Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

Н. В. Гравин, Д. Ю. Ширяев

АБНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЗАМКНУТЫМ ПОДМНОЖЕСТВАМ КОРНЕЙ

1. Введение

Пусть вначале G – произвольная группа, и $B \leqslant G$. Для произвольного подмножества $X \subseteq G$ здесь и далее $\langle X \rangle$ – это подгруппа, порожденная X. Подгруппа $B \leqslant G$ называется *абнормальной*, если для любого $g \in G$ выполнено

$$g \in \langle B, gBg^{-1} \rangle.$$

Приведем несколько очевидных примеров абнормальных подгрупп.

- Любая максимальная подгруппа в G либо нормальна, либо абнормальна.
- Нормализатор силовской подгруппы в конечной группе абнормален (аргумент Фраттини).
- Знаменитая теорема Титса утверждает, что борелевская подгруппа $B(\Phi, K)$ в группе Шевалле $G(\Phi, K)$ абнормальна в ней.

Ясно, что любая надгруппа P, $B \leqslant P \leqslant G$, абнормальной подгруппы $B \leqslant G$ сама абнормальна. Поэтому наибольший интерес представляют именно минимальные абнормальные подгруппы. Заметим, что в последнем примере группа $B(\Phi, K)$ не просто абнормальна в $G(\Phi, K)$, но и является минимальной среди абнормальных подгрупп (см., например, [1]). Известно, что надгруппы $B(\Phi, K)$, т.е. параболические подгруппы, играют огромную роль в изучении алгебраических групп.

Сформулируем, в порядке убывающей трудности, несколько задач о классификации (с точностью до сопряженности) минимальных абнормальных подгрупп, см. например [1].

Проблема 1. *Классифицировать минимальные абнормальные подгруппы в конечных простых группах и группах типа Ли.*

Уже из первого примера видно, что эта задача необычайно трудна, так как такая классификация дала бы совершенно новый взгляд на классификацию максимальных подгрупп в конечных группах типа Ли. Программа классификации максимальных подгрупп в конечных группах типа Ли находилась в последние десятилетия в центре внимания многих ведущих специалистов по теории конечных групп, в том числе Ашбахера, Зейтца, Либека и многих других. Из работ по описанию максимальных подгрупп видно, что в качестве первого шага к решению любой задачи о конечных простых группах следует решить аналогичную задачу о простых алгебраических группах над алгебраически замкнутым полем. Это естественно приводит нас к следующей задаче.

Проблема 2. *Классифицировать минимальные абнормальные подгруппы в простых алгебраических группах над алгебраически замкнутым полем.*

Однако, эта задача все еще чрезвычайно трудна. Из той роли, которую играют параболические подгруппы в изучении алгебраических групп, видно, что даже построение новых интересных классов минимальных абнормальных подгрупп имело бы огромное значение. В настоящей работе мы делаем один из самых первых шагов в этом направлении. А именно, мы рассматриваем следующую задачу.

Проблема 3. *Классифицировать минимальные абнормальные подгруппы в группах Шевалле, содержащие расщепимый максимальный тор.*

Из описания надгрупп максимальных торов следует, что в этом случае задачу можно переформулировать в чисто комбинаторных терминах. А именно, в работах Зейтса (для конечного поля) и Боревича, Вавилова, Дыбковой и О.Кинга (для бесконечного поля) было показано, что если поле K не слишком мало, то для любой подгруппы H, $T \leqslant H \leqslant G$, существует единственное замкнутое подмножество корней $S \subseteq \Phi$, такое, что $G(S) \leqslant H \leqslant N(S)$.

Таким образом, описание минимальных абнормальных подгрупп, содержащих T, сводится к следующей чисто комбинаторной задаче про системы корней.

Проблема 4. *Описать закнутые множества корней $S \subseteq \Phi$ такие, что*

$$w \in W\left(\langle S \cup w(S)\rangle^r\right)$$

для любого $w \in W$.

В настоящей работе эта задача полностью решается для классических систем корней. Сформулируем основной результат.

2. Постановка задачи и основные определения

Пусть Φ – неприводимая система корней, $S \subseteq \Phi$ – замкнутое подмножество корней, т.е.

$$\alpha, \beta \in S,\ \alpha + \beta \in \Phi \Rightarrow \alpha + \beta \in S.$$

Напомним несколько общеизвестных определений. *Редуктивной частью* замкутого подмножества корней $S \subseteq \Phi$ называется множество $S \cap -S$, обозначаемое S_r. Редуктивная часть является подсистемой корней в Φ. *Группой Вейля* $W(S)$ замкнутого подмножества корней S называется группа Вейля $W(S_r)$ подсистемы корней S_r. Будем обозначать действие элемента группы Вейля w на корень ϕ как $w(\phi)$, и на систему корней S как $w(S)$. Замыкание системы корней S обозначим $\langle S \rangle$.

Обозначение. Введем обозначение $S_w = \langle S \cup w(S) \rangle$.

Задача, стоящая перед нами, звучит следующим образом.

Постановка задачи. *Описать замкнутые множества корней $S \subseteq \Phi$ такие, что*

$$w \in W(S_w) = W(\langle S \cup w(S) \rangle^r)$$

для любого $w \in W$.

Такие замкнутые подмножества S будем называть *хорошими*, а все остальные замкнутые подмножества, соответственно, *плохими*. Основной результат, полученный в нашей работе, звучит следующим образом:

Теорема 2.1. *Пусть Φ – классическая система корней, т.е. типа A_n, B_n, C_n или D_n, и пусть дано замкнутое подмножество корней $S \subseteq \Phi$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Найдется $w \in W(\Phi)$ такой, что $w \notin W(S_w)$.*
2. *Найдется $w \in W(\Phi)$ такой, что $w \notin W(S_w)$, $w^2 = 1$.*

Замечание 2.1. Теорема 2.1 действительно дает классификацию хороших подмножеств корней в классических системах, так как действие инволюций на S очень просто описывается на языке весовых

графов. Именно на этом языке мы и будем в дальнейшем формулировать и доказывать результаты для каждой из четырех классических систем корней, доказывая при этом и теорему 2.1.

