Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ С НЕАБЕЛЕВЫМ ЯДРОМ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В настоящей работе мы рассмотрим некоторый класс задач погружения локальных полей. Пусть

$$1 \to B \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$$

– точная последовательность p-групп, K/k – расширение Галуа локального поля с группой F, причем будем предполагать, что характеристика поля вычетов поля k равна p. Кроме того, поле K содержит первообразный корень ζ_n из 1 степени $p^n (n \geqslant 1)$. Задача погружения состоит в построении расширения Галуа (алгебры Галуа) L, где $L \supset K$ имеет группу Галуа G над полем k, причем ограничение автоморфизмов $g \in G$ на поле K совпадает с $\varphi(g)$. В случае абелева ядра подобная задача была решена в [1, 2], где, в частности, было доказано, что для разрешимости задачи погружения необходимо и достаточно выполнения условия согласности Фаддеева–Хассе. В работе [3] была рассмотрена неабелева задача погружения при условии, что числа образующих групп G и F совпадают. Было доказано, что задача эквивалентна своей сопутствующей задаче, связанной с точной последовательностью групп

$$1 \to B/B' \to G/B' \to F \to 1,$$

где B' – коммутант группы B. Тем самым, решение неабелевой задачи было сведено к решению абелевой задачи, решение которой можно считать известным.

В [5, глава 4] найдены достаточные условия, гарантирующие существование собственных решений задачи погружения для локальных полей и p-групп. Именно, если число образующих группы k^*/k^{*p} достаточно велико (больше, чем сумма чисел образующих группы G и ядра B), для существования собственных решений также достаточно выполнения условия согласности.

1°. В настоящей работе рассматриваются условия разрешимости задачи погружения для локальных полей и p-групп (не обязательно в собственном смысле), причем на число образующих группы G не накладывается никаких ограничений. Нашей целью является доказательство двух теорем, из которых вторая – следствие первой.

Напомним, что группой Демушкина локального поля k называется группа Галуа $\overline{F}$ максимального p-расширения поля k, и число ее образующих $d(\overline{F})$ равно $(k : Q_p) + 2$, где p – характеристика поля вычетов поля $k, p > 2$. Мы будем также предполагать, что в k содержится корень степени p из 1 (иначе задача всегда разрешима).

Теорема A. *Пусть p – нечетное простое число, K/k – p-расширение локальных полей с группой Галуа F, причем p – характеристика поля вычетов поля k, и задана точная последовательность p-групп*

$$1 \to B \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1.$$

Будем считать, что K содержит первообразный корень из 1 степени, равной периоду B. Если $d(\overline{F}) \geqslant d(F) + 2$ (где $\overline{F}$ – группа Демушкина для поля k, а $d(\cdot)$ – число образующих соответствующей p-группы), то задача погружения $(K/k, G, \varphi)$ равносильна сопутствующей задаче $(K/k, \overline{G}, \overline{\varphi})$, где $\overline{G} = G/B'$.

Теорема B снимает требование к существованию в K требуемого корня из 1. Мы в этом случае имеем возможность перейти к равносильной задаче погружения $(K_1/k, G_1, \varphi_1)$, где K_1 – круговое расширение поля K нужной степени, но при этом число образующих группы $F_1 = \mathrm{Gal}(K_1/k)$ может увеличиться на 1 по сравнению с $d(F)$. Таким образом, прямым следствием теоремы A является

Теорема B. *Пусть p – нечетное простое число, K/k – p-расширение локальных полей с группой Галуа F, причем p – характеристика поля вычетов поля k, и k содержит первообразный корень степени p из 1. Рассмотрим задачу погружения $(K/k, G, \varphi)$, связанную с точной последовательностью p-групп*

$$1 \to B \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1.$$

Если $d(\overline{F}) \geqslant d(F) + 3$ (где $\overline{F}$ – группа Демушкина), то задача погружения $(K/k, G, \varphi)$ равносильна сопутствующей задаче $(K/k, \overline{G}, \overline{\varphi})$, где $\overline{G} = G/B'$.

Соответственно, в обоих случаях достаточно исследовать лишь условие согласности Фаддеева–Хассе.

