Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

Ю. В. Волков

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА D_n. II

1. Введение

Пусть R – самоинъективная базисная алгебра над алгебраически замкнутым полем, имеющая конечный тип представления. Стабильный AR-колчан такой алгебры можно описать с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое должно совпадать с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). Если для алгебры R это ассоциированное дерево имеет тип A_n, то ввиду результатов [2] алгебра R стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо так называемой "алгебре Мёбиуса". В работе [3] была вычислена алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для полуцепных самоинъективных алгебр, а для алгебры Мёбиуса в [4] была вычислена подалгебра $\mathrm{HH}^{*r}(R)$ алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая однородными элементами, степень которых делится на r, где r – некоторый параметр, связанный с определяющими соотношениями алгебры R. В этих двух работах существенно использовался тот факт, что сизигия подходящего порядка R-бимодуля R описывается как скрученный бимодуль. Более прямой подход к вычислению когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса R был предложен в [5], где была построена периодическая минимальная проективная резольвента для алгебры R, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй. Затем в [6] эта резольвента была использована для вычисления аддитивной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, т.е. для алгебры Мёбиуса R были вычислены размерности групп $\mathrm{HH}^t(R)$.

Если для алгебры R это ассоциированное дерево имеет тип D_n, то ввиду результатов [7] алгебра R стабильно эквивалентна алгебре одного из 5 видов. Их колчаны с соотношениями представлены в этой же работе. В работе [8] с помощью техники, использованной в [5], была построена периодическая минимальная проективная резольвента для алгебр одного из этих видов, которая затем была использована для

описания аддитивной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. В данной работе также строится периодическая бимодульная резольвента для ещё одного вида алгебр, у которых ассоциированное дерево имеет тип D_n (см. теорему 1). Затем дано описание аддитивной структуры алгебры когомологий Хохшильда, полученное с помощью этой резольвенты (см. теоремы 2–4).

Отметим, что периодичность минимальной бимодульной резольвенты для стандартных самоинъективных алгебр конечного типа представления была доказана в [11] для всех случаев, за исключением серии алгебр, рассматриваемой в настоящей статье. Наконец, совсем недавно для всех самоинъективных алгебр конечного типа представления была доказана периодичность минимальной бимодульной резольвенты (см. [12]).

2. Бимодульная резольвента

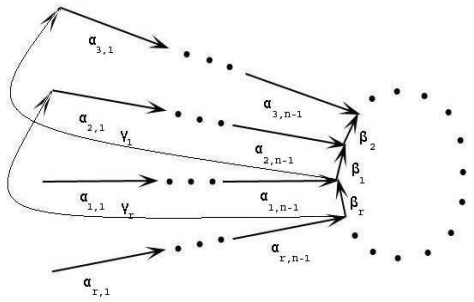
Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Зафиксируем r, $n \in \mathbb{N}$, $r \not\vdots 3$, $n \geqslant 2$. Введём следующий колчан с соотношениями (Q, I). Множество вершин $Q_0 = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant rn\}$; далее всегда считаем элементы из Q_0 определенными по модулю rn. Множество стрелок Q_1 колчана Q состоит из следующих элементов:

$$\alpha_{s,i} : (s-1)n + i \to (s-1)n + i + 1,$$

где $s \in \{1, \ldots, r\}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\gamma_s : sn \to (s+1)n + 1, \qquad \beta_s : sn \to (s+1)n$$

где $s \in \{1, \ldots, r\}$. При этом индекс s для $\alpha_{s,i}$, β_s и γ_s здесь и далее рассматривается по модулю r.



Идеал I порождён следующими элементами алгебры путей KQ колчана Q:

$$\gamma_s\alpha_{s,n-1},$$
$$\beta_{s+1}\beta_s - \alpha_{s+2,n-1}\dots\alpha_{s+2,1}\gamma_s,$$
$$\alpha_{s+3,t}\dots\alpha_{s+3,1}\gamma_{s+1}\beta_s\alpha_{s,n-1}\dots\alpha_{s,t},$$

где $s = 1,\dots,r$, $t = 1,\dots,n-2$. Легко понять, что последний элемент для $t = n-1$, $s = 1,\dots,r$ тоже лежит в I. Рассмотрим K-алгебру $R = KQ/I$. Из [7] следует, что R имеет древесный тип D_{3n}. Через $\Lambda = R\otimes R^{\mathrm{op}}$ обозначим обёртывающую алгебру алгебры R. Через $e_{i,j}$ ($1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant n$) обозначим идемпотент алгебры R, соответствующий $(i-1)n+j$-ой вершине колчана Q. При этом первый индекс в $e_{i,j}$ мы будем брать по модулю r. Тогда $\{e_{i_1,j_1}\otimes e_{i_2,j_2}\}_{i_1,j_1,i_2,j_2}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов алгебры Λ. Через $P_{i,j} = Re_{i,j}$ обозначим проективный R-модуль, соответствующий $(i-1)n+j$-ой вершине колчана Q, через $S_{i,j}$ – соответствующий ей простой R-модуль. Через $P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]} = \Lambda e_{i_1,j_1}\otimes e_{i_2,j_2}$ обозначим проективный Λ-модуль, соответствующий идемпотенту $e_{i_1,j_1}\otimes e_{i_2,j_2}$. Если w – некоторый путь в колчане Q из вершины $(i_1-1)n+j_1$ в вершину $(i_2-1)n+j_2$, то умножение справа на w индуцирует гомоморфизм $w^*: P_{i_2,j_2}\to P_{i_1,j_1}$, который мы будем обозначать через w. Таким образом, если w_1 – путь из вершины $(i_1-1)n+j_1$ в вершину $(i_2-1)n+j_2$, а w_2 – путь из вершины $(i_3-1)n+j_3$ в вершину $(i_4-1)n+j_4$, то $w_1\otimes w_2\in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i_2,j_2][i_3,j_3]}, P_{[i_1,j_1][i_4,j_4]})$.

Введем вспомогательные обозначения:

$$\tau_i = \gamma_{i+1}\beta_i,\quad \mu_{i,j} = \alpha_{i,j}\dots\alpha_{i,1},\quad \nu_{i,j} = \alpha_{i,n-1}\dots\alpha_{i,j}.$$

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем мы, для единообразия обозначений, дополнительно предполагаем, что пустое произведение стрелок колчана отождествляется с подходящим идемпотентом алгебры R; например, $\mu_{i,0} = e_{i,1}$, $\alpha_{i,j-1}\dots\alpha_{i,j} = e_{i,j}$, $\nu_{i,n} = e_{i,n}$.

Ясно, что множество

$$\begin{aligned} B_R =&\{\mu_{i+3,t-1}\tau_i\nu_{i,j} \mid 1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant t\leqslant j\leqslant n\}\\ &\cup\{\alpha_{i,t-1}\dots\alpha_{i,j} \mid 1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant t\leqslant n\}\\ &\cup\{\beta_i\nu_{i,j} \mid 1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant n\}\\ &\cup\{\mu_{i+2,j-1}\gamma_i \mid 1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant n\}\end{aligned}$$

образует K-базис алгебры R. Мы будем называть B_R стандартным базисом алгебры R.

Ясно, что $B_\Lambda = \{u \otimes v \mid u, v \in B_R\}$ образует K-базис алгебры Λ. Мы будем называть B_Λ стандартным базисом алгебры Λ. Ясно также, что $B_{[i_1,j_1][i_2,j_2]} = B_\Lambda \bigcap P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}$ – K-базис модуля $P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}$. Если же $P = \bigoplus\limits_{t=1}^{l} P_{[i_{1,t},j_{1,t}][i_{2,t},j_{2,t}]}$, а $m_t : P_{[i_{1,t},j_{1,t}][i_{2,t},j_{2,t}]} \to P$ – гомоморфизм вложения $P_{[i_{1,t},j_{1,t}][i_{2,t},j_{2,t}]}$ в P, то

$$B_P = \{m_t(u) | 1 \leqslant t \leqslant l, u \in B_{[i_{1,t},j_{1,t}][i_{2,t},j_{2,t}]}\}$$

– K-базис модуля P, который мы будем называть стандартным базисом модуля P.

