{\pi}_i = \widetilde{x}_i^2 - \alpha\widetilde{y}_i^2$, где $\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i \in k_{v_i}$. В самом деле, если $v_i \in T_4$, то форма $x^2 - \alpha y^2$ представляет любой элемент поля k_{v_i}, в частности, и элемент $\widetilde{\pi}_i$. Если $v_i \in T_2 \cup T_3$, то во множестве $N_{L_{v_i}/k_{v_i}}(L_{v_i}^*)$ лежит некоторый элемент π_i с нормированием 1. Так как $L_{v_i} = K \otimes_k k_{v_i}$, то $L_{v_i} = k_{v_i}(\sqrt{\alpha})$ и потому для некоторых элементов $\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i$ из поля k_{v_i} имеем $\widetilde{\pi}_i = \widetilde{x}_i^2 - \alpha\widetilde{y}_i^2$. Зафиксируем элемент $\widetilde{\pi}_i$ вида $\widetilde{x}_i^2 - \alpha\widetilde{y}_i^2$ для каждого v_i. Рассмотрим в k элементы x_i и y_i, достаточно близкие к элементам $\widetilde{x}_i$, и $\widetilde{y}_i$ соответственно относительно нормирования v_i, а по другим нормированиям из V_D пусть элементы x_i (соответственно y_i) будут близки к 1 (соответственно, к 0). Обозначим через π_i элемент $x_2^2 - \alpha y_i^2$. Заметим, что $v_i(\pi_j) = \delta_{ij}$, при этом, в любом из архимедовых нормирований элемент π_i близок к 1, а потому положителен. В случае $v_i \in T_1$ рассмотрим произвольный элемент $\pi_i \in k$ с нормированием 1, который по другим нормированиям из V_D близок к 1.

Рассмотрим далее конечнопорождённую группу $\Gamma = \langle \pi_1, \ldots, \pi_r \rangle$, где π_i соответствует всем нормированиям $v_i \in V_D$. В силу следствия 4 из теоремы [10] (в качестве множества S следует рассмотреть V_D) существует в D подполе L степени 2 над k такое, что $\Gamma \subset N_{L/k}(L^*)$. В самом деле, для любого нормирования v_i элемент $\pi_i \in N_{L_{v_i}/k_{v_i}}(L_{v_i})$. Выберем для каждого π_i некоторый элемент $\Pi_i \in L$ такой, что $N_{L/k}(\Pi_i) = \pi_i = \mathrm{Nrd}_D(\Pi_i)$. Значит, $v_i(\Pi_j) = 1/2 \cdot \delta_{ij}$. Так как $\pi_i = x_i^2 - \alpha y_i^2$ при $v_i \in T \setminus T_1$, то $\Pi_i \in S$ в случае, когда $v_i \in T \setminus T_1$.

Лемма 2. *Для каждого $v_i \in T$ существуют элементы $Z_i \in U_D$ со свойствами:*

1) $(\overline{Z_i})_{v_i}$ *– образующая группы* $\overline{D}_{v_i}^*$;
2) $(\overline{Z_i})_{v_j} = 1$ *при* $i \neq j$ *для любого* $v_j \in T$;
3) *Если* $v_i \in T_3 \cup T_4$, *то* $Z_i \in S$;
4) *Если* $v_i \in T_2$, *то* $Z_i^2 \in S$.

Доказательство. Пусть $v_i \in T_4$. Тогда элемент α – квадрат в k_{v_i}, и потому $v_i(\alpha) = 0$. Значит, форма $x^2 - \overline{\alpha}y^2$ изотропна над $\overline{k}_{v_i}$ и потому представляет любой элемент из $\overline{k}_{v_i}$. В частности, существуют элементы $\overline{x}_i, \overline{y}_i \in \overline{k}_{v_i}$ такие, что $N_{\overline{D}_{v_i}/\overline{k}_{v_i}}(\theta_i) = \overline{x}_i^2 - \overline{\alpha} \cdot \overline{y}_i^2$, где θ_i – образующая группы $\overline{D}_{v_i}^*$. Для $v_i \in T_3$ ввиду $\mathrm{char}\, \overline{k}_{v_i} = 2$ существует $\eta \in \overline{D}_{v_i}^*$ со свойством $\eta^2 = \theta_i$, причем θ_i – образующая группы $\overline{D}_{v_i}^*$.