Напомним определение весового графа.

Весовой граф подмножества S системы корней Φ – это ориентированный граф, вершинам которого соответствуют веса данной системы, а стрелка из веса u в вес v проводится в том случае, если $u-v$ является корнем и при этом лежит в S.

Обозначение. Веса в данной работе будут обозначаться целыми числами, соответственно стрелку из вершины i в вершину j весового графа будем обозначать (i,j) (обозначения взяты из статьи Малышева [2], хотя в этой статье автор использовал другое представление систем корней в виде графов). Если в графе S проведена стрелка (i,j), будем писать $(i,j)\in S$, аналогично и для ребер. В дальнейшем изложении будем опускать слово *весовой* и говорить просто *граф* подмножества корней.

Определение 2.1. *Будем называть хорошим граф, соответствующий хорошему подмножеству корней в Φ, аналогично определяется и плохой граф. Граф, соответствующий множеству корней, будем обозначать той же буквой, что и это множество корней.*

Определение 2.2. *Стрелки (i,j) и (j,i) будем называть обратными друг к другу.*

Определение 2.3. *Редуктивной частью графа будем называть граф, получающийся из данного удалением всех стрелок, обратные к которым отсутствуют (это соответствует взятию редуктивной части множества корней).*

Определение 2.4. *Компонентой связности графа будем называть компоненту связности (в обычном смысле теории графов) его редуктивной части. Компоненте связности весового графа подмножества корней соответствует содержащаяся в этом подмножестве подсистема корней.*

Обозначение. Дополнение к множеству вершин A будем обозначать $\overline{A}$.

3. Основная часть

3.1. Случай $\Phi = A_n$. Множество весов для системы A_n – это орто-

нормированный базис

$$\{e_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

и соответствующие вершины графа мы обозначим натуральными числами от 1 до $n+1$. Множество корней системы A_n – это множество векторов

$$\{e_i - e_j, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1\}.$$

Определение 3.1. *Граф S называется транзитивно замкнутым, если он удовлетворяет свойству транзитивности: если в графе есть путь по стрелкам из вершины i в вершину j, то в нем есть стрелка из i в j, т.е. $(i,j) \in S$.*

Замечание 3.1. *Замыканию* подмножества корней в A_n будет соответствовать *транзитивное замыкание* графа. Забегая вперед, отметим, что в случае C_n это тоже будет верно, а вот в случаях B_n и D_n замыканию подмножества корней будет сооветствовать ограничение транзитивного замыкания графа на множество корней B_n и D_n соответственно.

Группой Вейля системы A_n является группа S_{n+1} перестановок на $n+1$ элементе, действующая всевозможными перестановками на вершинах графа. Для любой системы корней объединение (весовых) графов – это наложение их друг на друга, т. е. (весовой) граф, множество ребер которого есть объединение множеств ребер исходных графов. На языке графов $S_w = \langle S \cup w(S) \rangle$ строится следующим образом: мы берем объединение графов $S \cup w(S)$ и транзитивно замыкаем полученный граф.

Замечание 3.2. В случае системы A_n группа Вейля подсистемы корней S – это прямая сумма групп перестановок, действующих на компонентах связности графа S.

Теорема 3.1. *Пусть дано замкнутое подмножество корней $S \subseteq A_n$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Найдется $w \in W(A_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$.*
2. *Найдется $w \in W(A_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$, $w^2 = 1$.*
3. *Множество всех вершин весового графа S разбивается на четыре множества A, B, C, D, удовлетворяющие следующим двум условиям.*
   (a) *Множества B и C содержат поровну вершин, между ними нет стрелок, множества B и C не пусты.*

(b) *Нет стрелок из* $\overline{A}$ *в* A *и из* D *в* $\overline{D}$*; множества* A *и* D *могут быть пустыми.*

Замечание 3.3. Следствие ($1 \Rightarrow 3$) означает, что плохой граф и его матрица смежности имеют структуру, изображенную на Рис. 1:

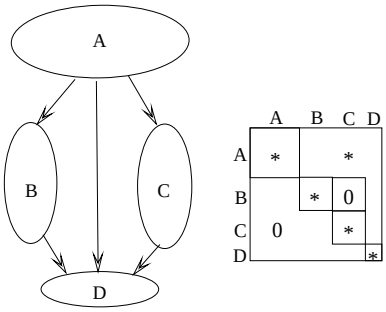

Рис. 1. Плохой граф и его матрица смежности.

Доказательство теоремы 3.1. Импликация ($2 \Rightarrow 1$) очевидна. Докажем ($3 \Rightarrow 2$). Пусть в графе S нашлись наборы компонент связности A, B, C, D, удовлетворяющие условиям (a), (b). Построим (нетривиальную) инволюцию $w \in W(\Phi)$ следующим образом. Установим биективное соответствие между вершинами из B и вершинами из C (из условия (a) следует, что это возможно). Пусть w посылает каждую вершину из B в сопоставленную ей вершину из C, каждую вершину из C в сопоставленную ей вершину из B, а все вершины из $A \cup D$ оставляет на месте. Ясно, что $w^2 = 1$. Осталось доказать, что $w \notin W(S_w)$, где $S_w = \langle S \cup w(S) \rangle$.

Лемма 3.1. *В графе* S_w *нет стрелок между* B *и* C.

Доказательство. Заметим, что граф $w(S)$ имеет ту же структуру, что и граф S, т.е. граф $w(S)$ удовлетворяет условиям (a), (b) (с теми же A, B, C, D). Это легко увидеть из Рис. 1 с изображением графа. Действительно, в графе $w(S)$ подграфы графа S на множествах B и C меняются местами. Стрелки внутри $A \cup D$ не меняются. Стрелка графа S из A в B в графе $w(S)$ превращается в стрелку из A в C, и наоборот, аналогично для стрелок из B или C в D. Поэтому и граф $S \cup w(S)$, имеет ту же структуру, а тогда и его транзитивное замыкание S_w тоже. Поэтому в S_w нет стрелок между B и C, что и требовалось.