Через $Q_i(S)$ $(i \geqslant 0)$ обозначим i-ый модуль в минимальной проективной резольвенте простого R-модуля S, а через Q_i – i-ый модуль в бимодульной проективной резольвенте Λ-модуля R. Тогда по лемме Хаппеля [9] (см. также [5, с. 45]), если $Q_t(S_{i,j}) = \bigoplus\limits_{k=1}^{l_{i,j}} P_{i_{k,i,j} j_{k,i,j}}$, то

$$Q_t = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{k=1}^{l_{i,j}} P_{[i_{k,i,j},j_{k,i,j}][i,j]}.$$

Построим минимальные проективные резольвенты модулей $S_{i,j}$.

Лемма 1. (1) *Пусть $1 \leqslant j \leqslant n-2$. Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля $S_{i,j}$ имеет следующий вид:*

$$0 \leftarrow S_{i,j} \longleftarrow P_{i,j} \xleftarrow{\alpha_{i,j}} P_{i,j+1} \xleftarrow{\rho_{i,j}} P_{i+3,j+1},$$

где

$$\rho_{i,j} = \mu_{i+3,j} \tau_i \nu_{i,j+1};$$

при этом $\Omega^2(S_{i,j}) \cong S_{i+3,j+1}$.

(2) *Начало минимальной проективной резольвенты модуля $S_{i,n-1}$ имеет следующий вид:*

$$0 \leftarrow S_{i,n-1} \longleftarrow P_{i,n-1} \xleftarrow{\alpha_{i,n-1}} P_{i,n} \xleftarrow{\gamma_i} P_{i+2,1} \xleftarrow{\rho_{i,n-1}} P_{i+5,1},$$

где

$$\rho_{i,n-1} = \tau_{i+2} \nu_{i+2,1};$$

при этом $\Omega^3(S_{i,n-1}) \cong S_{i+5,1}$.

(3.1) *Пусть* $n \vdots 2$. *Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля* $S_{i,n}$ *имеет вид*

$$0 \leftarrow S_{i,n} \longleftarrow Q_0(S_{i,n}) \xleftarrow{\varphi_0(S_{i,n})} Q_1(S_{i,n}) \xleftarrow{\varphi_1(S_{i,n})} \dots \xleftarrow{\varphi_{2n-2}(S_{i,n})} Q_{2n-1}(S_{i,n}),$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{4k}(S_{i,n}) &= P_{i+6k,n} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\Big),\\
Q_{4k+1}(S_{i,n}) &= P_{i+6k+1,n} \oplus P_{i+6k+2,2k+1}\\
&\qquad\qquad \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\Big),\\
Q_{4k+2}(S_{i,n}) &= P_{i+6k+2,n} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\Big),\\
Q_{4k+3}(S_{i,n}) &= P_{i+6k+5,2k+2} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\Big),\\
\varphi_{4k}(S_{i,n}) &= (\beta_{i+6k}, \mu_{i+6k+2,2k}\gamma_{i+6k}) \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\Big),\\
\varphi_{4k+1}(S_{i,n}) &= \begin{pmatrix} \beta_{i+6k+1} \\ -\nu_{i+6k+2,2k+1} \end{pmatrix} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\Big),\\
\varphi_{4k+2}(S_{i,n}) &= \mu_{i+6k+5,2k+1}\tau_{i+6k+2} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\Big),\\
\varphi_{4k+3}(S_{i,n}) &= \beta_{i+6k+5}\nu_{i+6k+5,2k+2} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-4}{2}\Big);
\end{aligned}$$

при этом $\Omega^{2n-1}(S_{i,n}) \cong S_{i+3n-1,n}$.

(3.2) *Пусть* $n \not\vdots 2$. *Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля* $S_{i,n}$ *имеет вид*

$$0 \leftarrow S_{i,n} \longleftarrow Q_0(S_{i,n}) \xleftarrow{\varphi_0(S_{i,n})} Q_1(S_{i,n}) \xleftarrow{\varphi_1(S_{i,n})} \dots \xleftarrow{\varphi_{4n-3}(S_{i,n})} Q_{4n-2}(S_{i,n}),$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{4k}(S_{i,n}) &= P_{i+6k,n} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\Big),\\
Q_{4k+1}(S_{i,n}) &= P_{i+6k+1,n} \oplus P_{i+6k+2,2k+1} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
Q_{4k+2}(S_{i,n}) &= P_{i+6k+2,n} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
Q_{4k+3}(S_{i,n}) &= P_{i+6k+5,2k+2} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{2n-1+4k}(S_{i,n}) &= P_{i+3n-1+6k-1,n} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\Big),\\
Q_{2n-1+4k+1}(S_{i,n}) &= P_{i+3n-1+6k+2,2k+1} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\Big),\\
Q_{2n-1+4k+2}(S_{i,n}) &= P_{i+3n-1+6k+3,n} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
Q_{2n-1+4k+3}(S_{i,n}) &= P_{i+3n-1+6k+4,n} \oplus P_{i+3n-1+6k+5,2k+2}\\
&\qquad \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
\varphi_{4k}(S_{i,n}) &= (\beta_{i+6k}, \mu_{i+6k+2,2k}\gamma_{i+6k}) \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
\varphi_{4k+1}(S_{i,n}) &= \begin{pmatrix} \beta_{i+6k+1} \\ -\nu_{i+6k+2,2k+1} \end{pmatrix} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
\varphi_{4k+2}(S_{i,n}) &= \mu_{i+6k+5,2k+1}\tau_{i+6k+2} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
\varphi_{4k+3}(S_{i,n}) &= \beta_{i+6k+5}\nu_{i+6k+5,2k+2} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
\varphi_{2n-2}(S_{i,n}) &= \beta_{i+3n-3},\\
\varphi_{2n-1+4k}(S_{i,n}) &= \mu_{i+3n-1+6k+2,2k}\tau_{i+3n-1+6k-1} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\Big),\\
\varphi_{2n-1+4k+1}(S_{i,n}) &= \beta_{i+3n-1+6k+2}\nu_{i+3n-1+6k+2,2k+1} \ \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
\varphi_{2n-1+4k+2}(S_{i,n}) &= (\beta_{i+3n-1+6k+3}, \mu_{i+3n-1+6k+5,2k+1}\gamma_{i+3n-1+6k+3})\\
&\qquad \Big(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\Big),\\
\varphi_{2n-1+4k+3}(S_{i,n}) &= \begin{pmatrix} \beta_{i+3n-1+6k+4} \\ -\nu_{i+3n-1+6k+5,2k+2} \end{pmatrix} \ (0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}),
\end{aligned}
$$

при этом $\Omega^{4n-2}(S_{i,n}) \cong S_{i+6n-2,n}$.

Доказательство. Проверить все пункты не представляет труда.

Следующие два утверждения вытекают из леммы 1.

Следствие 1. *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. *Тогда первые* $2n-1$ *члена минимальной проективной резольвенты модуля* $S_{i,j}$ *таковы:*

$$
\begin{aligned}
Q_{2m}(S_{i,j}) &= P_{i+3m,j+m} \qquad (m = 0, \dots, n-1-j),\\
Q_{2m+1}(S_{i,j}) &= P_{i+3m,j+m+1} \qquad (m = 0, \dots, n-2-j),\\
Q_{2n-1-2j}(S_{i,j}) &= P_{i+3(n-1-j),n},
\end{aligned}
$$

$$Q_{2m}(S_{i,j}) = P_{i+3m-1,j+m-(n-1)} \quad (m = n-j, \dots, n-1),$$
$$Q_{2m+1}(S_{i,j}) = P_{i+3m+2,j+m-(n-1)} \ (m = n-j, \dots, n-2).$$

Кроме того, для любого m модуль $Q_{m+2n-1}(S_{i,j})$ получается заменой в формуле для $Q_m(S_{i,j})$ всех модулей $P_{i',j'}$ на $P_{i'+3n-1,j'}$.