Следовательно, $N_{\overline{D}_{v_i}/\overline{k}_{v_i}}(\theta_i) = N_{\overline{D}_{v_i}/\overline{k}_{v_i}}(\eta)^2 - \overline{\alpha}\cdot 0^2$. Таким образом, при $v_i \in T_3 \cup T_4$ норма образующей θ_i группы $\overline{D}^*_{v_i}$ представляется в виде $\overline{x}_i^2 - \overline{\alpha}\cdot\overline{y}_i^2$, где $\overline{x}_i, \overline{y}_i \in \overline{k}_{v_i}$.

Рассмотрим в k_{v_i} элементы $\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i$ с редукциями соответственно $\overline{x}_i, \overline{y}_i$ и обозначим через $\widetilde{\theta}_i$ элемент $\widetilde{x}_i^2 - \alpha\cdot\widetilde{y}_i^2$. По слабой аппроксимационной теореме в k существуют элементы x_i, y_i, близкие к $\overline{x}_i, \overline{y}_i$ соответственно относительно нормирования v_i, а по другим нормированиям, из V_D, близкие к 1 и 0 соответственно. Положим через $R_i = x_i^2 - \alpha\cdot y_i^2$. Так как относительно всех вещественных нормирований этот элемент близок к 1 (значит, положителен), то в D найдется элемент W_i, такой, что $\mathrm{Nrd}_{D/k}(W_i) = R_i$ [1].

Далее, легко видеть, что $W_i \in S$. Заметим также, что для элемента $(\overline{W}_i)_{v_i} \in \overline{D}_{v_i}$ справедливы соотношения

$$N_{\overline{D}_{v_i}/\overline{k}_{v_i}}((\overline{W}_i)_{v_i}) = (\overline{\mathrm{Nrd}_{D/k}(W_i)})_{v_i} = \overline{x}_i^2 - \overline{\alpha}\cdot\overline{y}_i^2 = N_{\overline{D}_{v_i}/\overline{k}_{v_i}}(\theta_i).$$

Следовательно, $(\overline{W}_i)_{v_i} = \theta_i\cdot\widetilde{S}_i$, где $\widetilde{S}_i \in \mathrm{SL}(1,\overline{D}_{v_i})$. Рассмотрим элемент $S_i \in \mathrm{SL}(1, D_{v_i})$ такой, что $(\overline{S_i})_{v_i} = \widetilde{S}_i$ (такой существует ввиду [11]). Для $i \neq j$ редукция $(\overline{\mathrm{Nrd}_{D/k}(W_i)})_{v_j}$ элемента $\mathrm{Nrd}_{D/k}(W_i)$ равна 1. Стало быть, $\mathrm{Nrd}_{D/k}(W_i) \in 1 + \mathfrak{p}_{v_j}$. Так как $\mathrm{Nrd}^{-1}_{D_{v_j}/k_{v_j}}(1+\mathfrak{p}_{v_j}) = 1 + \mathfrak{p}_{D_{v_j}}$, то в группе $1 + \mathfrak{p}_{D_{v_j}}$ существует элемент P_j такой,что $S_j = W_i\cdot {P_j}^{-1} \in \mathrm{SL}(1, D_{v_j})$. По слабой аппроксимационной теореме для группы $\mathrm{SL}(1,D)$ (см., например, гл. 7, лемма 2 из [1]) существует элемент $H \in \mathrm{SL}(1,D)$, близкий к S_i относительно нормирования v_i. Для элемента $Z_i = W_i\cdot H^{-1} \in S$ имеют место следующие соотношения:

$$(\overline{Z}_i)_{v_i} = (\overline{W_i\cdot H^{-1}})_{v_i} = (\theta_i\cdot\widetilde{S}_i)(\overline{H})^{-1}_{v_i} = (\theta_i\cdot\widetilde{S}_i)\widetilde{S}_i^{-1} = \theta_i,$$