Осталось заметить, что w переставляет вершины из B с вершинами из C. По лемме 3.1 эти вершины лежат в разных компонентах связности графа S_w, а значит в силу замечания 3.2 $w \notin W(S_w)$, что и требовалось доказать. Перейдем к доказательству ($1 \Rightarrow 3$). Пусть граф S – плохой, т.е. существуют $w \in W(A_n)$, $w \notin W(S_w)$.

Определение 3.2. *Компоненты связности графа S_w будем называть ящиками.*

Изобразим граф S_w на плоскости (см. Рис. 2). Вершинам графа соответствуют точки, стрелкам – стрелки, ящикам – прямоугольники, действиям элемента w – пунктирные стрелки. Из элементарной теории графов хорошо известно, что любой ориентированный граф можно расположить на плоскости таким образом, чтобы все стрелки были направлены (нестрого) сверху вниз, причем с каждой горизонтальной стрелкой в графе содержится обратная к ней стрелка. Мы изобразим наш граф именно таким образом. Итак, различные ящики располагаются на различных горизонталях, все вершины внутри одного ящика расположены на одной горизонтали, и все стрелки между вершинами из различных ящиков направлены строго сверху вниз.

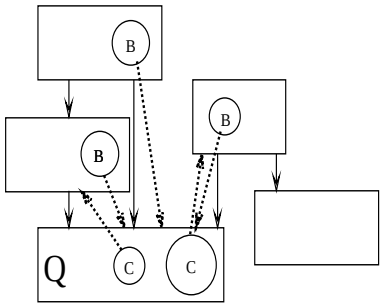

Рис. 2. Изображение графа S_w на плоскости, множества B и C..

Определение 3.3. *Назовем ящик особенным, если в нем найдется вершина, которая покидает этот ящик под действием w.*

Замечание 3.4. В случае системы A_n условие $w \notin W(S_w)$ равносильно тому, что в графе S_w найдется по крайней мере один особенный ящик (это ясно из замечания 3.2 о строении группы Вейля подсистемы корней в A_n).

Далее будем рассматривать построенное нами изображение графа S_w на плоскости. Рассмотрим *самый нижний* из всех особенных ящиков, назовем его Q (по замечанию 3.4 его существование следует из того, что S – плохой граф). Определим

$$B = \{b \notin Q \mid w(b) \in Q\},\ C = \{c \in Q \mid w(c) \notin Q\},$$

$$A = \{a \notin B \cup C \mid \exists x \in B \cup C : (a, x) \in S\},\ D = \overline{A \cup B \cup C}.$$

Легко видеть, что A, B, C, D являются разбиением всего множества вершин графа. Заметим также, что все вершины из B лежат в особенных ящиках, которые располагаются выше ящика Q. Докажем две вспомогательных леммы.

Лемма 3.2. *Выполнено условие* (а) *в пункте* 3 *теоремы* 3.1, *т.е. в графе S между B и C нет стрелок, в них поровну вершин и они не пусты.*

Доказательство. Сразу заметим, что C не пусто, т.к. ящик Q – особенный. Количество вершин в B равно количеству вершин, *попадающих* в Q *извне* под действием перестановки w, а количество вершин в C равно количеству вершин, *покидающих* Q под действием w, поэтому эти количества равны. В частности, т. к. C не пусто, B тоже не пусто. Докажем теперь, что в S нет стрелок между B и C. Стрелки из C в B быть не может, иначе она бы шла снизу вверх, а наш граф изображен так, что все стрелки направленны сверху вниз. Докажем, что не может быть стрелки из B в C. От противного, пусть $(b, c) \in S$, где $b \in B$, $c \in C$. Тогда $(w(b), w(c)) \in S_w$, т. к. $S_w \supseteq w(S)$. Но ведь $w(b)$ лежит в Q, а $w(c)$ в каком-то другом особенном ящике (особенный он потому, что под действием w в него что-то попадает извне, а значит что-то его под действием w покидает). Значит, $w(c)$ лежит выше $w(b)$, и стрелка $(w(b), w(c))$ в графе S_w направлена снизу вверх – противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.2. *В графе S не существует вершины $x \notin B \cup C$, из которой одновременно вела бы стрелка в $B \cup C$ и в которую бы входила стрелка из $B \cup C$.*

Доказательство. От противного. Предположим, такая вершина x нашлась, т.е. в $B \cup C$ нашлись две вершины y и z такие, что (y, x), $(x, z) \in S$. Если одна из вершин y, z лежит в B, а другая в C,

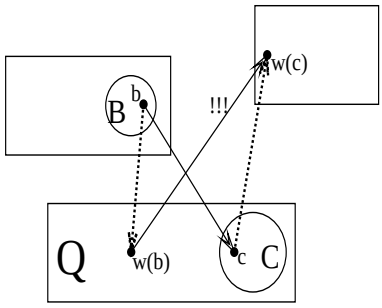

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству леммы 3.2, невозможность существования стрелок между B и C.

то существует путь между B и C (проходящий через x), и по транзитивности в S существует стрелка между B и C, что невозможно в силу леммы 3.2. Значит, либо обе вершины y и z лежат в B, либо обе в C. Разберем два этих случая.

1. $y, z \in B$. Заметим, что $(w(y), w(x))$, $(w(x), w(z)) \in S_w$. Но $w(y)$, $w(z) \in Q$ – а значит и $w(x) \in Q$, иначе появилась бы стрелка, направленная снизу вверх – $(w(y), w(x))$ или $(w(x), w(z))$. Из того, что $w(x) \in Q$, следует, что $x \in B \cup Q$. По условию леммы $x \notin B$, следовательно, $x \in Q$. Но тогда стрелка (x, z) вела снизу вверх – противоречие.

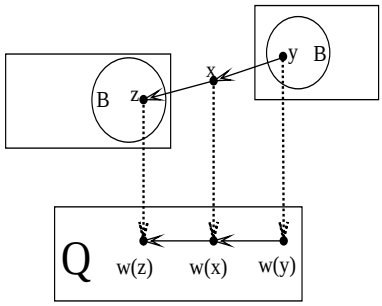

Рис. 4. Иллюстрация к доказательству леммы 3.3, часть 1.