Следствие 2. (1) *Пусть $n \vdots 2$. Тогда для любых $1 \leqslant i \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant n$ имеем $\Omega^{2n-1}(S_{i,j}) \cong S_{i+3n-1,j}$;*

(2) *Пусть $n \not\vdots 2$. Тогда для любых $1 \leqslant i \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant n$ имеем $\Omega^{4n-2}(S_{i,j}) \cong S_{i+6n-2,j}$.*

Введём K-линейное отображение $\sigma : R \to R$, удовлетворяющее условию $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ и такое, что

$$\sigma(e_{i,j}) = e_{i+3n-1,j}, \quad \sigma(\alpha_{i,j}) \quad = \alpha_{i+3n-1,j} \ (1 \leqslant j \leqslant n-2),$$
$$\sigma(\alpha_{i,n-1}) = -\alpha_{i+3n-1,n-1}, \quad \sigma(\gamma_i) = -\gamma_{i+3n-1}, \ \sigma(\beta_i) = -\beta_{i+3n-1}.$$

Ясно, что σ – автоморфизм алгебры R. Этот автоморфизм имеет конечный порядок. Этот порядок описывается в следующем предложении.

Предложение 1. *Порядок σ равен $\frac{r}{\text{НОД}(r,3n-1)}$, если выполнено одно из условий:*

(а) $\frac{r}{\text{НОД}(r,3n-1)} \vdots 2$,
(б) $\operatorname{char} K = 2$.
В противном случае он равен $2\frac{r}{\text{НОД}(r,3n-1)}$.

Доказательство. Так как

$$\sigma^s(e_{i,j}) = e_{i+s(3n-1),j}, \quad \sigma^s(\alpha_{i,j}) = \alpha_{i+s(3n-1),j} \ (1 \leqslant j \leqslant n-2),$$
$$\sigma^s(\alpha_{i,n-1}) = (-1)^s \alpha_{i+3n-1,n-1},$$
$$\sigma^s(\gamma_i) = (-1)^s \gamma_{i+s(3n-1)}, \quad \sigma^s(\beta_i) = (-1)^s \beta_{i+s(3n-1)},$$

то порядок σ – это наименьшее натуральное s, удовлетворяющее условиям:

1. $s(3n-1) \vdots r$,
2. $(-1)^s = 1$.

Из условия 1 получаем, что порядок σ равен $a\frac{r}{\text{НОД}(3n-1,r)}$ для некоторого натурального a. Если выполнено одно из условий (а) или (б), то $\frac{r}{\text{НОД}(3n-1,r)}$ очевидно удовлетворяет условию 2, то есть мы можем взять $a = 1$. Если же не выполнено ни одно из условий (а) и (б), то ясно, что $a \vdots 2$. Также ясно, что $2\frac{r}{\text{НОД}(3n-1,r)}$ удовлетворяет условию 2, то есть надо взять $a = 2$. На этом доказательство предложения завершено.

Будем обозначать через $\rho\Lambda$ категорию конечно порожденных проективных (левых) Λ-модулей. Введём следующий K-линейный функтор $\sigma : \rho\Lambda \to \rho\Lambda$. Пусть $V = \bigoplus\limits_{l\in L} P_{[i_{2,l},j_{2,l}][i_{1,l},j_{1,l}]}$. Тогда

$$\sigma(V) = \bigoplus_{l\in L} P_{[\sigma(i_{2,l},j_{2,l})][i_{1,l},j_{1,l}]}$$

(здесь $\sigma(i,j) = (x,y) \Leftrightarrow \sigma(e_{i,j}) = e_{x,y}$). Пусть V_1, V_2 – модули из $\rho\Lambda$, $V_1 = \bigoplus\limits_{l\in L} P_{[i_{2,l},j_{2,l}][i_{1,l},j_{1,l}]}$, $d : V_1 \to V_2$ – гомоморфизм Λ-модулей, такой, что

$$d|_{P_{[i_{2,l},j_{2,l}][i_{1,l},j_{1,l}]}} = \sum_{t\in T} u_{l,t} w_{l,t,1} \otimes w_{l,t,2},$$

где $u_{l,t} \in K$, $w_{l,t,1}, w_{l,t,2} \in R$. Тогда

$$\sigma(d)|_{P_{[\sigma(i_{2,l},j_{2,l})][i_{1,l},j_{1,l}]}} = \sum_{t\in T} u_{l,t}\sigma(w_{l,t,1}) \otimes w_{l,t,2}.$$

Введём в рассмотрение следующие модули:

$$\begin{aligned} T_{2l} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(& P_{[i+3l,n][i,n]} \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-l} P_{[i+3l,j+l][i,j]} \Big) \\ & \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-l}^{n-1} P_{[i+3l-1,j+l-(n-1)][i,j]} \Big) \Big) \quad (l = 0,\dots,n-1), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} T_{2l+1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(& P_{[i+3l+1,n][i,n]} \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-l} P_{[i+3l,j+l+1][i,j]} \Big) \\ & \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-l}^{n} P_{[i+3l+2,j+l-(n-1)][i,j]} \Big) \Big) \quad (l = 0,\dots,n-1), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} T'_{2l} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(& P_{[i+3l-1,n][i,n]} \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-l} P_{[i+3l,j+l][i,j]} \Big) \\ & \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-l}^{n-1} P_{[i+3l-1,j+l-(n-1)][i,j]} \Big) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-1), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} T'_{2l+1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(& \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-l} P_{[i+3l,j+l+1][i,j]} \Big) \\ & \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-l}^{n} P_{[i+3l+2,j+l-(n-1)][i,j]} \Big) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из следствия 1 и леммы Хаппеля вытекает следующее описание членов минимальной проективной резольвенты Λ-модуля R.

1. Для чётного n положим

$$Q_{4k} = T_{4k}, \quad Q_{4k+1} = T_{4k+1}, \quad Q_{4k+2} = T'_{4k+2}, \quad Q_{4k+3} = T'_{4k+3}$$

для $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$. При этом члены с номерами, большими чем $2n-2$, получаются следующим образом: $Q_{l(2n-1)+t} = \sigma^l(Q_t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 2n-2$ (заметим, что $T'_{2n-1} = \sigma(T_0)$).

2. Для нечётного n положим

$$Q_{4k} = T_{4k}, Q_{4k+1} = T_{4k+1}, \quad Q_{4k+2} = T'_{4k+2}, \quad Q_{4k+3} = T'_{4k+3}$$

для $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$ в первой формуле и $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}$ в остальных трёх,

$$\begin{aligned} Q_{2n-1+4k} &= \sigma(T'_{4k}), & Q_{2n-1+4k+1} &= \sigma(T'_{4k+1}), \\ Q_{2n-1+4k+2} &= \sigma(T_{4k+2}), & Q_{2n-1+4k+3} &= \sigma(T_{4k+3}) \end{aligned}$$

для $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$ в первых двух формулах и $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}$ в двух оставшихся (заметим, что $\sigma(T'_0) \subset T_{2n-1}$). При этом члены с номерами, большими чем $4n-3$, получаются следующим образом: $Q_{l(4n-2)+t} = \sigma^{2l}(Q_t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 4n-3$ (заметим, что $\sigma(T'_{2n-1}) = \sigma^2(T_0)$).

Пусть $\mu : Q_0 \to R$ – гомоморфизм, определённый на $w_1 \otimes w_2 \in P_{[i,j][i,j]}$ по формуле $\mu(w_1 \otimes w_2) = w_1 w_2$. Мы построим гомоморфизмы $s_{2l} : T_{2l+1} \to T_{2l}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$, $s_{2l+1} : T'_{2l+2} \to T_{2l+1}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-2)$, $s'_{2l} : T'_{2l+1} \to T'_{2l}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$, $s'_{2l+1} : T_{2l+2} \to T'_{2l+1}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-2)$.

