Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. VII. ЛОКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

Настоящая работа продолжает цикл работ [1–15], в которых были вычислены алгебры Йонеды для некоторых серий алгебр диэдрального или полудиэдрального типа из классификации К. Эрдман [16]. Используя технику работы [4], мы даём описание алгебры Йонеды для обеих серий локальных алгебр полудиэдрального типа, встречающихся в этой классификации. А именно, на основе некоторых эмпирических наблюдений выдвигается гипотеза о строении минимальной свободной резольвенты (единственного) простого модуля, и после обоснования этой гипотезы мы считываем "когомологическую информацию" с найденной резольвенты, что приводит к описанию алгебр Йонеды рассматриваемых алгебр.

Отметим, что техника работы [4] была недавно применена также для вычисления алгебры когомологий Хохшильда некоторых конечномерных алгебр (см. [17–22]).

1. Формулировка основных результатов

Пусть R – конечномерная алгебра над полем K. Все рассматриваемые модули – левые. Через

$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \operatorname{Ext}_R^m(M, M)$$

обозначим Ext-алгебру R-модуля M. Если R – базисная K-алгебра с радикалом Джекобсона $J(R)$, то Ext-алгебра $\mathcal{E}(R/J(R))$ называется алгеброй Йонеды алгебры R и обозначается через $\mathcal{Y}(R)$.

В дальнейшем предполагаем, что основное поле K алгебраически замкнуто.

Локальные алгебры полудиэдрального типа, составляющие одну из серий в классификации К. Эрдман (см. [16]), определяются следующим образом:

$$S_k := K\langle X, Y\rangle/(X^2 - Y(XY)^{k-1}, Y^2, (XY)^k - (YX)^k, X(YX)^k), \quad k \geqslant 2. \tag{1.1}$$

В случае, когда характеристика поля K отлична от двух, этим исчерпываются все локальные алгебры полудиэдрального типа. Отметим, что если G – полудиэдральная группа порядка 2^m, $m \geqslant 4$, а $\operatorname{char} K = 2$, то групповая алгебра KG изоморфна алгебре S_k из (1.1) для $k = 2^{m-2}$.

Если же $\operatorname{char} K = 2$, то в классификации К. Эрдман представлена ещё одна серия "исключительных" локальных алгебр полудиэдрального типа – это алгебры

$$R_k := R_k(c,d) := K\langle X, Y\rangle / I(c,d), \tag{1.2}$$

где $I(c,d)$ – идеал, порожденный элементами

$$X^2 - Y(XY)^{k-1} - c(XY)^k,\ Y^2 - d(XY)^k, \quad (XY)^k - (YX)^k, \quad X(YX)^k,$$

$k \geqslant 2$, а c, d – элементы поля K, не равные нулю одновременно.

Замечание 1.1. Отметим, что при $c \neq 0$ можно ограничиться рассмотрением алгебр $R_k(1,d)$, поскольку $R_k(c,d) \simeq R_k(1, dc^{\frac{6}{k}-5})$ (достаточно сделать замену переменных $\widetilde{x} = cx$, $\widetilde{y} = (1/c)^{\frac{k-3}{k}} y$).

Бóльшую часть вычислений, связанных с алгеброй Йонеды для алгебр S_k и R_k, удаётся провести единообразно, и поэтому мы в дальнейшем распространяем определение (1.2) на случай основного поля произвольной характеристики и, кроме того, считаем, что $S_k = R_k(0,0)$.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R_k(c,d))$ рассмотрим алгебру (некоммутирующих многочленов) $K\langle x_1, x_2, z, t\rangle$ и на ней введём градуировку так, что

$$\deg x_1 = \deg x_2 = 1, \quad \deg z = 3, \quad \deg t = 4. \tag{1.3}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{E}_d = K\langle x_1, x_2, z, t\rangle / I_d$, где идеал I_d порожден следующими однородными элементами:

$$x_1x_2,\ x_2x_1,\ x_2^3,\ x_2z, zx_2, \tag{1.4}$$

$$x_1z + zx_1 + dx_1^4,\ x_1t - tx_1,\ x_2t - tx_2, \tag{1.5}$$

$$zt - tz,\ x_1^2t - z^2. \tag{1.6}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{E}_d$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K\langle x_1, x_2, z, t\rangle$.