2. $y, z \in C$. В частности, y, z лежат в ящике Q. Так как (y, x), $(x, z) \in S$, получаем, что x также лежит в Q (иначе одна из стрелок (y, x) и (x, z) была бы направлена снизу вверх). Вершина z лежит в C, поэтому $w(z)$ лежит *выше* Q в силу построения C. Но

из существования в графе S стрелки (x, z) следует существование в графе S_w стрелки $(w(x), w(z))$, поэтому $w(x)$ находится еще выше, чем $w(z)$, т.е. заведомо выше Q. Но тогда x покидает Q под действием w, т.е. $x \in C$, что противоречит предположению леммы о том, что $x \notin B \cup C$. Противоречие завершает доказательство леммы.

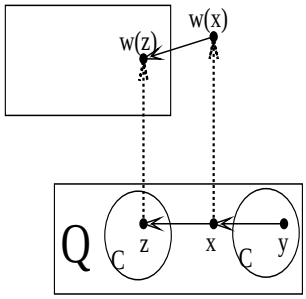

Рис. 5. Иллюстрация к доказательству леммы 3.3, часть 2.

Итак, построенные нами множества A, B, C, D по лемме 3.2 удовлетворяют условию (a). Остается проверить, что выполнено условие (b). Действительно, в A не может вести стрелка из $B \cup C$ в силу леммы 3.3. Из D не могут вести стрелки в $B \cup C$ по построению множества A. Стрелок из D в A быть не может, иначе в силу транзитивной замкнутости графа S нашлась бы стрелка из D в $B \cup C$. Таким образом оба условия (a), (b) выполнены, и следствие $(1 \Rightarrow 3)$ доказано, что вместе с тем завершает и доказательство теоремы 3.1.

3.2. Случай $\Phi = C_n$.

Множество весов для системы C_n – это $\{\pm e_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$, где e_i образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Обозначение. Соответствующие вершины весового графа мы обозначим целыми числами от 1 до $n+1$ (эти вершины будем изображать слева и называть *левыми*, или *положительными*) и от -1 до $-n-1$ (их будем изображать справа и называть *правыми*, или *отрицательными*). Расположим левые вершины вертикально одну под другой в порядке возрастания, а правые на одинаковом расстоянии справа от левых в порядке убывания. Таким образом для любого i на одной горизонтали с вершиной i окажется вершина $-i$.

Определение 3.4. *Вершины, располагающиеся на одной горизонтали, т.е. имеющие номера i и $-i$, будем называть двойственными (по отношению друг к другу). Множество, состоящее из вершин, двойственных к вершинам данного множества X, будем называть двойственным к X и обозначать $-X$.*

Замечание 3.5. Множество корней системы C_n – это множество векторов

$$\{\pm e_i \pm e_j,\ \pm 2e_i,\ 1 \le i < j \le n+1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

причем плюсы и минусы перед e_i и e_j независимы. Корню $\pm e_i \pm e_j$ соответствует пара стрелок $(\pm i,\ \mp j)$ и $(\pm j,\ \mp i)$, корню $2e_i$ соответствует стрелка $(i, -i)$.

Как и в случае A_n, в случае C_n каждому замкнутому подмножеству корней S соответствует транзитивно замкнутый граф S, обладающий следующим свойством:

$$(i, j) \in S \Leftrightarrow (-j, -i) \in S.$$

Определение 3.5. *Нетрудно заметить, что либо в компоненте связности (транзитивно замкнутого) графа все вершины встречаются вместе с двойственными к ним (такие компоненты будем называть полными), либо наоборот, компонента не содержит ни одной пары двойственных вершин (назовем их неполными). У любой неполной компоненты есть двойственная компонента, состоящая из вершин, двойственных к вершинам этой компоненты.*

Замечание 3.6. Группа Вейля $W(C_n) = S_{n+1} \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{n+1}$, причем S_{n+1} действует всевозможными перестановками на множестве положительных вершин (и теми же перестановками на множестве отрицательных), а $\mathbb{Z}_2^{n+1}$ меняет всевозможными способами знаки вершин (т.е. переставляет их с двойственными). Ясно при этом, что $\forall w \in W(C_n)$ если $w(i) = j$, то $w(-i) = -j$. Группа Вейля подсистемы корней S – это прямая сумма групп Вейля подсистем корней, соответствующих компонентам связности весового графа S, причем в случае неполной компоненты связности соответствующее слагаемое прямой суммы есть группа перестановок S_k на этой компоненте (и соответственно, на двойственной к ней), а в случае полной компоненты связности это $S_k \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^k$, и действует на этой компоненте как группа Вейля системы C_{k-1}.

В терминах весового графа утверждение теоремы практически не отличается от случая системы A_n.

Теорема 3.2. *Пусть дано замкнутое подмножество корней $S \subseteq C_n$. Следующие твержденния эквивалентны:*

1. *Найдется $w \in W(C_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$.*
2. *Найдется $w \in W(C_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$, $w^2 = 1$.*
3. *Множество всех вершин весового графа S разбивается на четыре множества A, B, C, D, удовлетворяющие следующим трем условиям.*
   (a) *Множества B и C содержат поровну вершин, между ними нет стрелок, множества B и C не пусты.*
   (b) *Нет стрелок из $\overline{A}$ в A и из D в $\overline{D}$; множества A и D могут быть пустыми.*
   (c) *Имеет место одна из трех ситуаций:*
   - $B = -C$
   - $-B \subseteq A$, $-C \subseteq A$
   - $B = -B$, $C = -C$.

Отличие формулировки от теоремы 3.1 лишь в добавлении третьего условия в утверждении (3), что обусловлено наличием в графе взаимосвязи между двойственными вершинами.