2°. Итак, пусть p – нечетное простое число, поле k содержит первообразный корень ξ_n степени p^n из 1, а поле K содержит первообразный корень ζ_s степени p^s из 1, где s таково, что порядок любого элемента $b \in B$ делит p^s $(s \geqslant n)$. Пусть $k_0 = k(\zeta_s)$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_0/k)$ и τ_1 – образующий элемент Γ, причем $\zeta_s^{\tau_1} = \zeta_s^{1+p^n}$. Обозначим $\zeta_m = \zeta_s^{p^{s-m}}$ при $m < s$. Пусть k_1 – максимальное абелево периода p подрасширение поля K $(k_1 = k(\sqrt[p]{z_1}, \dots, \sqrt[p]{z_r}))$, тогда автоморфизм τ_1 можно продолжить до автоморфизма поля k_1k_0 (который также будем обозначать τ_1) так, чтобы $\sqrt[p]{z_1}^{\tau_1-1} = \zeta_1$ и $\sqrt[p]{z_i}^{\tau_1-1} = 1$ при $i > 1$ (можно считать, что $z_1 = \zeta_n$). Заметим, что существует гомоморфизм $\eta : F \to \Gamma$, сопоставляющий любому $f \in F$ его ограничение на поле k_0.

Напомним, что группа Галуа $\overline{F}$ максимального p-расширения поля k, называемая группой Демушкина, имеет $d = |k : Q_p| + 2$ образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ и одно соотношение $\sigma_1^{p^n}[\sigma_1, \sigma_2] \dots [\sigma_{d-1}, \sigma_d] = 1$. Заметим, что в поле k для любой пары элементов $x_1, x_2 \in k^*$ определен символ Гильберта p-той степени (x_1, x_2). Будем говорить, что x_1 и x_2 ортогональны, если $(x_1, x_2) = 1$.

Лемма 1. *Пусть K/k – расширение локальных полей, $k_1 = k(\sqrt[p]{z_1}, \dots, \sqrt[p]{z_r})$ – максимальное абелево периода p подрасширение поля K. Кроме того, пусть k^*/k^{*p} имеет размерность d, тогда при $d \geqslant r + 2$ существуют, по крайней мере, два элемента x_1, $x_2 \in k^*$, линейно независимые в k^*/k^{*p} и ортогональные ко всем $z_1, \dots, z_r$.*

Доказательство. Дополним множество $z_1, \dots, z_r$ до базиса $z_1, \dots, z_r, z_{z+1}, \dots, z_d$ пространства k^*/k^{*p}. Символ Гильберта определяет невырожденную билинейную форму $w(y_1, y_2)$ в пространстве k^*/k^{*p}, если положим $\zeta_1^{w(y_1,y_2)} = (y_1, y_2)$. Пусть $\bar{z}_j$, $j = 1, \dots, d$ – двойственный к $\{z_j\}$ базис. Положим $c_{ij} = w(z_i, z_j)$, $i, j = 1, \dots, d$.

Пусть $v = \bar{z}_1^{v_1} \dots \bar{z}_d^{v_d}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (z_1, v) = 1 \\ \dots\dots\dots \\ (z_{d-1}, v) = 1 \\ (z_d, v) = \zeta_1, \end{cases}$$

или в аддитивной форме

$$\begin{cases} c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \ldots + c_{1d}v_d = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{d-11}v_1 + c_{d-12}v_2 + \ldots + c_{d-1d}v_d = 0 \\ c_{d1}v_1 + c_{d2}v_2 + \ldots + c_{dd}v_d = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что определитель Δ системы (1) отличен от 0. Действительно, если $\Delta = 0$, то однородная система

$$\begin{cases} c_{11}v_1 + \ldots + c_{1d}v_d = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{d1}v_1 + \ldots + c_{dd}v_d = 0 \end{cases} \tag{2}$$

имеет нетривиальное решение $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_d$; тогда $y = \bar{z}_1^{\bar{v}_1} \ldots \bar{z}_d^{\bar{v}_d}$ ортогонален любому элементу из k^*, что противоречит невырожденности символа Гильберта, следовательно, $\Delta \neq 0$ и система (1) имеет единственное решение $v_{11}, \ldots, v_{1d}$. Положим $x_1 = \bar{z}_1^{v_{11}} \ldots \bar{z}_d^{v_{1d}}$. Тогда x_1 ортогонален всем элементам $z_1, \ldots, z_r$. Аналогично рассматривая систему

$$\begin{cases} (z_1, v) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ (z_{d-2}, v) = 1 \\ (z_{d-1}, v) = \zeta_1 \\ (z_d, v) = 1, \end{cases}$$

найдем x_2. Легко видеть, что x_1 и x_2 линейно независимы в k^*/k^{*p}. Лемма доказана.