Теорема 1.2. *Пусть* $R = R_k(c,d)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $c, d \in K$, $c \in \{0,1\}$. *Алгебра Йонеды* $\mathcal{Y}(R)$ *алгебры* R *как градуированная алгебра изоморфна алгебре* $\mathcal{E}_d$.

Следствие 1.3. *Если* $\operatorname{char} K = 2$, *то*

$$\mathcal{Y}(S_k) \simeq K[x_1, x_2, z, t]/(x_1x_2,\ x_2^3,\ x_1^2t - z^2),$$

где $\deg x_1 = \deg x_2 = 1$, $\deg z = 3$, $\deg t = 4$.

Отметим, что кольцо когомологий полудиэдральной группы над полем из двух элементов уже было вычислено ранее (см. [23]).

2. Резольвента

Пусть $R = R_k(c,d)$, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $c, d \in K$, $c \in \{0,1\}$. Образы (в R) элементов $X, Y \in K\langle X, Y\rangle$ относительно канонического эпиморфизма обозначаем через x и y соответственно. Ясно, что множество

$$\{1\} \cup \left\{y(xy)^i, x(yx)^i\right\}_{i=0}^{k-1} \cup \left\{(xy)^i, (yx)^i\right\}_{i=1}^{k-1} \cup \left\{(xy)^k\right\}$$

является K-базисом алгебры R, в частности, $\dim_K R = 4k$. Кроме того, введём сокращённые обозначения для следующих элементов алгебры R:

$$\widetilde{y} := y - d \cdot x(yx)^{k-1}, \quad \psi := (yx)^{k-1} + c \cdot x(yx)^{k-1}.$$

Умножение справа на элемент $w \in R$ определяет гомоморфизм левых R-модулей $w^*\colon R \to R$, который часто обозначаем также через w.

Рассмотрим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами

$0, 1, 2, \dots$):

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & \cdots \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & & \\
 & & & & R \arrow[d, "x"'] & R \arrow[l, "-x"'] \arrow[d, "\psi"'] & R \arrow[l, "-yx"'] \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & R \arrow[l, "-y"'] & \cdots \\
 & & & & R & R \arrow[l, "y"'] & R \arrow[l, "\widetilde{y}"'] & R \arrow[l, "y"'] & \cdots \\
 & & & R \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & R \arrow[l, "-y"'] \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & R \arrow[l, "-\widetilde{y}"'] \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & R \arrow[l, "-y"'] & & \\
R \arrow[d, "x"'] & R \arrow[l, "-x"'] \arrow[d, "\psi"'] & R \arrow[l, "-yx"'] \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & R \arrow[l, "-y"'] \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & R \arrow[l, "-\widetilde{y}"'] \arrow[d, "x(yx)^{k-1}"'] & R \arrow[l, "-y"'] & & & \\
R & R \arrow[l, "y"'] & R \arrow[l, "\widetilde{y}"'] & R \arrow[l, "y"'] & R \arrow[l, "\widetilde{y}"'] & R \arrow[l, "y"'] & & &
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

Предложение 2.1. *Тотализация* $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* $B_{\bullet\bullet}$ *из* (2.1) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого* R*-модуля* S.

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью бикомплекса:

$$
E^2_{pq} = \mathrm{H}^v_p \mathrm{H}^h_q(B_{\bullet\bullet}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_{p+q}(\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})). \tag{2.2}
$$

Мы докажем, что второй лист этой спектральной последовательности вырождается.

