Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

А. И. Генералов, С. О. Иванов

БИМОДУЛЬНАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ

В последние годы в связи с исследованиями по когомологиям Хохшильда были построены бимодульные резольвенты для алгебр из разнообразных классов (см., например, статью [1] и цитируемую в ней литературу). Были также найдены связи таких резольвент с проективными резольвентами модулей над исходной алгеброй, а именно, в лемме Хаппеля [2] описываются члены бимодульной резольвенты конечномерной алгебры над полем с помощью минимальных проективных резольвент простых модулей над этой алгеброй. Настоящая работа возникла из попытки доказать аналог леммы Хаппеля для групповых алгебр конечных групп над произвольным коммутативным кольцом (см. ниже теорему 2). При этом мы используем утверждение, которое уже встречалось в литературе (см. предложение 1), однако недооценённое как инструмент построения бимодульных резольвент для групповых алгебр. Мы иллюстрируем такое использование этого результата на примере целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[D_{4m}]$ диэдральной группы порядка $4m$. Ранее бимодульная резольвента для $\mathbb{Z}[D_{4m}]$ была построена в [3] из других соображений.

Пусть R – коммутативное кольцо с 1, G и H – конечные группы. Мономорфизм групп $i : H \rightarrowtail G$ определяет функтор индуцирования $\operatorname{ind}_H^G : RH\text{-mod} \to RG\text{-mod}$ по следующему правилу $\operatorname{ind}_H^G(-) = RG \otimes_{RH} (-)$, где RG естественным образом рассматривается как правый RH-модуль.

Следующее предложение доказывается в неявном виде, например, в [4, 2.8.4]. Но ради полноты изложения мы приведем его вместе с доказательством.

Предложение 1. *Если $P_\bullet \to M$ – проективная резольвента RH-модуля M, то $\operatorname{ind}_H^G P_\bullet \to \operatorname{ind}_H^G M$ – проективная резольвента RG-модуля $\operatorname{ind}_H^G M$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{ind}_H^G RH \cong RG$ и ind_H^G сохраняет прямые суммы, то ind_H^G переводит проективные модули в проективные

модули.

Так как RG – свободный модуль над RH ранга $[G : H]$, то $\operatorname{ind}_H^G(-) = RG \otimes_{RH} (-)$ переводит точные последовательности в точные последовательности. Таким образом, $\operatorname{ind}_H^G P_\bullet \to \operatorname{ind}_H^G M$ – проективная резольвента.

Обозначим через $\operatorname{res}_H^G : RG\text{-mod} \to RH\text{-mod}$ "забывающий" функтор, индуцированный мономорфизмом $i : H \rightarrowtail G$. Хорошо известен факт о том, что функтор ind_H^G сопряжен справа и слева к res_H^G, смотри, например, [4, 3.3.1].

Следствие 1 (Лемма Экмана-Шапиро)**.**

$$\operatorname{Ext}^n_{RG}(\operatorname{ind}_H^G M, N) \cong \operatorname{Ext}^n_{RH}(M, \operatorname{res}_H^G N).$$

Доказательство. Пусть $P_\bullet \to M$ – проективная резольвента модуля M, тогда $\operatorname{ind}_H^G P_\bullet \to \operatorname{ind}_H^G M$ – проективная резольвента модуля $\operatorname{ind}_H^G M$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^n_{RG}(\operatorname{ind}_H^G M, N) &= \mathrm{H}^n(\operatorname{Hom}_{RG}(\operatorname{ind}_H^G P_\bullet, N)) \\ &\cong \mathrm{H}^n(\operatorname{Hom}_{RH}(P_\bullet, \operatorname{res}_H^G N)) = \operatorname{Ext}^n_{RH}(M, \operatorname{res}_H^G N).\end{aligned}$$

Рассмотрим конечную группу G и мономорфизм $\Delta : G \rightarrowtail G \times G^{\mathrm{op}}$, задаваемый формулой $\Delta(g) = (g, g^{-1})$. Обёртывающая алгебра $(RG)^{\mathrm{e}} = RG \otimes_R (RG)^{\mathrm{op}}$ алгебры RG изоморфна групповой алгебре произведения, $(RG)^{\mathrm{e}} \cong R[G \times G^{\mathrm{op}}]$, с которой мы её будем отождествлять. Гомоморфизм Δ продолжается по линейности до гомоморфизма соответствующих алгебр, для которого используем это же обозначение: $\Delta : RG \to (RG)^{\mathrm{e}}$.