т.е. $(\overline{Z}_i)_{v_i}$ – образующая группы $\overline{D}_{v_i}$. Далее,

$$(\overline{Z}_i)_{v_j} = (\overline{W_i\cdot H^{-1}})_{v_j} = (\overline{W}_i)_{v_j}(\overline{H})^{-1}_{v_j} = (\overline{S_jP_j})_{v_j}(\overline{S}_i)^{-1}_{v_j} = 1.$$

Таким образом, для нормирований $v_i \in T_3 \cup T_4$ существует элемент Z_i, обладающий свойствами 1)–3).

Условие $Z_i^2 \in S$ очевидно, поскольку $\mathrm{Nrd}(Z_i^2) = \mathrm{Nrd}(Z_i)^2 \in N_{K/k}(K^*)$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Произвольный элемент $d \in D^*$ однозначно представляется в виде*

$$d = \Pi_1^{v_1(d)} \cdot \ldots \cdot \Pi_r^{v_r(d)} Z_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot Z_r^{\beta_r} \cdot u,$$

где элементы Π_i, Z_i такие, как в леммах 1 и 2 соответственно, а $u \in 1 + \mathfrak{p}_D$.

Доказательство. Ясно, что $m = d \cdot \Pi_1^{-v_1(d)} \cdot \ldots \cdot \Pi_r^{-v_r(d)}$ элемент из U_D. Далее, пусть $(\overline{m})_{v_i} = \varkappa_i$. Тогда существуют такие β_i: $(\overline{Z_i^{\beta_i}})_{v_i} = \varkappa_i$ и потому $u = m \cdot Z_1^{-\beta_1} \cdot \ldots \cdot Z_r^{-\beta_r} \in 1 + \mathfrak{p}_D$. Следовательно, $d = \Pi_1^{v_1(d)} \cdot \ldots \cdot \Pi_r^{v_r(d)} Z_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot Z_r^{\beta_r} \cdot u$.

Из предложения немедленно вытекает

Следствие 1. *Любой элемент $z \in \mathrm{SL}(1, D)$ имеет вид $z = Z_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot Z_r^{\beta_r} \cdot u$, где $u \in 1 + \mathfrak{p}_D$.*

Доказательство. Так как любой элемент из $\mathrm{SL}(1, D_{v_i})$ обратим в кольце целых нормирования v_i алгебры D_{v_i}, то $v_1(z) = \ldots = v_r(z) = 0$.

Для доказательства основного результата нам потребуются некоторые коммутаторные соотношения в группах.

Пусть G – группа и для произвольных $a, b \in G$ $[a, b]$, как обычно, обозначает коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$. Мы будем пользоваться следующим очевидным утверждением.

Лемма 3. *Если $a, b, c \in G$, то*

$$[a, bc] = [a, b][a, c][[c, a], b], \tag{1}$$

$$[ab, c] = [a, [b, c]][b, c][a, c]. \tag{2}$$

Основную роль в дальнейших рассуждениях будет играть следующая

Теорема 1 (конгруэнц-теорема, [1])**.** *Пусть*

$$x \in U = \{x \in D^* \mid \mathrm{Nrd}_D(x) \in U_v \, \forall v \in V_f\}, y \in D^*.$$

Предположим, что $x \in U_v(1 + \mathfrak{p}_v)$ для всех $v \in T_D \cap V(\mathrm{Nrd}_D(y))$, где $V(a) = \{v \in T \mid v(a) \neq 0\}$. Тогда $[x, y] \in [\mathrm{SL}(1, D), \mathrm{SL}(1, D)]$. В частности,

$$[U, U] = [\mathrm{SL}(1, D), \mathrm{SL}(1, D)].$$

В доказательстве леммы 5 будет использоваться следующее утверждение.