Доказательство теоремы 3.2. Импликация $(2 \Rightarrow 1)$ очевидна. Докажем $(3 \Rightarrow 2)$. Пусть нашлись A, B, C и D, удовлетворяющие условиям (a), (b), (c). Доказательство полностью аналогично доказательству $(3 \Rightarrow 2)$ в теореме 3.1. Есть лишь два небольших отличия. Во-первых, нужно доказать, что найдется $w \in W(C_n)$, который может переставить B и C местами. В каждой из трех ситуаций условия (c) это очевидно. Во-вторых, при перестановке множеств B и C также местами меняются множества $-B$ и $-C$, и нужно доказывать, что структура графа под действием такой перестановки не меняется. Опять же, в каждой из трех ситуаций в условии (c) очевидно, что и перестановка $-B$ и $-C$ также не меняет структуры графа (здесь под структурой, как и прежде, мы понимаем удовлетворение условий (a) и (b)). По построению, $w^2 = 1$.

Докажем теперь $(1 \Rightarrow 3)$. Докажем сперва вспомогательную лемму.

Лемма 3.4. *Если $i \in [1,\ n+1]$ таково, что $(i, -i), (-i,\ i) \notin S$, то для графа S выполняется утверждение* (3) *теоремы* 3.2.

Доказательство. В качестве B возьмем компоненту связности вершины i, в качестве C – компоненту связности вершины $-i$. Поскольку $(i, -i), (-i,\ i) \notin S$, компоненты B и C – двойственные, значит $B = -C$

и выполнено условие (c). Условию (a) граф S удовлетворяет по построению множеств B и C и по предположению, что между i и $-i$ стрелок нет (а значит, и между B и C их нет). Множества A и D определим аналогично тому, как это было сделано в доказательстве (1⇒3) теоремы 3.1. Из того, что B и C – компоненты связности графа S, следует, что выполняется утверждение леммы 3.3, а значит, и условие (b) в графе S выполнено. Таким образом, лемма 3.4 доказана.

Пусть граф S – плохой, и пусть, от противного, множество его вершин не разбить нужным нам образом на четыре множества. По лемме 3.4 можно считать, что между любой парой двойственных вершин проведена хотя бы одна стрелка. Определим самый нижний ящик Q и множества A, B, C и D как и в доказательстве (1⇒3) теоремы 3.1:

$$B = \{b \notin Q \mid w(b) \in Q\},\ C = \{c \in Q \mid w(c) \notin Q\},$$

$$A = \{a \notin B \cup C \mid \exists x \in B \cup C : (a, x) \in S\},\ D = \overline{A \cup B \cup C}.$$

Доказательства лемм 3.2 и 3.3 в этом случае дословно повторяются, поэтому условия (a) и (b) в части (3) теоремы 3.2 выполнены. Осталось доказать, что выполнено условие (c). Докажем две леммы в терминах построенных только что множеств A, B, C, D.

Лемма 3.5. $B \cap -C = \varnothing$.

Доказательство. От противного, пусть нашлась вершина $x \in B$, такая что $-x \in C$. По лемме 3.4 вершины x и $-x$ соединены стрелкой в S. Но это невозможно по доказанному уже условию (a), т. к. между B и C в S стрелок нет.

Лемма 3.6. *Либо* $\{B \cup C\} \cap \{-B \cup -C\} = \varnothing$, *либо* $B = -B$ *и* $C = -C$.

Доказательство. Пусть не выполнено первое, т. е. $\{B \cup C\} \cap \{-B \cup -C\} \neq \varnothing$, докажем второе. По лемме 3.5 $B \cap -C = \varnothing$, а значит, и $C \cap -B = \varnothing$. Остается две возможности: либо $B \cap -B \neq \varnothing$, либо $C \cap -C \neq \varnothing$. Рассуждения во втором случае полностью повторяют рассуждения в первом, поэтому мы ограничимся доказательством леммы в первом случае. Итак, пусть $B \cap -B \neq \varnothing$. Рассмотрим $x \in B$ такой, что и $-x \in B$. Необходимо доказать, что тогда $B = -B$ и $C = -C$. Вершины $w(x)$ и $w(-x)$ лежат в Q, причем $w(-x) = -w(x)$, поэтому в Q лежит пара двойственных вершин, а значит Q – полная компонента связности S_w, т. е. $Q = -Q$.

1. Докажем, что $B = -B$. Рассмотрим вершину $y \in B$. Докажем, что $-y \in B$. Вершины $x, y \in B$, следовательно, $w(x), w(y) \in Q$, и т. к. Q – компонента связности графа S_w, то $(w(x), w(y)), (w(y), w(x)) \in S_w$. Тогда и пара двойственных к этим стрелок есть в графе S_w, т. е. $(w(-x), w(-y), (w(y), w(x)) \in S_w$, но $w(-x) \in Q$, а значит, и $w(-y) \in Q$ (опять же, в силу того, что Q – компонента связности графа S_w). Значит, $-y$ под действием w попадает в Q, и либо лежит в B (что и требуется доказать), либо лежит в Q. Но в Q вершина $-y$ лежать не может, так как $Q = -Q$, и из $-y \in Q$ следует $y \in Q$ – противоречие с выбором $y \in B$. Таким образом, для произвольного $y \in B$ мы доказали, что $-y \in B$, а значит, $B = -B$.

2. Докажем, что $C = -C$. Рассмотрим вершину $z \in C$. Докажем, что $-z \in C$. Так как $Q = -Q$ и $C \subseteq Q$, то $-z \in Q$. От противного, пусть $-z \notin C$, т. е. $-z$ не покидает Q под действием w. Иными словами, $-w(z) = w(-z) \in Q$. Но $Q = -Q$, и вместе с $-w(z)$ в Q лежит и $w(z)$. Противоречие, т. к. $z \in C$. Для произвольного $z \in C$ получаем $-z \in C$, а значит $C = -C$.