Для краткости функтор $\operatorname{ind}_G^{G\times G^{\mathrm{op}}} : RG\text{-mod} \to (RG)^{\mathrm{e}}\text{-mod}$, рассматриваемый относительно мономорфизма $\Delta : G \to G \times G^{\mathrm{op}}$, будем обозначать через $\operatorname{ind}_\Delta$, а функтор $\operatorname{res}_G^{G\times G^{\mathrm{op}}} : (RG)^{\mathrm{e}}\text{-mod} \to RG\text{-mod}$ через $\operatorname{res}_\Delta$.

Будем считать, что на R задана структура тривиального G-модуля, а на RG – естественная структура RG-бимодуля, или эквивалентно $(RG)^{\mathrm{e}}$-модуля. Отметим, что $\operatorname{ind}_\Delta(R) \cong RG$; более подробно, гомоморфизм $\rho : \operatorname{ind}_\Delta R \to RG$ такой, что $\rho((g,h) \otimes r) = rgh$ для $g, h \in G$, $r \in R$, корректно определен и является изоморфизмом (обратным к нему является гомоморфизм $g \mapsto (g, 1) \otimes 1$).

Следующее утверждение также является известным (см., например, [5, стр. 465]).

Следствие 2. *Если* $P_\bullet \xrightarrow{\theta} R$ *– проективная резольвента тривиального* G*-модуля, то* $\operatorname{ind}_\Delta P_\bullet \xrightarrow{\rho\,\operatorname{ind}_\Delta\theta} RG$ *– проективная резольвента бимодуля* RG.

В качестве следствия можно привести стандартное утверждение о связи когомологий группы и когомологий Хохшильда её групповой алгебры [6, §5], [7, Гл.X, теорема 5.5].

Следствие 3. $\mathrm{HH}^n(RG, M) \cong \mathrm{H}^n(G, \widetilde{M})$, *где через* $\mathrm{HH}^n(RG, M)$ *обозначается* n*-ая группа когомологий Хохшильда алгебры* RG *с коэффицентами в бимодуле* M, *а через* $\widetilde{M}$ *–* R*-модуль* M, *рассматриваемый как* G*-модуль относительно действия* G *на* M *сопряжениями:* $g * m = gmg^{-1}$ $(g \in G,\ m \in M)$.

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{res}_\Delta M = \widetilde{M}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{HH}^n(RG, M) = \operatorname{Ext}^n_{(RG)^{\mathrm{e}}}(RG, M) &\cong \operatorname{Ext}^n_{(RG)^{\mathrm{e}}}(\operatorname{ind}_\Delta R, M)\\ &\cong \operatorname{Ext}^n_{RG}(R, \operatorname{res}_\Delta M) = \mathrm{H}^n(G, \widetilde{M});\end{aligned}$$

здесь второй изоморфизм получается с использованием следствия 1.

Гомоморфизм между свободными левыми модулями конечного ранга над некоторым кольцом будем представлять матрицей с элементами из соответствующего кольца, отождествляя каждый такой элемент с гомоморфизмом умножения на этот элемент справа.

Теорема 2. *Пусть* G *– конечная группа, и* $F_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} R$ *– свободная резольвента тривиального* G*-модуля, для которой* $F_\bullet = \Big((RG)^{k_n},\ d_n\Big)_{n\geqslant 0}$, *причём* $k_0 = 1$ *и пополняющий гомоморфизм равен* $\varepsilon(\sum r_g g) = \sum r_g$. *Тогда если обозначить* $\overline{F}_n = ((RG)^{\mathrm{e}})^{k_n}$, $(D_n)_{ij} = \Delta((d_n)_{ij})$ *и* $\overline{F}_\bullet = (\overline{F}_n,\ D_n)$, *то* $\overline{F}_\bullet \xrightarrow{\mu} RG$ *– свободная бимодульная резольвента, где* μ *– гомоморфизм умножения.*