Лемма 4. *Группа* $\mathrm{SL}(1,D)/[S,S]$ *порождается смежными классами элементов* $[\Pi_i, Z_j]$.

Доказательство. В силу теоремы Уонга $\mathrm{SL}(1,D) = [D^*, D^*]$. Следовательно, всякий элемент из $\mathrm{SL}(1,D)$ есть произведение коммутаторов (на самом деле просто коммутатор для алгебры кватернионов) элементов из D^*. Применяя теперь предложение 1 и лемму 3 нужным образом, замечаем, что любой элемент из $\mathrm{SL}(1,D)$ есть подходящее произведение коммутаторов вида:

$$[\Pi_i, Z_j]^{\pm 1}, \quad [\Pi_i, u]^{\pm 1}, \quad [Z_i, Z_j]^{\pm 1}, \quad [Z_i, u]^{\pm 1}, \quad [\Pi_i, \Pi_j]^{\pm 1}.$$

В силу конгруэнц-теоремы коммутаторы вида $[\Pi_i, u]^{\pm 1}$, $[Z_i, Z_j]^{\pm 1}$, $[Z_i, u]^{\pm 1}$ лежат в группе $[\mathrm{SL}(1,D),\mathrm{SL}(1,D)]$, а потому и в $[S,S]$, а $[\Pi_i, \Pi_j]^{\pm 1}$ ввиду леммы 1. Если в коммутаторе $[\Pi_i, Z_j]^{\pm 1}$ $i \neq j$, то мы также находимся в условиях применения конгруэнц-теоремы, поскольку $v_c(\Pi_i) \neq 0$ только в случае $c = i$, но $(\overline{Z_j})_{v_i} = 1$, а потому $[\Pi_i, Z_j] \in [\mathrm{SL}(1,D), \mathrm{SL}(1,D)]$ при $i \neq j$. Таким образом, нетривиальными элементами группы $\mathrm{SL}(1,D)/[S,S]$ могут быть лишь смежные классы элементов $[\Pi_i, Z_j]^{\pm 1}$. Лемма доказана.

Для $a, b \in \mathrm{SL}(1,D)$ будем говорить, что элемент a подобен элементу b ($a \sim b$) , если смежные классы этих элементов по коммутанту $[S,S]$ совпадают.

Лемма 5. *Произвольный элемент из* $\mathrm{SL}(1,D)$ *подобен подходящему произведению некоторых коммутаторов вида* $[\Pi_i, Z_i], i = 1, \dots, r$.

Доказательство. Ввиду леммы 4 достаточно показать, что коммутатор $[Z_j, \Pi_i]$ подобен произведению некоторых элементов $[\Pi_i, Z_i]$. В самом деле, пусть t_i – число элементов в мультипликативной группе алгебры вычетов $\overline{D}_{v_i}$. Поскольку $(\overline{Z_i^{t_i}})_{v_i} = 1$, то в силу конгруэнц-теоремы заключаем, что $[\Pi, Z_i^{t_i}] \sim 1$. По лемме 3

$$\begin{aligned}[\Pi, Z_i^{t_i}] &= [\Pi, Z_i \cdot Z_i^{t_i - 1}] \\ &= [\Pi, Z_i][\Pi, Z_i^{t_i-1}][[Z_i^{t_i-1}, \Pi], Z_i] \sim [\Pi, Z_i][\Pi, Z_i^{t_i-1}].\end{aligned}$$

Следовательно, $[Z_i, \Pi_i] \sim [\Pi_i, Z_i^{t_i-1}]$. Снова по лемме 3 $[\Pi_i, Z_i^{t_i-1}] \sim [\Pi_i, Z_i]^{t_i-1}$. Лемма доказана.