Определим s_{2l} для $0 \leqslant l \leqslant n-1$ на прямых слагаемых T_{2l+1} следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&s_{2l}|_{P_{[i+3l+1,n][i,n]}} \\
&= \beta_{i+3l} \otimes e_{i,n} + \sum_{m=n-l}^{n-1} \nu_{i+3l+1,m+l-(n-1)} \otimes \mu_{i+2,m-1}\gamma_i - e_{i+3l+1,n} \otimes \beta_i, \\
&s_{2l}|_{P_{[i+3l,j+l+1][i,j]}} = \alpha_{i+3l,j+l} \otimes e_{i,j} - e_{i+3l,j+l+1} \otimes \alpha_{i,j} \ (1 \leqslant j \leqslant n-2-l), \\
&s_{2l}|_{P_{[i+3l,n][i,n-1-l]}} = \alpha_{i+3l,n-1} \otimes e_{i,n-1-l} + \sum_{m=n-l}^{n-1} \beta_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)} \\
&\quad \otimes \alpha_{i,m-1} \dots \alpha_{i,n-1-l} - e_{i+3l,n} \otimes \nu_{i,n-1-l}, \\
&s_{2l}|_{P_{[i+3l+2,j+l-(n-1)][i,j]}} \\
&= -\sum_{m=j}^{n-1} \mu_{i+3l+2,j+l-n}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)} \otimes \alpha_{i,m-1} \dots \alpha_{i,j} \\
&\quad + \mu_{i+3l+2,j+l-n}\gamma_{i+3l} \otimes \nu_{i,j} + \sum_{m=n-l}^{j} \alpha_{i+3l+2,j+l-n} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)} \\
&\quad \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j} \ (n-l \leqslant j \leqslant n-1), \\
&s_{2l}|_{P_{[i+3l+2,l+1][i,n]}} = \mu_{i+3l+2,l}\gamma_{i+3l} \otimes e_{i,n} + \sum_{m=n-l}^{n-1} \alpha_{i+3l+2,l} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)} \\
&\quad \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i - e_{i+3l+2,l+1} \otimes \gamma_i.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом определим гомоморфизм s_{2l+1} для $0 \leqslant l \leqslant n-2$ на прямых слагаемых T'_{2l+2}:

$$
\begin{aligned}
&s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,n][i,n]}} = \beta_{i+3l+1} \otimes e_{i,n} - \nu_{i+3l+2,l+1} \otimes e_{i,n} \\
&- \sum_{m=1}^{n-1-l} \nu_{i+3l+2,m+l+1} \otimes \mu_{i+2,m-1}\gamma_i + e_{i+3l+2,n} \otimes \beta_i, \\
&s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+3,j+l+1][i,j]}} \\
&= \sum_{m=j}^{n-1-l} \mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,m+l+1} \otimes \alpha_{i,m-1} \dots \alpha_{i,j} \\
&+ \mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1} \otimes \nu_{i,j} + \alpha_{i+3l+3,j+l} \dots \alpha_{i+3l+3,l+1} \\
&\otimes \beta_i\nu_{i,j} + \sum_{m=1}^{j} \alpha_{i+3l+3,j+l} \dots \alpha_{i+3l+3,m+l+1} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j} \\
&(1 \leqslant j \leqslant n-2-l),
\end{aligned}
$$

$s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,1][i,n-1-l]}} = -\gamma_{i+3l} \otimes e_{i,n-1-l} - e_{i+3l+2,1} \otimes \alpha_{i,n-1-l}$,
$s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,j+l+2-n][i,j]}} = \alpha_{i+3l+2,j+l+1-n} \otimes e_{i,j} - e_{i+3l+2,j+l+2-n} \otimes \alpha_{i,j}$
$(n-l \leqslant j \leqslant n-1)$.

Определим s'_{2l} для $0 \leqslant l \leqslant n-1$ на прямых слагаемых T'_{2l+1} следующим образом:

$$s'_{2l}|_{P_{[i+3l,j+l+1][i,j]}} = \alpha_{i+3l,j+l} \otimes e_{i,j} - e_{i+3l,j+l+1} \otimes \alpha_{i,j} \ (1 \leqslant j \leqslant n-2-l),$$

$$s'_{2l}|_{P_{[i+3l,n][i,n-1-l]}} = \alpha_{i+3l,n-1} \otimes e_{i,n-1-l} + \sum_{m=n-l}^{n-1} \beta_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}$$
$$\otimes \alpha_{i,m-1} \dots \alpha_{i,n-1-l} - \beta_{i+3l-1} \otimes \nu_{i,n-1-l} + e_{i+3l,n} \otimes \beta_i \nu_{i,n-1-l},$$

$$s'_{2l}|_{P_{[i+3l+2,j+l-(n-1)][i,j]}} = -\sum_{m=j}^{n-1} \mu_{i+3l+2,j+l-n}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}$$
$$\otimes \alpha_{i,m-1} \dots \alpha_{i,j} + \mu_{i+3l+2,j+l-n}\tau_{i+3l-1} \otimes \nu_{i,j} - \mu_{i+3l+2,j+l-n}\gamma_{i+3l} \otimes \beta_i \nu_{i,j}$$
$$+ \sum_{m=n-l}^{j} \alpha_{i+3l+2,j+l-n} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i \nu_{i,j}$$
$$(n-l \leqslant j \leqslant n-1),$$

кроме того, положим

$$s'_{2l}|_{P_{[i+3l+2,l+1][i,n]}} = \mu_{i+3l+2,l}\tau_{i+3l-1} \otimes e_{i,n} - \mu_{i+3l+2,l}\gamma_{i+3l} \otimes \beta_i$$

$$+ \sum_{m=n-l}^{n-1} \alpha_{i+3l+2,l} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i + e_{i+3l+2,l+1} \otimes \gamma_i$$

для $0 \leqslant l \leqslant n-2$, и

$$s'_{2n-2}|_{P_{[i+3n-1,n][i,n]}}$$
$$= -\beta_{i+3n-2}\beta_{i+3n-3}\beta_{i+3n-4} \otimes e_{i,n} + \beta_{i+3n-2}\beta_{i+3n-3} \otimes \beta_i$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \beta_{i+3n-2}\nu_{i+3n-2,m} \otimes \mu_{i+2,m-1}\gamma_i - \beta_{i+3n-2} \otimes \beta_{i+1}\beta_i$$

$$- \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{i+3n-1,n-1} \dots \alpha_{i+3n-1,m} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i + e_{i+3n-1,n} \otimes \beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i.$$

Аналогичным образом определим гомоморфизм s'_{2l+1} для $0 \leqslant l \leqslant n-2$ на прямых слагаемых T_{2l+2}:

$$s'_{2l+1}|_{P_{[i+3l+3,n][i,n]}} = -\beta_{i+3l+2}\nu_{i+3l+2,l+1} \otimes e_{i,n}$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1-l} \beta_{i+3l+2}\nu_{i+3l+2,m+l+1} \otimes \mu_{i+2,m-1}\gamma_i$$
$$-\nu_{i+3l+3,l+1} \otimes \beta_i + \sum_{m=1}^{n-1-l} \nu_{i+3l+3,m+l+1} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i,$$
$$s'_{2l+1}|_{P_{[i+3l+3,j+l+1][i,j]}} = \sum_{m=j}^{n-1-l} \mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,m+l+1}$$
$$\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j} - \alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+1} \otimes \beta_i\nu_{i,j}$$
$$+ \sum_{m=1}^{j} \alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l+1} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n-2-l),$$

$$s'_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,1][i,n-1-l]}} = -\gamma_{i+3l} \otimes e_{i,n-1-l} - e_{i+3l+2,1} \otimes \alpha_{i,n-1-l},$$
$$s'_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,j+l+2-n][i,j]}} = \alpha_{i+3l+2,j+l+1-n} \otimes e_{i,j} - e_{i+3l+2,j+l+2-n} \otimes \alpha_{i,j}$$
$(n-l \leqslant j \leqslant n-1)$.