Нам понадобится еще одна чисто групповая лемма.

Лемма 2. *Пусть B – неабелева p-группа, содержащая абелеву подгруппу A индекса p, и пусть C – центр группы B. Пусть на группе B действует p-группа H, для которой A – инвариантная подгруппа. Если для любых $h \in H$ и $a \in A$ выполнено условие:*

$$a^h a^{-1} \in C \quad \text{влечет} \quad a^h a^{-1} = 1,$$

то H тривиально действует на всей группе A.

Доказательство. Зафиксируем элемент $b_1 \in B \setminus A$. Если для $a \in A$ выполнено $[b_1, a] = 1$, то $a \in C$ (поскольку A – абелева и $(B : A) = p$).

Рассмотрим произвольный автоморфизм $h \in H$. Так как h является p-автоморфизмом, то $b_1^{-1}b_1^h = a_1 \in A$.

Пусть $C = C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_m = B$ – верхний центральный ряд группы B. Через $\widetilde{C}_k$ обозначим $C_k \cap A$: при этом $\widetilde{C}_m = A$.

Докажем индукцией по k, что h – тривиальный автоморфизм на $\widetilde{C}_k$. При $k = 1$ это гарантируется условием леммы. Пусть h тривиален на $\widetilde{C}_{k-1}$, и рассмотрим произвольный элемент $x \in \widetilde{C}_k$. Тогда $z = b_1^{-1}x^{-1}b_1x \in \widetilde{C}_{k-1}$, и по предположению индукции $z^h = z$. Таким образом (так как $b_1^h = b_1a_1$) имеем:

$$a_1^{-1}b_1^{-1}x^{-h}b_1a_1x^h = (b_1^{-1}x^{-1}b_1x)^h = b_1^{-1}x^{-1}b_1x.$$

Так как $b_1^{-1}x^{-h}b_1 \in A$ и коммутирует с a_1, получаем $x^{-h}b_1x^h = x^{-1}b_1x$. Таким образом, для $y = xx^{-h}$ имеем $[b_1, y] = 1$, откуда, по сказанному выше, $y^{-1} = x^hx^{-1} \in C$. Согласно условию леммы $x^hx^{-1} = 1$, т.е. h тривиально действует на $\widetilde{C}_k$.

Лемма доказана.

3°. Теорему А будем доказывать в несколько этапов. В одну сторону утверждение очевидно. Пусть теперь разрешима сопутствующая абелева задача. Докажем индукцией по порядку ядра B, что это влечет разрешимость исходной задачи. Если B – абелева группа, то утверждение тривиально. Пусть оно доказано для задач погружения, ядра которых имеют порядок, меньший чем p^k. Предположим, что теперь ядро B задачи $(K/k, G, B)$ имет порядок p^k. Пусть B_1 – подгруппа индекса p в B, являющаяся нормальным делителем в G, и пусть $B_1' = [B_1, B_1]$ – коммутант группы B_1. Рассмотрим сопутствующую задачу погружения $(K/k, G/B_1', B/B_1')$. Если $B_1' \neq 1$, то она разрешима по индукционному предположению, и пусть L – её решение. Обозначим через L_0 подалгебру в L, соответствующую подгруппе B_1, тогда L_0 – алгебра порядка p над полем K. Рассмотрим задачу погружения $(L_0/k, G, B_1)$. По индукционному предположению она разрешима, так как разрешима сопутствующая абелева задача $(L_0/k, G/B_1', B_1/B_1')$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $B_1' = 1$, т.е. B является расширением абелевой группы B_1 с помощью циклической группы порядка p.