Вернемся к доказательству теоремы 3.2, а именно, нам осталось доказать условие (c). Пусть не выполнена ситуация $B = -B, C = -C$. Тогда по лемме 3.6 $\{B \cup C\} \cap \{-B \cup -C\} = \varnothing$, иными словами, $-B \cup -C \subseteq A \cup D$. Докажем, что $-B \cap D = \varnothing$. От противного, пусть нашелся $x \in -B \cap D$. Заметим, что вершина $-x \in B$. В графе S стрелки $(x, -x)$ быть не может (т. к. нет стрелок из D в B), значит, в S есть стрелка $(-x, x)$ по лемме 3.4. Тогда в графе S_w есть стрелка $(w(-x), w(x))$, причем $w(-x) \in Q$. Вершина $w(x)$ лежит в каком-то особенном ящике (т. к. $x \in -B$), отличном от Q (т. к. $B \cap -B = \varnothing$). Противоречие, т. к. стрелка $(w(-x), w(x))$ ведет из Q в другой особенный ящик, а следовательно, направлена снизу вверх. Таким образом, доказано, что $-B \cap D = \varnothing$, а значит, $-B \subseteq A$. Несколько проще доказывается, что $-C \subseteq A$, и условие (c) выполнено, а именно выполняется ситуация $-B \subseteq A$, $-C \subseteq A$. Теорема 3.2 доказана.

3.3. Случай $\Phi = B_n$. Система весов B_n отличается от системы весов C_n добавлением нулевого веса. Напомним, что система корней B_n состоит из векторов

$$\{\pm e_i \pm e_j,\ \pm e_i,\ 1 \le i < j \le n+1\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

причем плюсы и минусы перед e_i и e_j независимы. Корню $\pm e_i$ в графе сопоставляется пара стрелок $(\pm i, 0)$, $(0, \mp i)$. Замыканию под-

множества корней соответствует пересечение транзитивного замыкания графа с графом B_n, т. е. замыкание графа на всех стрелках, кроме стрелок между двойственными вершинами.

Теорема 3.3. *Пусть дано замкнутое подмножество корней $S \subseteq B_n$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Найдется $w \in W(B_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$.*
2. *Найдется $w \in W(B_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$, $w^2 = 1$.*
3. *Либо в S найдется вершина $i \neq 0$, не соединенная с 0 стрелкой, либо S представляется в виде $X \sqcup -X \sqcup 0$, причем из любой вершины X ведет стрелка в 0, и X разбивается на четыре множества A, B, C, D, удовлетворяющие следующим двум условиям.*
   (a) *Множества B и C содержат поровну вершин, между ними нет стрелок, множества B и C не пусты.*
   (b) *Нет стрелок из $\overline{A}$ в A и из D в $\overline{D}$; множества A и D могут быть пустыми.*

Доказательство. Импликация $(2 \Rightarrow 1)$ очевидна. Докажем $(3 \Rightarrow 2)$. Разберем сперва случай, когда в графе S нашлась вершина i, не соединенная стрелкой с 0. Рассмотрим w, меняющий местами i и $-i$, а остальные вершины оставляющий на месте. Ясно, что $w^2 = 1$. Докажем, что $w \notin W(S_w)$. От противного, если $w \in W(S_w)$, то в $S \cup w(S)$ должна появиться стрелка между i и 0. Действительно, если этой стрелки нет, то либо i и $-i$ лежат в разных компонентах связности графа S_w (и тогда сразу $w \notin W(S_w)$), либо в одной компоненте типа D_k, т. е. компоненте, множество корней которой образует подсистему корней типа D_k. Но в этом случае $w \notin W(S_w)$ в силу того, что w меняет знак у нечетного количества вершин в соответствующей компоненте типа D_k. Значит, в $S \cup w(S)$ должен существовать путь между i и 0. Выберем самый короткий среди путей, соединяющих множество $\{i \cup -i\}$ с 0, не умаляя общности, это путь из i в 0, не проходящий по $-i$. Этого пути не было в графе S, но единственная стрелка на этом пути, которой могло не быть в графе S – это первая стрелка на пути, скажем, $(i,\ j)$. Но тогда в исходном графе была стрелка $(-i,\ j)$, а значит, и путь из $-i$ в 0 – противоречие. Пусть теперь в графе нет ненулевых вершин, не соединенных с 0. Тогда, в силу утверждения (3), граф $S = X \sqcup -X \sqcup 0$, $X = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$, и выполняются условия (a), (b). В этом случае доказательство аналогично случаю A_n, только структура графа такая, как на рис. 6.

На этом рисунке проведены все стрелки из X в 0, а вот стрелки из 0

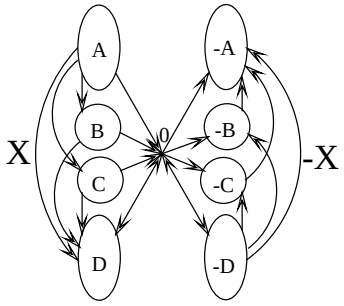

Рис. 6. Структура графа S в теореме 3.3.

в X идут исключительно в D, иначе по транзитивности в S появится стрелка между B и C. Заметим также, что стрелки из $-d \in -D$ в $-X \setminus -D$ быть не может, иначе найдется стрелка $(0, -d)$, а ввиду наличия стрелки $(d, 0)$ и стрелка из $d \in D$ в $X \setminus D$ – противоречие. Также не может быть стрелок из $x \in -X \setminus -D$ в X, т. к. иначе по транзитивности $(x,\ 0) \in S$, а значит, и $(0, -x) \in S$, где $-x \in X \setminus D$, а из 0 в $X \setminus D$ стрелок нет. Такая структура графа не нарушится под действием $w \in W(B_n)$, переставляющего B и C (а также $-B$ и $-C$) местами, и аналогично случаю A_n, мы получаем, что w – инволюция, для которой $w \notin W(S_w)$.

Докажем теперь $(1 \Rightarrow 3)$.