Определим гомоморфизмы d_i следующим образом:

1. Если n чётно, то определим d_i для $0 \leqslant i \leqslant 2n-2$ следующим образом:

$$d_i = \begin{cases} s_i, & \text{если } i = 4k \text{ или } i = 4k+1, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ s'_i, & \text{если } i = 4k+2 \text{ или } i = 4k+3, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. Если n нечётно, то определим d_i для $0 \leqslant i \leqslant 4n-3$ следующим образом:

$$d_i = \begin{cases} s_i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant 2n-3,\ i = 4k \\ & \text{или } i = 4k+1, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ s'_i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant 2n-3,\ i = 4k+2 \\ & \text{или } i = 4k+3, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ s_{2n-2}|_{\sigma(T'_0)}, & \text{если } i = 2n-2, \\ \sigma(s'_{i-(2n-1)}), & \text{если } 2n-1 \leqslant i \leqslant 4n-3, \quad i = 2n-1+4k \\ & \text{или } i = 2n-1+4k+1, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ \sigma(s_{i-(2n-1)}), & \text{если } 2n-1 \leqslant i \leqslant 4n-3, \quad i = 2n-1+4k+2 \\ & \text{или } i = 2n-1+4k+3, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда следующая теорема описывает минимальную проективную бимодульную резольвенту R.

Теорема 1. (1) *Пусть n чётно. Тогда минимальная Λ-проективная резольвента модуля R представляется последовательностью:*

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\mu} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \cdots \xleftarrow{d_{2n-3}} Q_{2n-2} \xleftarrow{d_{2n-2}} Q_{2n-1} \xleftarrow{d_{2n-1}} Q_{2n} \xleftarrow{d_{2n}} \cdots, \quad (2.5)$$

где модули Q_i для $i = 0, \ldots, 2n-1$ и гомоморфизмы d_i для $i = 0, \ldots, 2n-2$ описаны выше; кроме того, $Q_{l(2n-1)+t} = \sigma^l(Q_t)$, $d_{l(2n-3)+t} = \sigma^l(d_t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 2n-2$.

(2) *Пусть n нечётно. Тогда минимальная Λ-проективная резольвента модуля R представляется последовательностью:*

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\mu} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \cdots \xleftarrow{d_{4n-4}} Q_{4n-3} \xleftarrow{d_{4n-3}} Q_{4n-2} \xleftarrow{d_{4n-2}} Q_{4n-1} \xleftarrow{d_{4n-1}} \cdots, \quad (2.6)$$

где модули Q_i для $i = 0, \ldots, 4n-2$ и гомоморфизмы d_i для $i = 0, \ldots, 4n-3$ описаны выше; кроме того, $Q_{l(4n-2)+t} = \sigma^{2l}(Q_t)$, $d_{l(4n-2)+t} = \sigma^{2l}(d_t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 4n-3$.

Доказательство. То, что модули Q_i имеют указанный вид, было показано выше. Осталось доказать, что получившаяся последовательность гомоморфизмов точна. Сразу отметим, что точность в члене Q_0 – это хорошо известный факт (см., например, [10, предложение 2.1]). Ясно, что если последовательность $V_1 \xleftarrow{d_1} V_2 \xleftarrow{d_2} V_3$ точна в члене V_2, то последовательность $\sigma(V_1) \xleftarrow{\sigma(d_1)} \sigma(V_2) \xleftarrow{\sigma(d_2)} \sigma(V_3)$ точна в члене $\sigma(V_2)$. Из этого утверждения следует, что нам достаточно доказать точность следующих последовательностей:

1. $T_{2l} \xleftarrow{s_{2l}} T_{2l+1} \xleftarrow{s_{2l+1}} T'_{2l+2} \quad (0 \leqslant l \leqslant n-2)$,
2. $T_{2l+1} \xleftarrow{s_{2l+1}} T'_{2l+2} \xleftarrow{s'_{2l+2}} T'_{2l+3} \quad (0 \leqslant l \leqslant n-3)$,
3. $T'_{2l} \xleftarrow{s'_{2l}} T'_{2l+1} \xleftarrow{s'_{2l+1}} T_{2l+2} \quad (0 \leqslant l \leqslant n-2)$,
4. $T'_{2l+1} \xleftarrow{s'_{2l+1}} T_{2l+2} \xleftarrow{s_{2l+2}} T_{2l+3} \quad (0 \leqslant l \leqslant n-3)$,

5. $T_{2n-3} \overset{s_{2n-3}}{\leftarrow} T'_{2n-2} \overset{s'_{2n-2}}{\leftarrow} T'_{2n-1}$,

6. $T'_{2n-2} \overset{s'_{2n-2}}{\leftarrow} T'_{2n-1} (= \sigma(T_0)) \overset{\sigma(s_0)}{\leftarrow} \sigma(T_1)$,

7. $T'_{2n-3} \overset{s'_{2n-3}}{\leftarrow} T_{2n-2} \overset{s_{2n-2}|_{\sigma(T'_0)}}{\leftarrow} \sigma(T'_0)$,

8. $T_{2n-2} \overset{s_{2n-2}|_{\sigma(T'_0)}}{\leftarrow} \sigma(T'_0) \overset{\sigma(s'_0)}{\leftarrow} \sigma(T'_1)$,

так как любая последовательность $Q_i \overset{d_i}{\leftarrow} Q_{i+1} \overset{d_{i+1}}{\leftarrow} Q_{i+2}$ имеет вид $\sigma^k(V_1) \overset{\sigma^k(\varphi_1)}{\leftarrow} \sigma^k(V_2) \overset{\sigma^k(\varphi_2)}{\leftarrow} \sigma^k(V_3)$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $V_1 \overset{\varphi_1}{\leftarrow} V_2 \overset{\varphi_2}{\leftarrow} V_3$ одна из последовательностей 1–8.

То, что $d_i d_{i+1} = 0\ \forall i \geqslant 0$, доказывается прямыми, хотя и громоздкими, вычислениями. Мы покажем, как сделать это для последовательности 1.

Проверим равенство $s_{2l}s_{2l+1} = 0$ на прямых слагаемых T'_{2l+2}:

(A)

$$s_{2l}s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,n][i,n]}} = s_{2l}(\beta_{i+3l+1} \otimes e_{i,n} - \nu_{i+3l+2,l+1}$$

$$\otimes e_{i,n} - \sum_{m=1}^{n-1-l} \nu_{i+3l+2,m+l+1} \otimes \mu_{i+2,m-1}\gamma_i + e_{i+3l+2,n} \otimes \beta_i)$$

$$= (\beta_{i+3l+1}\beta_{i+3l} \otimes e_{i,n} + \sum_{m=n-l}^{n-1} \beta_{i+3l+1}\nu_{i+3l+1,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes \mu_{i+2,m-1}\gamma_i - \beta_{i+3l+1} \otimes \beta_i) - (\nu_{i+3l+2,l+1}\mu_{i+3l+2,l}\gamma_{i+3l} \otimes e_{i,n}$$

$$+ \sum_{m=n-l}^{n-1} \nu_{i+3l+2,l+1}\alpha_{i+3l+2,l} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i$$

$$-\nu_{i+3l+2,l+1} \otimes \gamma_i) - \sum_{m=1}^{n-2-l} (\nu_{i+3l+2,m+l+1}\alpha_{i+3l+2,m+l} \otimes \mu_{i+2,m-1}\gamma_i$$

$$-\nu_{i+3l+2,m+l+1} \otimes \alpha_{i+2,m}\mu_{i+2,m-1}\gamma_i) - (\alpha_{i+3l+2,n-1} \otimes \mu_{i+2,n-2-l}\gamma_i$$