Пусть C – центр группы B, тогда по индукционному предположению сопутствующая задача погружения $(K/k, G/C, B/C)$ разрешима, и пусть L_1 – ее решение с полем-ядром K_2 с группой Галуа F_1 над полем k. Обозначим через G_1 прямое произведение групп G и F_1 с

объединенной факторгруппой F. Поднимая в исходной задаче погружения поле K до поля K_2, получаем задачу $(K_2/k, G_1, B)$. Заметим, что G_1/C является полупрямым расширением группы B/C с помощью F_1. Обозначим через H_1 полный прообраз в G_1 вложения F_1 в G_1/C, тогда G_1 является произведением подгрупп H_1 и B, причем $H_1 \cap B = C$, и можно говорить о действии группы H_1, а значит и F_1, на B. Заметим, что если η_1 – гомоморфизм F_1 на F, то элементы из $\operatorname{Ker}\eta_1$ действуют на B как внутренние автоморфизмы.

4°. Рассмотрим теперь действие группы F_1 на центре C группы B. Пусть $\widetilde{F}_1$ – подгруппа в F_1, которой принадлежит круговое подрасширение и, по-прежнему, τ_1 – автоморфизм, действующий в круговом подрасширении по правилу $\zeta_s^{\tau_1} = \zeta_s^{1+p^n}$ (τ_1 – образующая группы $F_1/\widetilde{F}_1$). Пусть C_1 – максимальная подгруппа в C, на которой $\widetilde{F}_1$ действует тривиально, а τ_1 – по правилу $c^{\tau_1} = c^{1+p^n}$, $c \in C_1$. Если C_1 не совпадает с C, то существует подгруппа $C_2 \subset C$, являющаяся нормальным делителем в G_1, и кроме того, C_1 имеет индекс p в C_2. Пусть $c_2 \in C_2 \setminus C_1$, тогда либо существует $\tau \in \widetilde{F}_1$ со свойством $c_2^{\tau} = c_2c_0$, либо $c_2^{\tau_1} = c_2^{1+p^n}c_0$. Будем называть эти случаи первым и вторым соответственно. В обоих случаях $c_0 \in C_1$ и подгруппа C_0, порожденная c_0, имеет порядок p и является нормальным делителем в G_1.

Рассмотрим сопутствующую задачу погружения $(K_1/k,\ G_1/C_0,\ B/C_0)$. По индукционному предположению она разрешима, и пусть L_2 – ее решение с полем-ядром K_3, имеющим группу Галуа F_2 над полем k. Обозначим через G_2 прямое произведение групп G_1 и F_2 с объединенной факторгруппой F_1. Поднимая погружаемое поле K_2 до поля K_3, получаем задачу погружения $(K_3/k, G_2, B)$. Заметим, что G_2/C_0 является полупрямым расширением группы B/C_0 с помощью F_2. Обозначим через H_2 полный прообраз в G_2 вложения F_2 в G_2/C_0. Тогда G_2 является произведением подгрупп H_2 и B, причем $H_2 \cap B = C_0$.

Пусть G_3 – подгруппа в G_2, являющаяся произведением подгрупп C и H_2. Рассмотрим задачу погружения $(K_2/k, G_3, C)$. Она является присоединенной задачей для $(K_2/k, G_2, B)$. Поскольку она является абелевой задачей, то для ее разрешимости достаточно проверить разрешимость всех сопутствующих брауэровских задач, соответствующих F_2-операторным характерам группы C. Заметим, что сопутствующая задача $(K_3/k, G_3/C_0, C/C_0)$ является полупрямой. Пусть χ – операторный характер группы C. Тогда в первом случае имеем

$$\chi(c_2) = \chi^{\tau^{-1}}(c_2) = \chi(c_2^{\tau}) = \chi(c_2c_0) = \chi(c_2)\chi(c_0),$$

т.е. $\chi(c_0) = 1$. Во втором случае

$$\chi(c_2)=\chi^{\tau_1^{-1}}(c_2)=\chi(c_2^{\tau_1})^{\tau_1^{-1}}=\chi(c_2^{1+p^n}c_0)^j=\chi(c_2)^{(1+p^n)j}\chi(c_0)=\chi(c_2)\chi(c_0),$$

где j – целое число со свойством $(1+p^n)j \equiv 1 \pmod{p^s}$. Таким образом, в обоих случаях $\chi(c_0) = 1$, т.е. операторный характер χ аннулирует подгруппу C_0, следовательно, любая сопутствующая брауэровская задача является полупрямой. Значит, задача погружения $(K_3/k, G_3, C)$ разрешима, что влечет разрешимость задачи $(K_3/k, G_2, B)$. Таким образом, в дальнейшем можно считать, что подгруппа $\widetilde{F}_1$ действует на центр C группы B тривиально, а τ_1 – по правилу $c^{\tau_1} = c^{1+p^n}$, $c \in C$.