Пусть граф S – плохой, т. е. нашелся $w \in W(B_n)$, такой, что $w \notin W(S_w)$. Если в S существует вершина, не соединенная с 0, то утверждение (3) выполнено. От противного, между любой вершиной и 0 есть хотя бы одна стрелка, а значит, в любой паре двойственных вершин найдется вершина, из которой ведет стрелка в 0. Выберем в каждой паре двойственных вершин ту, из которой ведет стрелка в 0 (если таких вершин две, то берем любую из двух), и поместим ее в X. Тогда $S = X \sqcup -X \sqcup 0$, причем из любой вершины X ведет стрелка в 0. Для наглядности будем считать, что X – это множество положительных вершин (для этого просто сменим знаки у отрицательных вершин в X – граф S не перестанет быть плохим). Представим w в виде композиции $\pi \circ w_1$, где $w_1 \in S_{n+1}$, а $\pi \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$, т. е. w_1 переставляет вершины внутри левой и правой частей графа, а π меняет местами пары двойственных вершин. Докажем, что w_1 тоже плохой. Пусть это не так, т. е. $w_1 \in W(S_{w_1})$. Заметим, что $S_w \supseteq S_{w_1}$, т. к. между любыми двумя двойственными вершинами в

S проведена хотя бы одна стрелка, и под действием π двойственные вершины оказываются в одной компоненте связности. Обозначим множество элементарных отражений, композицией которых является элемент π, за $\hat{\pi}$. Т. к. $S_w \supseteq S_{w_1}$ и т. к. вершины, которые меняет местами π в графе S_w, соединены со своими двойственными, получаем, что $W(S_w) \supseteq \langle W(S_{w_1}), \hat{\pi}\rangle$. Но, в свою очередь, $\langle W(S_{w_1}), \hat{\pi}\rangle \supseteq w$. Поэтому, $W(S_w) \supseteq w$ – противоречие с тем, что w – плохой. Таким образом, доказано, что w плохой тогда и только тогда, когда плохим является w_1. Но действие w_1 достаточно рассматривать только на положительных вершинах, и далее доказательство дословно повторяет доказательство в случае системы A_n.

3.4. Случай $\Phi = D_n$. Множество весов в этом случае совпадает с множеством весов в случае C_n, а множество корней есть

$$\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i < j \leq n+1 \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

где плюсы и минусы перед e_i и e_j независимы. Замыканию подмножества корней соответствует пересечение транзитивного замыкания графа с множеством D_n, т. е. со множеством всех стрелок, кроме стрелок между двойственными вершинами, которых нет в системе D_n. Существенным отличием системы D_n от систем C_n и B_n является строение ее группы Вейля. Группа Вейля системы D_n это $S_{n+1} \ltimes \mathbb{Z}_2^n$, где S_{n+1}, как и прежде, переставляет положительные вершины между собой, а $\mathbb{Z}_2^n$ меняет знак у *четного* числа положительных вершин.

Теорема 3.4. *Пусть дано замкнутое подмножество корней $S \subseteq D_n$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Найдется $w \in W(D_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$.*
2. *Найдется $w \in W(D_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$, $w^2 = 1$.*
3. *Либо найдется пара недвойственных вершин i и j таких, что между $\{i, -i\}$ и $\{j, -j\}$ нет стрелок, либо множество всех вершин графа S разбивается на четыре множества A, B, C, D, удовлетворяющие следующим трем условиям.*
   (a) *Множества B и C содержат поровну вершин, между ними нет стрелок, множества B и C не пусты.*
   (b) *Нет стрелок из $\overline{A}$ в A и из D в $\overline{D}$; множества A и D могут быть пустыми.*
   (c) *Имеет место одна из двух ситуаций.*
      - *$B = -C$, причем в B четное количество вершин.*
      - *$-B \subseteq A$, $-C \subseteq A$.*

Доказательство. Импликация $(2 \Rightarrow 1)$ очевидна. Докажем $(3 \Rightarrow 2)$.

Пусть нашлась пара недвойственных вершин i и j таких, что между $\{i, -i\}$ и $\{j, -j\}$ нет стрелок. Рассмотрим $w \in W(D_n)$, переставляющий i с $-i$ и j с $-j$. Далее доказательство аналогично доказательству $(3 \Rightarrow 2)$ теоремы 3.3, нужно лишь в соответствующем месте заменить 0 вес на пару весов $\{j, -j\}$.

Если же такой пары вершин i и j в графе нет, то выполняется вторая альтернатива утверждения (3). В этом случае доказательство аналогично доказательству в случае C_n, т. е. доказательству $(3 \Rightarrow 2)$ теоремы 3.2. Единственное отличие – нужно проследить, чтобы можно было переставить местами B и C элементом группы $W(D_n)$, т. е. поменяв знак у четного числа положительных вершин – это обеспечивается условием (c).

Докажем теперь $(1 \Rightarrow 3)$. Пусть нашелся $w \in W(D_n)$ такой, что $w \notin W(S_w)$. В зависимости от вида w возможны два случая:

1. Перестановка w действует только внутри ящиков, т. е. для любой вершины x $(w(x), x), (x, w(x)) \in S_w$.

В этом случае единственная причина, по которой w может не лежать в $W(S_w)$, может быть в том, что существует полный ящик Q, в котором w меняет знак у *нечетного* числа положительных вершин. Но во всем графе w меняет знак у *четного* числа положительных вершин, следовательно, найдется еще хотя бы один полный ящик R, в котором w меняет знак у нечетного числа положительных вершин. Нам достаточно уже того, что в графе S_w нашлось два полных ящика. Зафиксируем вершины $q \in Q$ и $r \in R$. Заметим, что между полными ящиками Q и R не может быть стрелок, т. к. если есть стрелка из Q в R, то есть и стрелка из $-R$ в $-Q$, т. е. из R в Q, а значит, Q и R – одна компонента связности, противоречие. Но тогда между $\{q, -q\}$ и $\{r, -r\}$ нет стрелок, и выполняется первая альтернатива утверждения (3) (положив $i = q$, $j = r$).

2. Перестановка w действует не только внутри ящиков, т. е. существуют особенные ящики.

Ящик Q, множества B и C определяются так же, как и в доказательстве $(1 \Rightarrow 3)$ теоремы 3.1, и условия (a), (b) выполнены аналогично.

2.1. Пусть $B \cap -B \neq \varnothing$ или $C \cap -C \neq \varnothing$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3.6, получаем, что $B = -B$, $C = -C$, и взяв произвольно $i \in B$, $j \in C$, мы выполняем первую альтернативу утверждения (3).