$$+ \sum_{m=n-l}^{n-1} \beta_{i+3l+1}\nu_{i+3l+1,m+l-(n-1)} \otimes \alpha_{i+2,m-1} \dots \alpha_{i+2,n-1-l}\mu_{i+2,n-2-l}\gamma_i$$

$$-e_{i+3l+2,n} \otimes \nu_{i+2,n-1-l}\mu_{i+2,n-2-l}\gamma_i) + (\beta_{i+3l+1} \otimes \beta_i$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\nu_{i+3l+2,m+l-(n-1)}\otimes\mu_{i+3,m-1}\gamma_{i+1}\beta_i-e_{i+3l+2,n}\otimes\beta_{i+1}\beta_i)$$

$$=\nu_{i+3l+2,l+1}\otimes\gamma_i-(\nu_{i+3l+2,l+2}\alpha_{i+3l+2,l+1}\otimes\gamma_i-\nu_{i+3l+2,n-1}$$

$$\otimes\alpha_{i+2,n-2-l}\mu_{i+2,n-3-l}\gamma_i)-\alpha_{i+3l+2,n-1}\otimes\mu_{i+2,n-2-l}\gamma_i=0.$$

(Б) Пусть $1\leqslant j\leqslant n-2-l$. Тогда:

$$s_{2l}s_{2l+1}\big|_{P_{[i+3l+3,j+l+1][i,j]}}=s_{2l}\Big(\sum_{m=j}^{n-1-l}\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,m+l+1}$$

$$\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j}+\mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1}\otimes\nu_{i,j}+\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+1}$$

$$\otimes\beta_i\nu_{i,j}+\sum_{m=1}^{j}\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l+1}\otimes\mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j}\Big)$$

$$=\sum_{m=j}^{n-2-l}(\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,m+l+1}\alpha_{i+3l,m+l}\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j}$$

$$-\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,m+l+1}\otimes\alpha_{i,m}\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j})$$

$$+(\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\alpha_{i+3l,n-1}\otimes\alpha_{i,n-2-l}\dots\alpha_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\beta_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,n-1-l}\alpha_{i,n-2-l}\dots\alpha_{i,j}-\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}$$

$$\otimes\nu_{i,n-1-l}\alpha_{i,n-2-l}\dots\alpha_{i,j})+(\mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1}\beta_{i+3l}\otimes\nu_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1}\nu_{i+3l+1,m+l-(n-1)}\otimes\mu_{i+2,m-1}\gamma_i\nu_{i,j}$$

$$-\mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1}\otimes\beta_i\nu_{i,j})+(\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+1}\mu_{i+3l+3,l}\gamma_{i+3l+1}$$

$$\otimes\beta_i\nu_{i,j}+\sum_{m=n-l}^{n-1}\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+1}\alpha_{i+3l+3,l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\mu_{i+4,m-1}\tau_{i+1}\beta_i\nu_{i,j}-\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+1}\otimes\gamma_{i+1}\beta_i\nu_{i,j})$$

$$+\sum_{m=1}^{j}(\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l+1}\alpha_{i+3l+3,m+l}\otimes\mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j}$$

$$-\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l+1}\otimes\alpha_{i+3,m}\mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j})$$

$$=(\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,j+l+1}\alpha_{i+3l,j+l}\otimes e_{i,j}-\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,n-1}$$

$$\otimes\alpha_{i,n-2-l}\alpha_{i,n-3-l}\dots\alpha_{i,j})+(\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\alpha_{i+3l,n-1}\otimes\alpha_{i,n-2-l}\dots\alpha_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\beta_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j})$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1}\nu_{i+3l+1,m+l-(n-1)}\otimes\mu_{i+2,m-1}\gamma_i\nu_{i,j}$$

$$+\Big(\sum_{m=n-l}^{n-1}\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l-(n-1)}\otimes\mu_{i+4,m-1}\tau_{i+1}\beta_i\nu_{i,j}$$

$$-\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+1}\otimes\gamma_{i+1}\beta_i\nu_{i,j})$$

$$+(\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+2}\alpha_{i+3l+3,l+1}\otimes\tau_i\nu_{i,j}-e_{i+3l+3,j+l+1}$$

$$\otimes\alpha_{i+3,j}\mu_{i+3,j-1}\tau_i\nu_{i,j})=\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,j+l}\otimes e_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\beta_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1}\nu_{i+3l+1,m+l-(n-1)}\otimes\mu_{i+2,m-1}\gamma_i\nu_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\mu_{i+4,m-1}\tau_{i+1}\beta_i\nu_{i,j}-e_{i+3l+3,j+l+1}\otimes\mu_{i+3,j}\tau_i\nu_{i,j}=0,$$

так как каждое слагаемое в получившейся сумме равно 0.

(B)

$$s_{2l}s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,1][i,n-1-l]}}=s_{2l}(-\gamma_{i+3l}\otimes e_{i,n-1-l}$$

$$-e_{i+3l+2,1}\otimes\alpha_{i,n-1-l})=-(\gamma_{i+3l}\alpha_{i+3l,n-1}\otimes e_{i,n-1-l}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\gamma_{i+3l}\beta_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,n-1-l}-\gamma_{i+3l}$$

$$\otimes\nu_{i,n-1-l})-\Big(-\sum_{m=n-l}^{n-1}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,n-l}\alpha_{i,n-1-l}+\gamma_{i+3l}\otimes\nu_{i,n-l}\alpha_{i,n-1-l}$$

$$+e_{i+3l+2,1}\otimes\mu_{i,n-1-l}\tau_i\nu_{i,n-l}\alpha_{i,n-1-l}\Big)=-\gamma_{i+3l}\alpha_{i+3l,n-1}$$

$$\otimes e_{i,n-1-l}-e_{i+3l+2,1}\otimes\mu_{i,n-1-l}\tau_i\nu_{i,n-l}\alpha_{i,n-1-l}=0,$$

так как оба слагаемых равны 0.

(Г) Пусть $n-l\leqslant j\leqslant n-2$. Тогда:

$$s_{2l}s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,j+l+2-n][i,j]}}=s_{2l}(\alpha_{i+3l+2,j+l+1-n}\otimes e_{i,j}-e_{i+3l+2,j+l+2-n}$$

$$\otimes\alpha_{i,j})=\Big(-\sum_{m=j}^{n-1}\alpha_{i+3l+2,j+l+1-n}\mu_{i+3l+2,j+l-n}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j}+\alpha_{i+3l+2,j+l+1-n}\mu_{i+3l+2,j+l-n}\gamma_{i+3l}\otimes\nu_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{j}\alpha_{i+3l+2,j+l+1-n}\alpha_{i+3l+2,j+l-n}\dots\alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j}\Big)-\Big(-\sum_{m=j+1}^{n-1}\mu_{i+3l+2,j+l+1-n}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j+1}\alpha_{i,j}+\mu_{i+3l+2,j+l+1-n}\gamma_{i+3l}\otimes\nu_{i,j+1}\alpha_{i,j}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{j+1}\alpha_{i+3l+2,j+l+1-n}\dots\alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)}\otimes\mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j+1}\alpha_{i,j}\Big)$$

$$=-\mu_{i+3l+2,j+l-(n-1)}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,j+l-(n-1)}$$

$$\otimes e_{i,j}-e_{i+3l+2,j+l+2-n}\otimes\mu_{i,j}\tau_i\nu_{i,j}=0,$$

так как оба слагаемых равны 0.