Доказательство. Из предложения 1 следует, что $\operatorname{ind}_\Delta F_\bullet \xrightarrow{\operatorname{ind}_\Delta\varepsilon} \operatorname{ind}_\Delta R$ – свободная резольвента. Обозначим через $\alpha : \operatorname{ind}_\Delta RG \to (RG)^{\mathrm{e}}$ канонический изоморфизм свободных бимодулей, $\alpha((g,h) \otimes f) = (g,h)\Delta(f)$. Легко видеть, что α – естественный гомоморфизм, в том смысле, что диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc}\operatorname{ind}_\Delta RG & \xrightarrow{\operatorname{ind}_\Delta(\cdot x)} & \operatorname{ind}_\Delta RG\\ \cong\downarrow\alpha & & \cong\downarrow\alpha\\ (RG)^{\varepsilon} & \xrightarrow{\cdot\Delta(x)} & (RG)^{\varepsilon}\end{array}$$

коммутативны для любого $x \in RG$. Тогда морфизм градуированных модулей $A_n = \oplus\alpha : \operatorname{ind}_\Delta F_n \to \overline{F}_n$ будет коммутировать с дифференциалами, и, таким образом, $A = (A_n)_{n\geqslant 0}$ задает изоморфизм комплексов $A : \operatorname{ind}_\Delta F_\bullet \to \overline{F}_\bullet$. Осталось заметить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{ind}_\Delta F_\bullet & \xrightarrow{\operatorname{ind}_\Delta \varepsilon} & \operatorname{ind}_\Delta R \\ \cong\downarrow A & & \cong\downarrow \rho \\ \overline{F}_\bullet & \xrightarrow{\mu} & RG \end{array}$$

коммутативна.

Замечание. Доказанная теорема позволяет построить бимодульную резольвенту по имеющейся резольвенте тривиального G-модуля. В этом смысле она является аналогом леммы Хаппеля [2] (см. также уточнение в [8]), которая по минимальным резольвентам простых модулей над конечномерной алгеброй позволяет узнать модули в минимальной бимодульной резольвенте. Существенным отличием является то, что в нашем случае мы узнаем не только модули, но и дифференциалы.

В качестве примера применения теоремы 2 мы сравним бимодульную резольвенту для групповой алгебры $\mathbb{Z}[D_{4m}]$ диэдральной группы D_{4m}, описанную в [3], с бимодульной резольвентой, получаемой с помощью этой теоремы.

Пусть $S = \mathbb{Z}[G]$, где

$$G = D_{4m} = \langle b, c \mid b^2 = 1 = c^2, (bc)^m = (cb)^m \rangle \quad (m \geqslant 2),$$

и пусть $\Lambda = S^{\mathrm{e}} = S \otimes_{\mathbb{Z}} S^{\mathrm{op}}$.

Рассмотрим следующие элементы алгебры S:

$$\zeta^+ = \sum_{i=0}^{m-1} c(bc)^i + \sum_{i=0}^{m-1} (bc)^i,\ \eta^+ = \sum_{i=0}^{m-1} b(cb)^i + \sum_{i=0}^{m-1} (cb)^i,$$
$$\zeta^- = \sum_{i=0}^{m-1} c(bc)^i - \sum_{i=0}^{m-1} (bc)^i,\ \eta^- = \sum_{i=0}^{m-1} b(cb)^i - \sum_{i=0}^{m-1} (cb)^i,$$
$$\rho^+ = c(bc)^{m-1} + 1, \quad \omega^+ = b(cb)^{m-1} + 1,$$
$$\rho^- = c(bc)^{m-1} - 1, \quad \omega^- = b(cb)^{m-1} - 1.$$

В категории (левых) S-модулей построим следующий бикомплекс, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы

занумерованы числами $0, 1, 2, \dots$):

$$
\mathcal{A}_{\bullet\bullet}:\quad
\begin{tikzcd}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
S^2 \arrow[d, "d^-"'] & S^2 \arrow[l, "\sigma^-"'] \arrow[d, "d^-"] & S^2 \arrow[l, "\sigma^+"'] \arrow[d, "d^-"] & S^2 \arrow[l, "s^-"'] \arrow[d, "d^-"] & \cdots \arrow[l, "\tau^+"'] \\
S^2 \arrow[d, "d^+"'] & S^2 \arrow[l, "-\sigma^-"'] \arrow[d, "d^+"] & S^2 \arrow[l, "-\sigma^+"'] \arrow[d, "d^+"] & S \arrow[l, "-\tau^-"'] \arrow[d, "(b+1,c+1)"] & \\
S^2 \arrow[d, "d^-"'] & S^2 \arrow[l, "\sigma^-"'] \arrow[d, "d^-"] & S \arrow[l, "\tau^+"'] \arrow[d, "(b-1,c-1)"] & & \\
S^2 \arrow[d, "d^+"'] & S^2 \arrow[l, "-\tau^-"'] \arrow[d, "(b+1,c+1)"] & S & & \\
S^2 \arrow[d, "(b-1,c-1)"] & S & & & \\
S, & & & &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

где

$$
d^+ = \begin{pmatrix} b+1 & 0 \\ 0 & c+1 \end{pmatrix}, \quad d^- = \begin{pmatrix} b-1 & 0 \\ 0 & c-1 \end{pmatrix},
$$
$$
\tau^+ = \begin{pmatrix} \zeta^+ \\ -\eta^+ \end{pmatrix}, \qquad \tau^- = \begin{pmatrix} \zeta^- \\ -\eta^- \end{pmatrix},
$$
$$
\sigma^+ = \begin{pmatrix} \rho^+ & 0 \\ 0 & -\omega^+ \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} \rho^- & 0 \\ 0 & -\omega^- \end{pmatrix}.
$$

Аналогично доказательству теоремы 2.1 в [3] с помощью спектральной последовательности бикомплекса показывается, что тотализация $P_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$ бикомплекса из (1) вместе с пополняющим отображением $\varepsilon : Q_0 = S \to \mathbb{Z}$ представляет собой свободную резольвенту тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$.

Отметим, что другое описание резольвенты тривиального D_{2t}-модуля $\mathbb{Z}$ имеется в [9] (см. также [10]).

Теперь применяя теорему 2, получаем, что тотализация $\widetilde{Q}_\bullet = \mathrm{Tot}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet})$ следующего бикомплекса (в категории Λ-модулей) является

свободной резольвентой Λ-модуля S:

$$
\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}:\quad
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "D^{(-)}"'] & \cdots \arrow[d, "D^{(-)}"] & \cdots \arrow[d, "D^{(-)}"] & \cdots \arrow[d, "D^{(-)}"] & \\
\Lambda^2 & \Lambda^2 \arrow[l, "\Sigma^{(-)}"'] & \Lambda^2 \arrow[l, "\Sigma^{(+)}"'] & \Lambda^2 \arrow[l, "\Sigma^{(-)}"'] & \cdots \arrow[l, "\mathrm{T}^{(+)}"'] \\
\Lambda^2 \arrow[d, "D^{(+)}"'] & \Lambda^2 \arrow[l, "-\Sigma^{(-)}"'] \arrow[d, "D^{(+)}"] & \Lambda^2 \arrow[l, "-\Sigma^{(+)}"'] \arrow[d, "D^{(+)}"] & \Lambda \arrow[l, "-\mathrm{T}^{(-)}"'] \arrow[d, "(b^{(+)},c^{(+)})"] & \\
\Lambda^2 \arrow[d, "D^{(-)}"'] & \Lambda^2 \arrow[l, "\Sigma^{(-)}"'] \arrow[d, "D^{(-)}"] & \Lambda \arrow[l, "\mathrm{T}^{(+)}"'] \arrow[d, "(b^{(-)},c^{(-)})"] & & \\
\Lambda^2 \arrow[d, "D^{(+)}"'] & \Lambda \arrow[l, "-\mathrm{T}^{-}"'] \arrow[d, "(b^{(+)},c^{(+)})"] & & & \\
\Lambda \arrow[d, "(b^{(-)},c^{(-)})"] & & & & \\
\Lambda; & & & &
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