Для фиксированного нормирования $v_i \in T$ рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi_i : \mathrm{SL}(1,D)/[S,S] \longrightarrow \mathrm{SL}(1,D_{v_i})/[S_{v_i}, S_{v_i}],$$

где $S_{v_i} = \{d \in D^*_{v_i} \mid \mathrm{Nrd}_{D_{v_i}}(d) \in N_{K_{v_i}/k_{v_i}}(K_{v_i})\}$, который корректно определён, поскольку $[S,S] \subset [S_{v_i}, S_{v_i}]$.

Покажем, что

$$(\overline{\mathrm{SL}(1,D_{v_i})})_{v_i}/(\overline{[S_{v_i},S_{v_i}]})_{v_i} \cong \mathrm{SL}(1,D_{v_i})/[S_{v_i},S_{v_i}].$$

В самом деле, легко видеть, что гомоморфизм

$$\psi_i : \mathrm{SL}(1,D_{v_i})/[S_{v_i},S_{v_i}] \longrightarrow (\overline{\mathrm{SL}(1,D_{v_i})})_{v_i}/(\overline{[S_{v_i},S_{v_i}]})_{v_i}$$

сюръективен и корректно определён. Пусть $[d_1,d_2] \in \mathrm{SL}(1,D_{v_i})$ и $\overline{[d_1,d_2]}_{v_i} = 1$. Тогда существуют $s_j^{(1)}, s_j^{(2)} \in S_{v_i}, j = 1\dots k$ такие, что $\overline{[d_1,d_2]}_{v_i} = \overline{[s_1^{(1)},s_1^{(2)}]} \cdot \ldots \cdot \overline{[s_k^{(1)},s_k^{(2)}]}$, т.е.

$$[d_1,d_2] = [s_1^{(1)},s_1^{(2)}] \cdot \ldots \cdot [s_k^{(1)},s_k^{(2)}] \cdot u, \quad u \in 1 + \mathfrak{p}_{D_{v_i}}.$$

Откуда немедленно получаем

$$u \in \mathrm{SL}(1,D_{v_i}) \cap (1+\mathfrak{p}_{D_{v_i}}) = [\mathrm{SL}(1,D_{v_i}), \mathrm{SL}(1,D_{v_i})]$$

(см. [11]). Так как $[\mathrm{SL}(1,D_{v_i}),\ \mathrm{SL}(1,D_{v_i})] \subset [S_{v_i},S_{v_i}]$, то $[d_1,d_2] \in [S_{v_i},S_{v_i}]$. Таким образом, инъективность ψ_i установлена.

Имеем далее цепочку гомоморфизмов:

$$\mathrm{SL}(1,D)/[S,S] \xrightarrow{\varphi_{v_i}} \mathrm{SL}(1,D_{v_i})/[S_{v_i},S_{v_i}] \xrightarrow{\psi_{v_i}} (\overline{SL(1,D_{v_i})})_{v_i}/(\overline{[S_{v_i},S_{v_i}]})_{v_i}.$$

Лемма 6. *Пусть E_{v_i}/k_{v_i} – расширение полей такое, что в любом из случаев 1)–3), определяющих множество T_i, $N_{K\otimes_k k_{v_i}/k_{v_i}}(K \otimes_k k_{v_i}) = N_{E_{v_i}/k_{v_i}}(E_{v_i})$. Тогда $S_{v_i} = E^*_{v_i} \cdot \mathrm{SL}(1,D_{v_i})$.*

Доказательство. Включение $E^*_{v_i} \cdot \mathrm{SL}(1,D_{v_i}) \subset S_{v_i}$ очевидно. Обратное устанавливается следующим образом. Пусть $d \in D_{v_i}$ и $\mathrm{Nrd}_{D_{v_i}}(d) \in N_{E_{v_i}/k_{v_i}}(e)$ для некоторого $e \in E_{v_i}$. Значит, $d = e \cdot s$, где $s \in \mathrm{SL}(1,D_{v_i})$. Лемма доказана.