2.2. Пусть $B \cap -B = \varnothing$, $C \cap -C = \varnothing$. Обозначим $X = B \cap -C$ (X может быть пустым). Обозначим $B_0 = B \setminus X$, $C_0 = C \setminus -X$.

2.2.1. Предположим, что $B_0 \neq \varnothing$. Заметим, что для новых $B = B_0$ и $C = C_0$ выполнено условие (a). Построим A_0 и D_0 обычным образом, т. е.

$$A_0 = \{a \notin B_0 \cup C_0 \mid \exists x \in B_0 \cup C_0 : (a, x) \in S\},\ D_0 = \overline{A_0 \cup B_0 \cup C_0}.$$

Докажем, что $-B_0 \subseteq A_0$. По построению B_0 и C_0, $-B_0 \cup -C_0 \subseteq A_0 \cup D_0$. Пусть нашлась вершина $x \in -B_0 \setminus A_0$, рассмотрим произвольную вершину $y \in C_0$. Если $(x, y) \in S$, то $x \in A_0$. При этом $(y, x) \notin S$, т. к. эта стрелка ведет из Q в какой-то другой особенный ящик (содержащий $-B_0$), т. е. направлена снизу вверх. Значит, между x и y стрелок нет. Но и между $-x$ и y стрелок нет, по условию (a) (т. к. $-x \in B_0$, $y \in C_0$). Таким образом нет стрелок между $\{x, -x\}$ и $\{y, -y\}$, и выполняется первая альтернатива утверждения (3) ($i = x$, $j = y$). Итак, мы доказали, что $B_0 \subseteq A_0$, аналогично $C_0 \subseteq A_0$, и выполнено условие (c). Осталось доказать, что для A_0, B_0, C_0, D_0 выполнено условие (b), а для этого достаточно проверить, что для $B = B_0$ и $C = C_0$ выполняется утверждение леммы 3.3. В случае, когда $x \notin X \cup -X$, доказательство леммы повторяется. Но $x \notin X \cup -X$, потому что из $B_0 \cup C_0$ нет стрелок в $X \cup -X$, это доказывается аналогично доказательству выполнения условия (a). Таким образом выполнены условия (a), (b), (c) второй альтернативы утверждения (3), а значит, утверждение (3) выполнено.

2.2.2. $B_0 = \varnothing$. Иными словами, $B = -C$. В этом случае $w(\{Q \cup -Q\}) = \{Q \cup -Q\}$. Докажем, что кроме $-Q$ и Q других особенных ящиков нет. От противного, выберем произвольную вершину y из особенного ящика, отличного от $Q \cup -Q$, выберем также $x \in C$. Если $(x, y) \in S$, то $(w(x), w(y)) \in S_w$, но $w(x) \in Q$, а $w(y)$ – в каком-то другом особенном ящике, и мы получаем в S_w стрелку, направленную снизу вверх – противоречие. Значит, $(x, y) \notin S$, аналогично и $(x, -y) \notin S$. Если $(y, x) \in S$, то $(-x, -y) \in S$, причем $-x \in C_0 \subseteq Q$, а $-y$ – выше Q, снова противоречие. Значит, $(y, x) \notin S$, аналогично $(y, -x) \notin S$. Но тогда выполнена первая альтернатива утверждения (3), где $i = x$, $j = y$.

Остался единственный случай, когда кроме $-Q$ и Q нет других особенных ящиков, то есть на множестве $S \setminus \{Q \cup -Q\}$ элемент w действует внутри ящиков. И если на множестве $Q \cup -Q$ элемент w меняет

знак у нечетного числа положительных вершин, то и на $S\setminus\{Q\cup -Q\}$ он меняет знак у нечетного числа положительных вершин, и для графа $S\setminus\{Q\cup -Q\}$ пройдет доказательство из пункта **1**. Таким образом, w меняет знак у *четного* числа положительных вершин в $Q\cup -Q$. Предположим, что в B нечетное число вершин. Рассмотрим $C' = w(C)$, $B' = w(B)$. Т. к. $C = -B$, то $C' = -B'$. Рассмотрим перестановку вершин π, меняющую знаки у вершин из B' и C'. Очевидно, она меняет знак у нечетного числа положительных вершин. Рассмотрим композицию $\pi\circ w$. Результат этой композиции должен, с одной стороны, менять знаки у нечетного числа положительных вершин. С другой стороны, $\pi\circ w$ действует внутри Q и $-Q$ соответственно, и если в Q он меняет знак у k положительных вершин, т. е. отправляет их слева направо, то он должен отправлять в Q и k вершин справа налево, а значит, в $-Q$ он должен отправлять k вершин слева направо, и значит, всего он меняет знак у $2k$ вершин, т. е. у четного числа – противоречие. Значит, в B – четное число вершин. В этом случае имеет место вторая альтернатива утверждения (3): в условии (c) выполнена первая альтернатива, а условия (a) и (b) доказываются аналогично случаю C_n.

3.5. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 2.1. Заметим, что в каждом из четырех классических случаев мы доказали следствие ($1\Rightarrow 2$), что и является утверждением теоремы 2.1.

Литература

1. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* Groups of Lie type and their geometries (Como, 1993), 233–280, London Math.Soc.Lecture Note Ser., 207, Cambridge Univ.Press, Cambridge (1995).
2. Ф. М. Малышев, *О замкнутых подмножествах корней и когомологиях регулярных подалгебр.* — Мат. сб. **104** (146)1(9) (1977), 140–150.
3. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* МЦНМО, М. (2003).
4. Е. А. Сопкина, *О сумме корней замкнутого множества*, Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 277–286.
5. D. Z. Djokovic, P. Check, and J.-Y. Hee, *On closed subsets of root systems.* — Canad. Math. Bull. **37**(3) (1884), 338–345.

Gravin N., Shiryaev D. Abnormal subgroups of classical groups corresponding to closed sets of roots.

In this paper we classify abnornal subgroups in classical Chevalley groups, containing split maximal torus. Classification problem is reduced to a combinatorial problem in terms of root systems, which is solved with use of weight graphs.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: dreamtaler@ gmail.com

Поступило 1 декабря 2008 г.