(Г′)

$$s_{2l}s_{2l+1}|_{P_{[i+3l+2,l+1][i,n-1]}}=s_{2l}(\alpha_{i+3l+2,l}\otimes e_{i,n-1}$$

$$-e_{i+3l+2,l+1}\otimes\alpha_{i,n-1})=(-\alpha_{i+3l+2,l}\mu_{i+3l+2,l-1}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,l}$$

$$\otimes e_{i,n-1}+\alpha_{i+3l+2,l}\mu_{i+3l+2,l-1}\gamma_{i+3l}\otimes\nu_{i,n-1}$$

$$+\sum_{m=n-l}^{n-1}\alpha_{i+3l+2,l}\alpha_{i+3l+2,l-1}\dots\alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)}\otimes\mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,n-1})$$

$$-(\mu_{i+3l+2,l}\gamma_{i+3l}\otimes\alpha_{i,n-1}+\sum_{m=n-l}^{n-1}\alpha_{i+3l+2,l}\dots\alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)}$$

$$\otimes\mu_{i+3,m-1}\tau_i\alpha_{i,n-1}-e_{i+3l+2,l+1}\otimes\gamma_i\alpha_{i,n-1})=-\mu_{i+3l+2,l}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,l}$$

$$\otimes e_{i,n-1}+e_{i+3l+2,l+1}\otimes\gamma_i\alpha_{i,n-1}=0,$$

так как оба слагаемых равны 0.

Случай последовательности 1 разобран.

Итак, имеем $\mathrm{Im}(d_{i+1})\subset\mathrm{Ker}\,(d_i)$ $\forall i\geqslant 0$, и теперь надо проверить, что $\mathrm{Ker}\,(d_i)\subset\mathrm{Im}(d_{i+1})$ $\forall i\geqslant 0$. Как уже было замечено, достаточно проверить это включение для последовательностей 1–8, указанных в начале доказательства. Для начала определим $W(w)$ – вес пути w. Если w – вершина, то $W(w)=0$. Если w – стрелка, то:

$$W(w)=\begin{cases}1 & \text{если } w=\alpha_{i,j}, \text{ где } 1\leqslant j\leqslant n-1,\ 1\leqslant i\leqslant r,\\ n+1 & \text{если } w=\gamma_i, \text{ где } 1\leqslant i\leqslant r,\\ n & \text{если } w=\beta_i, \text{ где } 1\leqslant i\leqslant r.\end{cases}$$

В остальных случаях определим вес с помощью соотношения $W(ww')=W(w)+W(w')$, где w, w' – пути, такие, что конец w' совпадает с началом w. Мы покажем, что условие $\mathrm{Ker}\,(d_i)\subset\mathrm{Im}(d_{i+1})$ $\forall i\geqslant 0$ выполнено для последовательности 1. Случаи последовательностей 2–8 разбираются по той же схеме.

Предположим, что $s_{2l}(w)=0$ для $w\in T_{2l+1}$. Докажем, что тогда $w\in\mathrm{Im}(s_{2l+1})$. Пусть:

$$w=\sum_{p=1}^{t}\varkappa_p u_p\otimes v_p, \tag{2.7}$$

где $\varkappa_p\in K$, $u_p\otimes v_p$ – различные элементы стандартного базиса модуля T_{2l+1}. Для фиксированного p ввиду (2.2) выполнено одно из условий:

(1) $u_p\otimes v_p\in P_{[i+3l+1,n][i,n]}$, $\quad 1\leqslant i\leqslant r$;

(2) $u_p\otimes v_p\in P_{[i+3l,j+l+1][i,j]}$, $\ 1\leqslant j\leqslant n-2-l,\ 1\leqslant i\leqslant r$;

(3) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l,n][i,n-1-l]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$;

(4) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+2,j+l-(n-1)][i,j]}$, $n-l \leqslant j \leqslant n-1$, $1 \leqslant i \leqslant r$;

(5) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+2,l+1][i,n]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Мы уже знаем, что $\operatorname{Im} s_{2l+1} \subset \operatorname{Ker} s_{2l}$. С помощью последовательных добавлений к w подходящих элементов из $\operatorname{Im} s_{2l+1}$ мы придем к нулевому элементу, откуда получим обратное включение.

Сначала докажем, что мы можем считать, что разложение (2.7) удовлетворяет следующему условию:

$$\text{если } \varkappa_p \neq 0, \text{ то } u_p = e_{i,j} \text{ для некоторых } i \text{ и } j. \tag{2.8}$$

Предположим, что это не так. Тогда возьмём $u_p \otimes v_p$ такое, что $\varkappa_p \neq 0$, $u_p \neq e_{i,j}$ и вес пути u_p максимален среди всех $u_q \neq e_{i,j}$, таких, что $\varkappa_q \neq 0$. Далее разберём указанные выше случаи (1)–(5).

(1) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+1,n][i,n]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда

$$\begin{aligned} s_{2l}(u_p \otimes v_p) &= u_p \beta_{i+3l} \otimes v_p \\ &\quad + \sum_{m=n-l}^{n-1} u_p \nu_{i+3l+1,m+l-(n-1)} \otimes \mu_{i+2,m-1} \gamma_i v_p - u_p \otimes \beta_i v_p. \end{aligned}$$

Предположим, что u_p представляется в виде: $u_p = \beta_{i+3l+1} u'_p$. Тогда

$$\begin{aligned} s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p) &= u_p \otimes v_p - u'_p \nu_{i+3l+2,l+1} \otimes v_p \\ &\quad - \sum_{m=1}^{n-1-l} u'_p \nu_{i+3l+2,m+l+1} \otimes \mu_{i+2,m-1} \gamma_i v_p + u'_p \otimes \beta_i v_p. \end{aligned}$$

Тогда разложение элемента $w - \varkappa_p s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p)$ содержит элементов вида $u \otimes v$, где u – путь максимального веса, на один меньше, чем аналогичное разложение элемента w.

Осталось рассмотреть вариант, что u_p не представляется в виде: $u_p = \beta_{i+3l+1} u'_p$. Тогда $u_p = \mu_{i+3l+3,m} \gamma_{i+3l+1}$ для некоторого $m \leqslant n-2$. Рассмотрим коэффициент при $x \otimes v_p = u_p \beta_{i+3l} \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ по стандартному базису. Так как x нельзя представить в виде: $x = g\gamma_{i+3l}$ (так как $x = \mu_{i+3l+3,m} \gamma_{i+3l+1} \beta_{i+3l}$), то этот коэффициент равен $\varkappa_p - \varkappa_1 - \varkappa_2$, где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – коэффициенты в разложении w по стандартному базису при $x \otimes v_1$ и $x \otimes v_2$, где $v_p = \beta_{i-1} v_1 = \nu_{i,n-1-l} v_2$ (если такого v_1 или v_2 не существует, то $\varkappa_1$ или $\varkappa_2$ соответственно

автоматически равно 0). Но $W(x) > W(u_p)$, и потому $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Так как $x \otimes v_p \neq 0$, то $\varkappa_p = 0$.

(2) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l,j+l+1][i,j]}$, $1 \leqslant j \leqslant n-2-l$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $s_{2l}(u_p \otimes v_p) = u_p\alpha_{i+3l,j+l} \otimes v_p - u_p \otimes \alpha_{i,j}v_p$. Пусть $x = u_p\alpha_{i+3l,j+l} \neq 0$. Тогда коэффициент при $x \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ по стандартному базису равен $\varkappa_p - \varkappa$, где $\varkappa$ – коэффициент в разложении w по стандартному базису при $x \otimes v$, где $v_p = \alpha_{i,j-1}v$ при $j > 1$ и $v_p = \gamma_{i-2}v$ при $j = 1$ (если такого v не существует, то $\varkappa = 0$ автоматически). Но $W(x) > W(u_p)$, и потому $\varkappa = 0$. Так как $x \otimes v_p \neq 0$, то $\varkappa_p = 0$.