здесь

$$
\begin{aligned}
&b^{(\pm)} = b\otimes b \pm 1\otimes 1,\ c^{(\pm)} = c\otimes c \pm 1\otimes 1,\\
&D^{(\pm)} = \begin{pmatrix} b^{(\pm)} & 0 \\ 0 & c^{(\pm)} \end{pmatrix},\ \mathrm{T}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Z}^{(\pm)} \\ -\mathrm{H}^{(\pm)} \end{pmatrix},\\
&\Sigma^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{(\pm)} & 0 \\ 0 & -\Omega^{(\pm)} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Z}^{(\pm)} &= \sum_{i=0}^{m-1} c(bc)^i \otimes c(bc)^i \pm \sum_{i=0}^{m-1} (bc)^i \otimes (cb)^i,\\
\mathrm{H}^{(\pm)} &= \sum_{i=0}^{m-1} b(cb)^i \otimes b(cb)^i \pm \sum_{i=0}^{m-1} (cb)^i \otimes (bc)^i,\\
\mathrm{P}^{(\pm)} &= c(bc)^{m-1} \otimes c(bc)^{m-1} \pm 1\otimes 1,\\
\Omega^{(\pm)} &= b(cb)^{m-1} \otimes b(cb)^{m-1} \pm 1\otimes 1.
\end{aligned}
$$

Напомним, что в [3, (2.3)] также был построен бикомплекс $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ вида (2) (с другим описанием дифференциалов). Непосредственная проверка показывает, что резольвента $\widetilde{Q}_\bullet \xrightarrow{\mu} S$ изоморфна резольвенте $Q_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) \xrightarrow{\mu} S$ из [3]: изоморфизм устанавливается с помощью цепного отображения

$$\varphi = \Big(\varphi_i\Big)_{i\geqslant 0} : \widetilde{Q}_\bullet \to Q_\bullet,$$

где

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = \mathrm{id}, \quad \varphi_1 = \mathrm{diag}\Big(1\otimes b, 1\otimes c\Big),\\
&\varphi_2 = \mathrm{diag}\Big(1\otimes (bc)^m, \mathrm{id}, \mathrm{id}\Big),\\
&\varphi_3 = \mathrm{diag}\Big(1\otimes c(bc)^{m-1}, 1\otimes b(cb)^{m-1}, 1\otimes b, 1\otimes c\Big)
\end{aligned}$$

и для $i \geqslant 0$

$$\varphi_{i+4} = \begin{cases} \mathrm{diag}\Big(\varphi_i, 1\otimes (bc)^m, 1\otimes (bc)^m, \mathrm{id}, \mathrm{id}\Big), \\ \qquad \text{если } i \text{ чётно}, \\ \mathrm{diag}\Big(\varphi_i, 1\otimes c(bc)^{m-1}, 1\otimes b(cb)^{m-1}, 1\otimes b, 1\otimes c\Big), \\ \qquad \text{если } i \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.*I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21** (2009), в печати.
2. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math. **1404** (1989), 108–126.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.*I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19**, №5 (2007), 70–123.
4. D. J. Benson, *Representations and Cohomology* I*: Basic representation theory of finite groups and associative algebras.* Cambridge studies in advanced mathematics **30**, Cambridge University Press (1991).
5. M. Linckelmann, *Varieties in block theory.* — J. Algebra **215**, №2 (1999), 460–480.
6. S. Eilenberg, S. Mac Lane, *Cohomology theory in abstract groups.* I. — Ann. Math. **48** (1947), 51–78.
7. С.Маклейн, *Гомология.* М., Наука (1966).
8. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.

9. C. T. C. Wall, *Resolutions for extensions of groups.* — Proc. Cambridge Phil. Soc. **57**, No. 2 (1961), 251–255.
10. D. Handel, *On products in the cohomology of the dihedral groups.* — Tôhoku Math. J. **45**, No. 1 (1993), 13–42.

Generalov A. I., Ivanov S. O. Bimodule resolution of a group algebra.

The authors investigate relations of the bimodule resolution of the group algebra of a finite group G over a commutative ring with an usual projective resolution of the trivial G-module. In particular, the analogue of Happel's lemma is proved; this lemma was established earlier for finite dimensional algebras over fields. As an example of application of results, the bimodule resolution is constructed for the integer group ring of the dihedral group of order $4m$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 12 января 2009 г.