Непосредственно проверяется, что

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\, y &= {}_K\langle\, \widetilde{y},\ \{y(xy)^i\}_{i=1}^{k-1},\ \{(xy)^i\}_{i=1}^{k}\ \rangle = \mathrm{Im}\, \widetilde{y}, \\
\mathrm{Ker}\, \widetilde{y} &= {}_K\langle\, \{y(xy)^i\}_{i=0}^{k-1},\ \{(xy)^i\}_{i=1}^{k}\ \rangle = \mathrm{Im}\, y, \qquad (2.3)\\
\mathrm{Ker}\, x &= {}_K\langle\, \{x(yx)^i\}_{i=1}^{k-1},\ \{(yx)^i\}_{i=1}^{k}\ \rangle = \mathrm{Im}\, yx, \\
\mathrm{Im}\, x &= {}_K\langle\, y(xy)^{k-1},\ \{x(yx)^i\}_{i=0}^{k-1},\ \{(yx)^i\}_{i=1}^{k}\ \rangle, \qquad (2.4)\\
\mathrm{Ker}\,(yx) &= {}_K\langle\, x(yx)^{k-1},\ \{y(xy)^i\}_{i=0}^{k-1},\ \{(xy)^i\}_{i=1}^{k}\ \rangle, \\
\mathrm{Coker}\,(y) &= {}_K\langle\, \overline{1},\ \{\overline{x(yx)^i}\}_{i=0}^{k-1},\ \{\overline{(yx)^i}\}_{i=1}^{k-1}\ \rangle, \\
\mathrm{Coker}\,(x) &= {}_K\langle\, \overline{1},\ \{\overline{y(xy)^i}\}_{i=0}^{k-2},\ \{\overline{(xy)^i}\}_{i=1}^{k-1}\ \rangle
\end{aligned}
$$

(здесь черта означает образ элемента в соответствующем фактор-модуле относительно канонического эпиморфизма). Отсюда следует, что на первом листе спектральной последовательности (2.2) столбцы с нечетными номерами содержат только нулевые члены. Кроме того, на этом листе в столбце с номером $2l$, $l \geqslant 1$, ненулевые члены включены в последовательность

$$0 \leftarrow \operatorname{Ker}(yx)/\operatorname{Im} y \xleftarrow{\overline{x(yx)^{k-1}}} \operatorname{Coker} y \xleftarrow{\overline{x}} \operatorname{Coker} x \leftarrow 0, \tag{2.5}$$

(здесь с помощью черты обозначается гомоморфизм, индуцированный умножением на соответствующий элемент из R). Поскольку $\operatorname{Ker}(yx)/\operatorname{Im} y = \langle\ \overline{x(yx)^{k-1}}\ \rangle$ (см. (2.3) и (2.4)), то непосредственно получаем, что последовательность в (2.5) точна во всех членах.

Наконец, на первом листе рассматриваемой спектральной последовательности столбец с номером 0 имеет следующий вид $\operatorname{Coker} y \xleftarrow{\overline{x}} \operatorname{Coker} x$, а из предыдущего следует, что $\overline{x}$ – мономорфизм с коядром, изоморфным S. Таким образом, $Q_\bullet = \operatorname{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ является проективной (=свободной) резольвентой модуля S, а ее минимальность следует из того, что по построению имеем $\operatorname{Im}(d_m^Q \colon Q_{m+1} \to Q_m) \subset \operatorname{Rad} Q_m$ для любого $m \geqslant 0$. □

Из предложения 2.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Для* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S,S) = \begin{cases} 2\left[\frac{m}{4}\right]+1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod 4, \\ 2\left[\frac{m}{4}\right]+2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим бикомплекс $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых строк в бикомплексе $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ из (2.1) с номерами 0 и 1 (а остальные строки в $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_\bullet = \operatorname{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$.

Предложение 2.3. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0,$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. По построению имеем $Q_n = X_n \oplus Q_{n-4}$ для $n \geqslant 4$. Пусть $i_n \colon X_n \to Q_n$ – вложение в качестве прямого слагаемого, а

$\pi_n\colon Q_n \to Q_{n-4}$ – проекция на соответствующее прямое слагаемое. Тогда утверждение предложения вытекает непосредственно из вида бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$. $\square$

Замечание 2.4. Далее всюду через Q_m обозначаем m-й член минимальной проективной резольвенты простого R-модуля S. По предложению 2.1 имеем $Q_m = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$, где $B_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс из (2.1), и мы будем использовать упорядочение прямых слагаемых в этом разложении по возрастанию второго индекса j. Через $d_m\colon Q_{m+1} \to Q_m$ обозначаем дифференциал в резольвенте $Q_\bullet$.

3. Образующие для алгебры Йонеды

Пусть по-прежнему $R = R_k(c,d)$, где $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $c, d \in K$, $c \in \{0,1\}$. В этом разделе мы укажем (конечное) множество образующих алгебры Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \operatorname{Ext}_R^m(S,S)$$

для алгебр из рассматриваемых серий.