3. Конструктивное доказательство теоремы Сури

В этом параграфе мы приводим конструктивное доказательство теоремы Сури [6].

Теорема 2. $\mathrm{SL}(1,D)/[S,S]$ – *абелева группа и* $\mathrm{SL}(1,D)/[S,S] \cong G_1 \oplus \ldots \oplus G_r$, *где* $G_i = \langle [\Pi_i, Z_i] \rangle$.

Доказательство. Ввиду $\mathrm{SL}(1,D) \subset S$ группа $\mathrm{SL}(1,D)/[S,S]$ абелева. Покажем, что группа G_i, порождённая смежным классом $[\Pi_i, Z_i]$, пересекается с группой $G_1 \oplus \ldots \oplus G_{i-1} \oplus G_{i+1} \oplus \ldots \oplus G_r$ только по единичному элементу.

а) Если $v_i \in T_3 \bigcup T_4$, то в силу лемм 1 и 2 $[\Pi_i, Z_i] \in S$, поэтому $G_i = \{1\}$ и $G_i \bigcap (G_1 \oplus \ldots \oplus G_{i-1} \oplus G_{i+1} \oplus \ldots \oplus G_r) = \{1\}$.

б) Если $v_i \in T_2$, то из лемм 1 и 2 следует, что $[\Pi_i, Z_i^2] \sim [\Pi_i, Z_i][\Pi_i, Z_i] \in [S,S]$.

Покажем, что $[\Pi_i, Z_i] \notin [S,S]$. Так как $(\overline{\Pi_i a \Pi_i^{-1}})_{v_i} = \overline{a}_{v_i}{}^{q_i - 1}$, где $q_i = |\overline{k}_{v_i}|, a \in U_{D_{v_i}}$, то $(\overline{[\Pi_i, Z_i]})_{v_i} = (\overline{Z_i})_{v_i}{}^{q_i - 1}$, где $(\overline{Z}_i)_{v_i}$ – образующая мультипликативной группы $\overline{D}^*_{v_i}$. Следовательно, редукция элемента $[\Pi_i, Z_i]$ есть элемент нормы 1 в $\overline{D}^*_{v_i}$, не являющийся квадратом элемента единичной нормы. Для описания множества $(\overline{[S_{v_i}, S_{v_i}]})_{v_i}$ в силу леммы 3 достаточно рассматривать коммутаторы вида $[\Pi_i^\alpha, s]$, где $\Pi_i, s \in S_{v_i} = E^*_{v_i}\mathrm{SL}(1, D_{v_i})$ (лемма 6). При этом, так как поле E_{v_i} – вполне разветвлено над k_{v_i}, то униформизующую Π_i идеала $\mathfrak{p}_{D_{v_i}}$ можно считать лежащей в E_{v_i}. Произвольный элемент поля E_{v_i}, являющийся единицей, имеет вид $c \cdot u$, где $c \in k^*_{v_i}$, $u \in 1 + \mathfrak{p}_{D_{v_i}}$. Поскольку $\mathrm{char}\, \overline{k}_{v_i} \neq 2$, элемент u является квадратом в E_{v_i}, т.е. $u = w^2$. Значит, произвольный элемент из S_{v_i} имеет вид $c \cdot w^2 \cdot s$, где $c \in k^*_{v_i}, w \in E^*_{v_i}$, $s \in \mathrm{SL}(1, D_{v_i})$. Имеем, для редукции σ внутреннего автоморфизма, индуцированного с помощью Π_i,

$$(\overline{[\Pi_i^\alpha, cw^2 s]})_{v_i} = (\overline{c}_{v_i} \overline{w}^2_{v_i} \overline{s}_{v_i})^{\sigma^\alpha} / (\overline{c}_{v_i} \overline{w}^2_{v_i} \overline{s}_{v_i}) = (\overline{w}^{\sigma^\alpha}_{v_i} / \overline{w}_{v_i})^2 \cdot \overline{s}^{\sigma^\alpha}_{v_i} / \overline{s}_{v_i}.$$