Рассмотрим теперь действие $\widetilde{F}_1$ на группе B_1. Пусть $d \in B_1$, $\tau \in \widetilde{F}_1$ и коммутатор $[d, \tau] \neq 1$ содержится в C. Тогда группа D_0, порожденная $d_0 = [d, \tau]$, является подгруппой в C и нормальным делителем в G_1. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что задача погружения $(K_2/k, G_1, B)$ разрешима. Поэтому в дальнейшем можно считать, что все коммутаторы $[d, \tau]$ при $d \in B_1$, $\tau \in \widetilde{F}_1$, лежащие в центре C группы B, равны единице. Тогда по лемме 2, взяв в качестве H подгруппу $\widetilde{F}_1$, получаем, что $\widetilde{F}_1$ действует тривиально на подгруппе B_1.

Пусть $b \in B \setminus B_1$ и D – подгруппа в B, являющаяся нормальным делителем в G_1, причем C имеет индекс p в D. Пусть $d \in D \setminus C$, тогда $d^p \in C$ и $d_0 = [d, b] \in C$ и имеет экспоненту p. Обозначим через D_0 подгруппу в C, порожденную d_0. Ясно, что D_0 – нормальный делитель в G_2 порядка p. По индукционному предположению сопутствующая задача погружения $(K_2/k, G_1/D_0, B/D_0)$ разрешима, и пусть L_3 – ее решение с полем-ядром K_4, имеющим группу Галуа F_3 над полем k. Обозначим через G_4 прямое произведение групп G_1 и F_3 с объединенной факторгруппой F_1. Поднимая погружаемое поле K_2 до поля K_4, получаем задачу погружения $(K_4/k, G_4, B)$. Заметим, что G_4/D_0 является полупрямым расширением B/D_0 с помощью F_3. Обозначим через H_3 полный прообраз в G_3 вложения F_3 в G_4/D_0. Тогда G_4 является произведением групп H_3 и B, причем $H_3 \cap B = D_0$. Продолжим гомоморфизм η_1 до гомоморфизма $\eta_2 : F_3 \to F$, тогда элементы из $\operatorname{Ker}\eta_2$ действуют на B как внутренние автоморфизмы.

5°. Рассмотрим теперь сопутствующую задачу $(K_4/k, G_4/B_1, B/B_1)$. Она является прямой, т.е. G_4/B_1 – прямое расширение группы F_3 и B/B_1. Любое расширение последней задачи имеет вид $L_4 =$

$K_4(\sqrt[p]{x})$, где $x \in k^*$. Выберем x так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. $x \notin k^{*p}$;

2. символы Гильберта $(x_1, z_i) = 1$, $i = 1, \dots, r$, где $k(\sqrt[p]{z_1}, \dots, \sqrt[p]{z_r}) = k_1$;

3. $k(\sqrt[p]{x})$ не является подполем кругового подрасширения в K.

Покажем, что такой выбор элемента x возможен. По лемме 1 существуют x_1 и x_2, удовлетворяющие свойствам 1 и 2. Возьмем линейную комбинацию $x_1^{c_1} x_2^{c_2}$ и выберем c_1 и c_2 так, чтобы выполнялось условие 3, причем c_1 и c_2 не должны быть сравнимы с 0 по модулю p одновременно.

Будем сначала предполагать, что $L_4 = K_4(\sqrt[p]{x})$ является полем. Рассмотрим задачу погружения $(L_4/k, G_4, B_1)$. В случае локальных полей абелева задача погружения разрешима, если для нее выполнено условие согласности Фаддеева–Хассе (см. [2]), которое, в частности, состоит в распадении скрещенного произведения $\Lambda = G_4 \times L_4$. Заметим, что Λ является полупростой алгеброй, простые компоненты Λe_χ которой соответствуют характерам группы B_1, причем в случае локальных полей достаточно рассмотреть компоненты, соответствующие F_3-операторным характерам (см. [1]).