Напомним (см. обозначения в [15]), что произведение Йонеды элементов $f \in \operatorname{Ext}_R^m(S,S)$ и $g \in \operatorname{Ext}_R^n(S,S)$ определяется отображением $(g \cdot f)\widehat{\ } = \widehat{g} \cdot \mathrm{T}^n(\widehat{f})$.

Введём в рассмотрение следующие однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_1 &= (1,\,0)\colon Q_1 = R^2 \to R, & x_1 &\in \operatorname{Ext}_R^1(S,S);\\
\widehat{x}_2 &= (0,\,1)\colon Q_1 = R^2 \to R, & x_2 &\in \operatorname{Ext}_R^1(S,S);\\
\widehat{z} &= (0,\,1)\colon Q_3 = R^2 \to R, & z &\in \operatorname{Ext}_R^3(S,S);\\
\widehat{t} &= (0,\,0,\,1)\colon Q_4 = R^3 \to R, & t &\in \operatorname{Ext}_R^4(S,S).
\end{aligned}$$

Отметим, что для краткости при описании матриц отображений мы часто тождественное отображение соответствующих модулей обозначаем через 1.

Предложение 3.1. *Для множества элементов алгебры* $\mathcal{Y}(R)$

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, z, t\} \tag{3.1}$$

выполняются соотношения

$$0 = x_1x_2 = x_2x_1 = x_2^3 = x_2z = zx_2, \tag{3.2}$$

$$x_1z + zx_1 = -dx_1^4, \quad x_1t = tx_1, \quad x_2t = tx_2, \tag{3.3}$$

$$zt = tz, \quad x_1^2t = z^2. \tag{3.4}$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений проводится аналогично доказательству предложения 3.1 в [15]. При этом нам необходимо знать трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{X}$.

Из предложения 2.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Для любого $i \geqslant 0$ проекция на прямое слагаемое $\pi_{i+4}\colon Q_{i+4} = X_{i+4} \oplus Q_i \to Q_i$ является i-ой трансляцией $\mathrm{T}^i(t)$ коцикла t.*

Кроме того, мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции остальных элементов из $\mathcal{X}$.

Лемма 3.3. *В качестве трансляций (порядков, не превосходящих 4) элементов x_1, x_2, z можно взять следующие отображения:*

$$\mathrm{T}^1(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d(xy)^{k-1} & y(xy)^{k-2} + c(xy)^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d(x - cy(xy)^{k-1}) & x - cy(xy)^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d\cdot 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^4(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d\cdot 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^1(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^2(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & cx(yx)^{k-1} \\ 0 & -y \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -cx(yx)^{k-1} & 0 \\ 0 & -d(yx)^{k-1} & (yx)^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$T^4(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & cx(yx)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^1(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (xy)^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x + cy(xy)^{k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^4(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке коммутативности некоторых квадратов (соответствующих цепным отображениям между резольвентами).

Теперь доказательство соотношений (3.2)–(3.4) проводится с помощью прямых вычислений (ср. [15, предложение 3.1]). □

Предложение 3.4. *Как K-линейные пространства приведенные ниже* Ext*-группы имеют следующие базисы:*

$$\mathrm{Ext}^1_R(S,S) = \langle x_1 \rangle, \qquad \mathrm{Ext}^1_R(S,S) = \langle x_2 \rangle,$$
$$\mathrm{Ext}^2_R(S,S) = \langle x_1^2, x_2^2 \rangle, \qquad \mathrm{Ext}^3_R(S,S) = \langle x_1^3, z \rangle,$$
$$\mathrm{Ext}^4_R(S,S) = \langle x_1^4, x_1 z, t \rangle.$$

Доказательство. В некоторых случаях требуемые равенства следуют непосредственно из определения элементов множества $\mathcal{X}$ из (3.1). В других случаях это делается с помощью вычислений, использующих подходящие трансляции отображений (ср. доказательство предложения 3.1). Детали вычислений мы предоставляем провести читателю. □

Предложение 3.5. *Множество $\mathcal{X}$ из* (3.1) *порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{Ext}_R^m(S,S) \simeq \mathrm{Hom}_R(Q_m, S),$$

то любому однородному элементу алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ соответствует некоторый R-гомоморфизм $f\colon Q_m \to S$. Используя предложение 3.4, можем считать, что $m \geqslant 5$. Индукцией по m докажем, что f представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней.