Так как $\overline{s}_{v_i} \in \overline{D}^*_{v_i}$ – элемент приведенной нормы 1, то $\overline{s}^\sigma_{v_i} = \overline{s}^{-1}_{v_i}$, и потому $(\overline{[\Pi_i^\alpha, cw^2 s]})_{v_i} = (\overline{w}^{\sigma^\alpha}_{v_i} / (\overline{w}_{v_i} \cdot \overline{s}_{v_i}))^2$. Следовательно, $(\overline{[S_{v_i}, S_{v_i}]})_{v_i} \subset \mathrm{SL}(1, \overline{D}_{v_i})^2$, где $\mathrm{SL}(1, \overline{D}_{v_i})^2$ – квадраты элементов нормы 1 в поле $\overline{D}^*_{v_i}$. Использование гомоморфизмов φ_i и ψ_i (введенных перед леммой 6) даёт, что $(\overline{[\Pi_i, Z_i]})_{v_i} \notin (\overline{[S_{v_i}, S_{v_i}]})_{v_i}$, а потому $[\Pi_i, Z_i] \notin [S,S]$.

Из предыдущих рассуждений следует, что смежный класс коммутатора $[\Pi_i, Z_i]$ не лежит в группе, порождённой G_j при $j \neq i$. В самом деле, относительно нормирования v_i элементы Π_j, Z_j являются единицами (точнее, $\Pi_j, Z_j \in 1 + \mathfrak{p}_{D_{v_i}}$). Следовательно, группа, порожденная G_j при $j \neq i$ содержится в $[S_{v_i}, S_{v_i}]$, а $[\Pi_i, Z_i] \notin [S_{v_i}, S_{v_i}]$.

в) Наконец, пусть $v_i \in T_1$. Так как $(\overline{Z_i^{q_i+1}})_{v_i} \in \overline{k}^*_{v_i}$, где $q_i = |\overline{k}_{v_i}|$, то $[\Pi_i, Z_i^{q_i+1}] \in [S,S]$ по конгруэнц-теореме. В силу соотношения $[\Pi_i, Z_i^n] \sim [\Pi_i, Z_i]^n$ для доказательства теоремы в случае в) достаточно показать, что $[\Pi_i, Z_i^n] \notin [S,S]$ при $n < q_i + 1$. В самом деле, как и в случае б), имеем $(\overline{[\Pi_i, Z_i^n]})_{v_i} = ((\overline{Z_i})_{v_i}^{q_i-1})^n$. С учётом неразветвленности поля E_{v_i}/k_{v_i} произвольный элемент поля E_{v_i} имеет вид $\Pi_i^{2\alpha} \cdot u$, где Π_i – униформизующая идеала $\mathfrak{p}_{D_{v_i}}$, а u – единица кольца нормирования поля E_{v_i} относительно нормирования v_i. В силу леммы 6 произвольный элемент множества S_{v_i} имеет вид $\Pi_i^{2\alpha} \cdot u \cdot s$, где $s \in \mathrm{SL}(1, D_{v_i})$, а любая единица кольца нормирования поля E_{v_i} относительно нормирования v_i может быть представлена в виде $u \cdot s$. Как и в случае б), при описании группы $[S_{v_i}, S_{v_i}]$ достаточно рассматривать коммутаторы вида $[\Pi_i^\beta, w]$, где w – единица кольца нормирования D_{v_i}, принадлежащая множеству S_{v_i}, в силу того, что $(\overline{[u,w]})_{v_i} = 1$ в случае, когда u, w – единицы кольца нормирования D_{v_i}, принадлежащие множеству S_{v_i}. Поскольку $\Pi_i^\beta \in S_{v_i}$ в том и только в том случае, когда β чётно, то $[\Pi_i^\beta, w] = [\Pi_i^{\sigma^{2\gamma}}, w] = \overline{w}_{v_i}^{\sigma^{2\gamma}}/\overline{w}_{v_i} = 1$. Так как $\overline{[\Pi_i, Z_i^n]}_{v_i} = ((\overline{Z_i})_{v_i}^{q_i-1})^n$, где $n < q_i + 1$, а $(\overline{Z_i})_{v_i}$ – образующая группы $\overline{D}^*_{v_i}$, то $\overline{[\Pi_i, Z_i^n]}_{v_i} \notin [S,S]$ при $n < q_i + 1$. Из предыдущих рассуждений следует, что любой из смежных классов $[\Pi_i, Z_i^n]$ при $n < q_i + 1$ не лежит в группе, порождённой G_i $(j \neq i)$. Действительно, относительно нормирования v_i все элементы Π_j, Z_j при $j \neq i$ лежат во множестве $1 + \mathfrak{p}_{D_{v_i}}$, а потому при $j \neq i$ $[\Pi_j, Z_j^n] \in [S_{v_i}, S_{v_i}]$ и $[\Pi_j, Z_j^n] \notin [S_{v_i}, S_{v_i}]$ при $n < q_1 + 1$.