Пусть χ – операторный характер и Λe_χ – простая компонента алгебры Λ, соответствующая χ, e_χ – идемпотент алгебры Λ, тогда Λe_χ имеет порядок $|F_3|^2 \cdot p^2$ и определена над полем k. Обозначим через B_χ подгруппу в B_1, которую аннулирует χ, и через $G_\chi = G_4/B_\chi$. Покажем, что $D_0 \subset B_\chi$. Действительно,

$$\chi(d) = \chi^{b^{-1}}(d) = \chi(d^b) = \chi(d[d, B]) = \chi(d)\chi(d_0),$$

следовательно, $\chi(d_0) = 1$ и χ аннулирует подгруппу D_0. Таким образом, G_χ является полупрямым расширением подгруппы B/B_χ с помощью F_3. Заметим теперь, что B/B_χ является абелевой группой. Действительно, пусть $\bar{b} \in B/B_\chi$, тогда

$$\chi(\bar{b}) = \chi^{b^{-1}}(\bar{b}) = \chi(\bar{b}^b) = \chi(\bar{b}[\bar{b}, b]) = \chi(\bar{b})\chi([\bar{b}, b]), \quad \text{т.е.} \quad \chi([\bar{b}, b]) = 1.$$

Вычислим теперь значения характера χ на коммутаторах $[b, \tau_i]$, где τ_i – образующие группы F_3:

$$\chi([b, \tau_i]) = \chi^{b^{-1}}([b, \tau_i]) = \chi([b, \tau_i])\chi([b, \tau_i, b]),$$

следовательно, $\chi([b,\tau_i,b]) = 1$. Пусть теперь $i \neq 1$, т.е. τ_i действует тривиально в круговом подрасширении поля K_4. Заметим, что $b^p \in B$ и пусть $\chi(b^p) = \zeta_m^t$. Имеем

$$\chi(b^p) = \chi^{\tau_i^{-1}}(b^p) = \chi(b^p[b^p,\tau_i]) = \chi(b^p)\chi([b^p,\tau_i]) = \chi(b^p)\chi([b,\tau_i])^p,$$

т.е. $\chi([b,\tau_i])^p = 1$ и значения $\chi([b,\tau_i]) = \zeta_1^{q_i}$ имеют экспоненту p. Остается вычислить значение $\chi([b,\tau_1])$. Имеем

$$\zeta_m^t = \chi(b^p) = \chi^{\tau_1^{-1}}(b^p) = \chi(b^{p\tau_1})^{\tau_1^{-1}} = \chi(b^p[b^p,\tau_1])^j,$$

где j – целое число со свойством $(1+p^n)j \equiv 1 \pmod{p^m}$. Тогда $\zeta_m^t = \zeta_m^{tj}\chi([b^p,\tau_1])^j$, или $\chi([b^p,\tau_1]) = \zeta_m^{t(1-j)(1+p^n)} = \zeta_m^{tp^n}$. Следовательно, при $m \leqslant n$ $\chi([b,\tau_1]) = \zeta_1^{q_1}$, а при $m > n$ $\chi([b,\tau_1]) = \zeta_{m-n+1}^t\zeta_1^{q_1}$, где q_1 – целое число.

Вычислим теперь компоненту Λe_χ скрещенного произведения Λ. Так как G_χ является полупрямым расширением B/B_χ с помощью F_3, то Λe_χ содержит обычное скрещенное произведение Λ_0 группы F_3 и поля K_4, которое является матричной алгеброй порядка $|F_3|^2$. Вычислим централизатор Z_χ алгебры Λ_0. Рассмотрим элемент $w = b\zeta_{m+1}^{-t}\sqrt[p]{z_1}^{-q_1}\dots\sqrt[p]{z_r}^{-q_r}$. Непосредственно проверяется, что он коммутирует со всеми элементами алгебры Λ_0, следовательно, пара w, $\sqrt[p]{x}$ порождает алгебру обобщенных кватернионов $[z_1^{-q_1}\dots z_r^{-q_r}, x]$ над полем k, которая распадается, так как x ортогонален каждому из элементов z_i. Следовательно, распадается и алгебра Λe_χ, а значит и Λ.