Можно считать, что $f(B_{m-i,i}) \neq 0$ ровно для одного значения i.

В зависимости от "локальной" конфигурации бикомплекса (2.1), в которую включается модуль $B_{m-i,i}$, мы будем строить коммутативные квадраты вида

$$\begin{array}{ccc} Q_{m+1} & \xrightarrow{d_m} & Q_m \\ {\scriptstyle\varphi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi_0}\big\downarrow \\ Q_{l+1} & \xrightarrow{d_l} & Q_l\,, \end{array} \tag{3.5}$$

такие, что $l < m$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi_0 \subset \mathrm{Ker}\,f$. Тогда найдется гомоморфизм $f'\colon Q_l \to S$, для которого $f'\varphi_0 = f$. При этом, используя то, что R – QF-алгебра, получаем: $\varphi_0 = \mathrm{T}^l(\tilde{\varphi})$ для некоторого $\tilde{\varphi}\colon Q_{m-l} \to S$, и остается применить индуктивное предположение к f' и $\tilde{\varphi}$.

Если $i \geqslant 2$, то с учётом предложения 2.3 мы можем построить коммутативную диаграмму вида (3.5), в которой полагаем $l = m-4$, $\varphi_0 = \pi_m$, $\varphi_1 = \pi_{m+1}$.

Теперь предположим, что $i \leqslant 1$. Если при этом m нечётно, то построим коммутативную диаграмму вида (3.5) с $l = 3$, в качестве φ_0 берем проекцию модуля Q_m на прямое слагаемое $B_{m,0} \oplus B_{m-1,1} \simeq Q_3$, а в качестве φ_1 берем проекцию модуля Q_{m+1} на прямое слагаемое $B_{m+1,0} \oplus B_{m,1} \oplus B_{m-1,2} \simeq Q_4$. Если же m чётно, то мы строим коммутативную диаграмму вида (3.5), в которой $l = 3$, в качестве φ_0 берем композицию проекции модуля Q_m на прямое слагаемое $B_{m,0} \oplus B_{m-1,1} \simeq R^2$ и отображения, определяемого матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d\cdot 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а в качестве φ_1 берем композицию проекции модуля Q_{m+1} на прямое слагаемое $B_{m+1,0} \oplus B_{m,1} \oplus B_{m-1,2} \simeq R^3$ и отображения, определяемого

матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d\cdot 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

4. Окончание доказательства теоремы 1.2

Пусть $R = R_k(c,d)$, и пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_d = K\langle x_1, x_2, z, t\rangle / I_d$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где I_d – соответствующий идеал соотношений (см. (1.4)–(1.6)). Образ в $\mathcal{E}$ монома из $K\langle x_1, x_2, z, t\rangle$ (относительно канонического эпиморфизма) также назовём мономом. Из предложений 3.1 и 3.5 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий образующие алгебры $\mathcal{E}$, являющиеся образами канонических образующих алгебры $K\langle x_1, x_2, z, t\rangle$, в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введенные в начале раздела 3 (мы не боимся двусмысленности в совпадении соответствующих обозначений). Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{E}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые. Теперь следующее утверждение завершает доказательство теоремы 1.2.

Предложение 4.1. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K(\mathcal{E}^m) = \dim_K \operatorname{Ext}^m_R(S,S). \tag{4.1}$$

Доказательство. Поскольку для $m = 0$ соотношение (4.1) очевидно, то дополнительно предполагаем, что $m > 0$. Введём обозначение $\rho_m = \dim_K \operatorname{Ext}^m_R(S,S)$.