Отметим в заключение некоторые очевидные следствия о порядках $|G_i|$ групп G_i.

Следствие 2. *В вышеприведенных обозначениях имеют место следующие утверждения:*

1) $|G_i| = 1$, *если* $v_i \in T_3 \cup T_4$;
2) $|G_i| = 2$, *если* $v_i \in T_2$;
3) $|G_2| = q_i + 1$, *если* $v_i \in T_1$, *где* $q_i = |\overline{k}_{v_i}|$.

Следствие 3. *Порядок группы* $\mathrm{SL}(1,D)/[S,S]$ *равен* $\prod\limits_{i=1}^{r} |G_i|$.

Следствие 4. *Пусть A – кватернионная алгебра с делением и инволюцией второго рода τ, тогда*

$$|\mathrm{SUK}_1^{\mathrm{an}}(A,\tau)| = \prod_{i=1}^{r} |G_i|.$$

Литература

1. В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел.* Наука, М. (1991).
2. S. Wang, *On the commutator group of a simple algebra.* — Amer. J. Math. **72** (1950), 323–334.
3. В. И. Янчевский, *Коммутанты простых алгебр с сюрьективной приведенной нормой.* — Докл. АН СССР **221** (1975), 1056–1058.
4. В. П. Платонов, *О проблеме Таннака–Артина.* — Докл. АН СССР **221** (1975), 1038–1041.
5. B. A. Sethuraman, B. Sury, *On the special unitary group of a division algebra.* — Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2005), 351–354.
6. B. Sury, *On $SU(1,D)/[U(1,D),U(1,D)]$ for a quaternion division algebra D.* — Arch. Math. **90** (2008), 493–500.
7. Г. А. Маргулис, *О мультипликативной группе алгебры кватернионов над глобальным полем.* — Докл. АН СССР. **252** (1980), 542–546.
8. Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра.* Наука, М. (1971).
9. *Алгебраическая теория чисел.* Ред. Дж. Касселс, А. Фрёлих. М., Мир. 1969.
10. G. Tomanov, *On Grunwald–Wang's theorem.* — J. reine angew. Math. **389** (1988), 209–220.
11. C. Riehm, *The norm 1 group of p-adic division algebras.* — Amer. J. Math. **92** (1970), 499–523.

Prokopchuk A. V., Yanchevskii V. I. On another proof for B. Sury's theorem.

For a central simple algebra A over a global field with an involution of second kind τ we give an explicit description of the group $\mathrm{SU}(A,\tau)/[U(A,\tau),U(A,\tau)]$. It is another proof for B. Sury's theorem.

Институт математики НАН Беларуси

Поступило 12 января 2009 г.

E-mail: alexpro@im.bas-net.by, yanch@im.bas-net.by