Пусть теперь L_4 – алгебра Галуа, т.е. $x \in K_4^{*p}$. Выберем образующие $\tau_1,\dots,\tau_{r_1}$ группы Галуа максимального абелева периода p подрасширения поля K_4 так, чтобы один из автоморфизмов, скажем, τ_a, действовал на радикал $\sqrt[p]{x}$ по формуле $\sqrt[p]{x}^{\tau_a - 1} = \zeta_1$, а остальные образующие действовали на $\sqrt[p]{x}$ тривиально. Тогда группа Галуа $\widetilde{F}$ поля-ядра K_4 алгебры L_4 изоморфна F_3 и порождается автоморфизмами $\tau_1,\dots,\tau_a b,\dots,\tau_{r_1}$. Обозначим через $\widetilde{G}$ полный прообраз группы $\widetilde{F}$ в G_4. Далее мы будем рассматривать как скрещенное произведение $\Lambda = G_4 \times L_4$ группы G_4 с алгеброй L_4, так и $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{G} \times K_4$ группы $\widetilde{G}$ с полем-ядром K_4 алгебры L_4.

Пусть $\widetilde{\Lambda} e_\chi$ – простая компонента алгебры $\widetilde{\Lambda}$, соответствующая $\widetilde{F}$-операторному характеру χ группы B_1. Пусть, как и прежде, B_χ – ядро χ и $G_\chi = \widetilde{G}/B_\chi$. Обозначим через $\widetilde{H}$ подгруппу в $\widetilde{F}$, которой принадлежит круговое подрасширение поля K_4. Покажем, что

$D_0 \subset B_\chi$. Действительно, $\chi(d) = \chi^{(\tau_a b)^{-1}}(d) = \chi(d^{\tau_a b}) = \chi(d^b) = \chi(d)\chi(d_0)$, т.е. $\chi(d_0) = 1$ (мы воспользовались леммой 2, взяв в качестве H группу $\widetilde{H}$, тогда $\tau_a \in \widetilde{H}$ и действует на B_1 тривиально). Заметим, что и в этом случае B/B_χ является абелевой группой. Действительно, пусть $\bar{b} \in B/B_\chi$, тогда $\chi(\bar{b}) = \chi^{(\tau_a b)^{-1}}(\bar{b}) = \chi(\bar{b}^{\tau_a b}) = \chi(\bar{b}^b) = \chi(\bar{b})\chi([\bar{b}, b])$, т.е. $\chi([\bar{b}, b]) = 1$. Аналогично предыдущему случаю вычисляем значения $\chi([b, \tau_i])$.

Рассмотрим теперь компоненту Λe_χ алгебры Λ. Она содержит в качестве подалгебры скрещенное произведение $\Lambda_0 = F_3 \times K_4$, являющееся матричной алгеброй порядка $|F_3|^2$. Аналогично проверяется, что централизатор алгебры Λ_0 в Λe_χ является матричной алгеброй порядка p^2. Таким образом, Λe_χ распадается, а значит, распадается и алгебра Λ. По теореме 2.3 [5] распадается и алгебра $\widetilde{\Lambda}$. Таким образом, задача погружения $(K_4/k, \widetilde{G}, B_1)$ разрешима, а значит, разрешима и исходная задача $(K/k, G, B)$. Теорема доказана.

Литература

1. С. П. Демушкин, И. Р. Шафаревич, *Задача погружения для локальных полей.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **23**, No. 6 (1959), 823–840.
2. А. В. Яковлев, *Задача погружения полей.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **28**, No. 3 (1964), 645–660.
3. Б. Б. Лурье, *Задача погружения локальных полей с неабелевым ядром.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **31** (1973), 106–114.
4. Х. Кох, *Теория Галуа p-расширений.* Мир, М. (1973).
5. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* Наука, М. (1990).
6. С. П. Демушкин, *Группа максимального p-расширения локального поля.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **25** (1961), 329–346.

Ishkhanov V. V. and Lur'e B. B. Embedding problem with nonabelian kernel for local fields.

The embedding problem of local fields with p-group is equivalent to its associated Abelian problem if the inequality $d \geqslant r + 3$, where d and r are the numbers of generators of the Demushkin group and the Galois group of an embedded field, is valid.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А Стеклова РАН

E-mail: Ishkhan@pdmi.ras.ru, Lurje@pdmi.ras.ru

Поступило 30 января 2009 г.