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{E}$ (см. (1.4)–(1.6)) следует, что любой моном $f \in \mathcal{E}^m$ приводится к виду

$$f = x_1^\alpha x_2^\beta z^\gamma t^i, \quad \text{где} \quad \beta \in \{0,1,2\}, \quad \gamma \in \{0,1\}, \quad \alpha, i \in \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{4.2}$$

Назовём такое представление элемента f нормальной формой, а через $\widetilde{\rho}_m$ обозначим число нормальных форм степени m. Отметим, что

$$\rho_m \leqslant \dim_K \mathcal{E}^m \leqslant \widetilde{\rho}_m. \tag{4.3}$$

(a) Предположим, что f из (4.2) содержит множитель x_2. Тогда f не содержит x_1 и z. Следовательно, $f = x_2^\beta t^i$, где $\beta \in \{1,2\}$, $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

(б) Теперь предположим, что f не содержит x_2, но содержит z. Тогда $f = x_1^\alpha z t^i$, где $\alpha, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(в) Наконец, пусть в f не входят x_2 и z. Тогда $f = x_1^\alpha t^i$, где $\alpha, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Отсюда легко вытекает, что мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $4n, n > 0$:

$$\left\{x_1^{4(n-j)+1} z t^{j-1}\right\}_{j=1}^n, \quad \left\{x_1^{4(n-j)} t^j\right\}_{j=0}^n;$$

мономы степени $4n+1$:

$$x_2 t^n, \quad \left\{x_1^{4(n-j)+2} z t^{j-1}\right\}_{j=1}^n, \quad \left\{x_1^{4(n-j)+1} t^j\right\}_{j=0}^n;$$

мономы степени $4n+2$:

$$x_2^2 t^n, \quad \left\{x_1^{4(n-j)+3} z t^{j-1}\right\}_{j=1}^n, \quad \left\{x_1^{4(n-j)+2} t^j\right\}_{j=0}^n;$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{x_1^{4(n-j)} z t^j\right\}_{j=0}^n, \quad \left\{x_1^{4(n-j)+3} t^j\right\}_{j=0}^n.$$

Следовательно, с учётом следствия 2.2 получаем, что $\widetilde{\rho}_m = \rho_m$, и равенство (4.1) вытекает из (4.3). $\square$

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
2. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3, No. 15 (1999), 3–10.
3. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* II. — Алгебра и анализ **13** (2001), No. 1, 3–25.
4. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* I. — Алгебра и анализ **13** (2001), No. 4, 54–85.
5. N. V. Kosmatov, *Cohomology of algebras of dihedral type: automatic calculation.* — В кн.: Международн. алг. конф., посв. памяти З. И. Боревича. С.-Пб., 17–23 сент. (2002), 115–116.

6. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 9–36.
7. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* IV: серия $D(2\mathcal{B})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 76–89.
8. А. И. Генералов, Е. А. Осиюк, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* III: *серия* $D(2\mathcal{A})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 113–133.
9. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* III: серия $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 84–100.
10. A. I. Generalov, N. V. Kosmatov, *Computation of the Yoneda algebras of dihedral type.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 101–120.
11. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 81–116.
12. А. И. Генералов, Н. В. Косматов, *Проективные резольвенты и алгебры Йонеды для алгебр диэдрального типа: серия* $D(3\mathcal{Q})$. — Фунд. и прикл. матем. **10** (2004), вып. 4, 65–89.
13. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 131–154.
14. A. Generalov, N. Kosmatov, *Projective resolutions and Yoneda algebras for algebras of dihedral type.* — Algebras and Repr.Theory **10** (2007), No. 3, 241–256.
15. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* VI. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 183–198.
16. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lect. Notes Math. Vol. 1428. Berlin; Heidelberg, 1990.
17. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–122.
18. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* I*: обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 1, 55–107.
19. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 4, 39–82.
20. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II. *Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
21. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
22. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21** (2009) (в печати).
23. H. Sasaki, *The* mod 2 *cohomology algebras of finite groups with semidihedral Sylow* 2*-subgroups.* — Commun. Algebra **22** (1994), 4123–4156.

Generalov A. I. Cohomology of algebras of semidihedral type. VII. Local algebras.

The present paper continues the cycle of papers of the author (some among them – in collaboration), in which the Yoneda algebra are calcu-

lated for several families of algebras of dihedral and semidihedral type (in K. Erdmann's classification). In the paper, the Yoneda algebra is described (in terms of quivers with relations) for two families of local algebras of semidihedral type.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 27 января 2009 г.