Значит, $u_p\alpha_{i+3l,j+l} = 0$, тогда u_p представляется в виде $u_p = u'_p\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,j+l+1}$. Тогда

$$s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p) = u_p \otimes v_p + \sum_{m=j+1}^{n-1-l} u'_p\mu_{i+3l+3,j+l}\tau_{i+3l}\nu_{i+3l,m+l+1}$$

$$\otimes\alpha_{i,m-1}\dots\alpha_{i,j}v_p + u'_p\mu_{i+3l+3,j+l}\gamma_{i+3l+1} \otimes \nu_{i,j}v_p + u'_p\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,l+1}$$

$$\otimes\beta_i\nu_{i,j}v_p + \sum_{m=1}^{j} u'_p\alpha_{i+3l+3,j+l}\dots\alpha_{i+3l+3,m+l+1} \otimes \mu_{i+3,m-1}\tau_i\nu_{i,j}v_p.$$

Следовательно, разложение элемента $w - \varkappa_p s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p)$ содержит элементов вида $u \otimes v$, где u – путь максимального веса, на один меньше, чем аналогичное разложение элемента w.

(3) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l,n][i,n-1-l]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Если $u_p\alpha_{i+3l,n-1} \neq 0$, то аналогично предыдущему пункту можно показать, что коэффициент при этом элементе в разложении $s_{2l}(w)$ по стандартному базису равен $\varkappa_p$, то есть $\varkappa_p = 0$. Значит, $u_p\alpha_{i+3l,n-1} = 0$. Следовательно, u_p представляется в виде $u_p = u'_p\gamma_{i+3l}$. Тогда $s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p) = -u_p \otimes v_p - u'_p \otimes \alpha_{i,n-1-l}v_p$. Тогда разложение элемента $w + \varkappa_p s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p)$ содержит элементов вида $u \otimes v$, где u – путь максимального веса, на один меньше, чем аналогичное разложение элемента w.

(4) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+2,j+l-(n-1)][i,j]}$, $n - l \leqslant j \leqslant n-1$, $1 \leqslant i \leqslant r$. В этом случае $u_p = u'_p\alpha_{i+3l+2,j+l-(n-1)}$. Тогда $s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p) = u_p \otimes v_p - u'_p \otimes \alpha_{i,j}v_p$. Следовательно, разложение элемента $w - \varkappa_p s_{2l+1}(u'_p \otimes v_p)$ содержит элементов вида $u \otimes v$, где u – путь максимального веса, на один меньше, чем аналогичное разложение элемента w.

(5) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+2,l+1][i,n]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда

$$s_{2l}(u_p \otimes v_p) = u_p \mu_{i+3l+2,l} \gamma_{i+3l} \otimes v_p$$
$$+ \sum_{m=n-l}^{n-1} u_p \alpha_{i+3l+2,l} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)} \otimes \mu_{i+3,m-1} \tau_i v_p - u_p \otimes \gamma_i v_p.$$

Пусть $x = u_p \mu_{i+3l+2,l} \gamma_{i+3l} \neq 0$. Тогда коэффициент при $x \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ по стандартному базису равен $\varkappa_p + \varkappa_1 - \varkappa_2 - \varphi + \sum\limits_{m=n-l}^{n-1} \varphi_m$, где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, φ, φ_m – коэффициенты в разложении w по стандартному базису при $u\beta_{i+3l+1} \otimes v_p$, $x \otimes v_1'$, $x \otimes v_2'$ и $u_p \alpha_{i+3l+2,l} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)} \otimes v_m$, где $u_p = u\nu_{i+3l+2,l+1}$, $v_p = \beta_{i-1} v_1' = \nu_{i,n-1-l} v_2' = \nu_{i,m} v_m$ (если пути, удовлетворяющего какому-то из этих условий, не существует, то соответствующий коэффициент автоматически равен 0). Но $W(x) > W(u\beta_{i+3l+1}) > W(u_p \alpha_{i+3l+2,l} \dots \alpha_{i+3l+2,m+l-(n-1)}) > W(u_p)$, и потому $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varphi = \varphi_m = 0$. Так как $x \otimes v_p \neq 0$, то $\varkappa_p = 0$.

Следовательно, $u_p \mu_{i+3l+2,l} \gamma_{i+3l} = 0$. Так как $u_p \neq 0$, то u_p представляется в виде:

$$u_p = u_p' \gamma_{i+3l+3} \beta_{i+3l+2} \nu_{i+3l+2,l+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} s_{2l+1}(u_p' \gamma_{i+3l+3} \beta_{i+3l+2} \otimes v_p) &= u_p' \gamma_{i+3l+3} \beta_{i+3l+2} \beta_{i+3l+1} \otimes v_p - u_p \otimes v_p \\ &- \sum_{m=1}^{n-1-l} u_p' \gamma_{i+3l+3} \beta_{i+3l+2} \nu_{i+3l+2,m+l+1} \otimes \mu_{i+2,m-1} \gamma_i v_p \\ &+ u_p' \gamma_{i+3l+3} \beta_{i+3l+2} \otimes \beta_i v_p \\ &= -u_p \otimes v_p - \sum_{m=1}^{n-1-l} u_p' \gamma_{i+3l+3} \beta_{i+3l+2} \nu_{i+3l+2,m+l+1} \\ &\otimes \mu_{i+2,m-1} \gamma_i v_p + u_p' \gamma_{i+3l+3} \beta_{i+3l+2} \otimes \beta_i v_p. \end{aligned}$$

Тогда разложение элемента $w + \varkappa_p s_{2l+1}(u_p' \otimes v_p)$ содержит элементов вида $u \otimes v$, где u – путь максимального веса, на один меньше, чем аналогичное разложение элемента w.

С помощью пунктов (1)–(5) мы можем уменьшать в разложении w количество элементов вида $u \otimes v$ с путём u максимального веса. Когда

таких элементов не останется, этот максимальный вес уменьшится. Так мы его можем уменьшать, пока он не станет равным 0.

Таким образом, мы можем предположить, что элемент $w = \sum\limits_{p=1}^{t} \varkappa_p u_p \otimes v_p \in \operatorname{Ker} s_{2l}$ таков, что выполняется условие (2.8). Докажем, что на самом деле все коэффициенты $\varkappa_p$ в разложении w равны 0. Предположим противное: для некоторого p выполнено $\varkappa_p \neq 0$. Разберём случаи (1)–(5).

(1) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+1,n][i,n]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть $u_p = e_{i+3l+1,n}$. Так как коэффициент при элементе $\beta_{i+3l} \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ равен $\varkappa_p$, то $\varkappa_p = 0$.

(2) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l,j+l+1][i,j]}$, $1 \leqslant j \leqslant n-2-l$, $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть $u_p = e_{i+3l,j+l+1}$. Так как коэффициент при элементе $\alpha_{i+3l,j+l} \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ равен $\varkappa_p$, то $\varkappa_p = 0$.

(3) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l,n][i,n-1-l]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть $u_p = e_{i+3l,n}$. Так как коэффициент при элементе $\alpha_{i+3l,n-1} \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ равен $\varkappa_p$, то $\varkappa_p = 0$.

(4) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+2,j+l-(n-1)][i,j]}$, $n-l \leqslant j \leqslant n-1$, $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть $u_p = e_{i+3l+2,j+l-(n-1)}$. Так как коэффициент при элементе $\mu_{i+3l+2,j+l-n}\tau_{i+3l-1}\nu_{i+3l-1,j+l-(n-1)} \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ равен $-\varkappa_p$, то $\varkappa_p = 0$.

(5) $u_p \otimes v_p \in P_{[i+3l+2,l+1][i,n]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть $u_p = e_{i+3l+2,l+1}$. Так как коэффициент при элементе $\mu_{i+3l+2,l}\gamma_{i+3l} \otimes v_p$ в разложении $s_{2l}(w)$ равен $\varkappa_p$, то $\varkappa_p = 0$.

Таким образом, мы показали, что $w = 0$, и это завершает доказательство включения $\operatorname{Ker} s_{2l} \subset \operatorname{Im} s_{2l+1}$.

Таким образом, рассматриваемый комплекс является проективной резольвентой Λ-модуля R, а её минимальность следует из того, что по построению для любого i $\operatorname{Im} d_i \subset \operatorname{Rad} Q_i$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Из теоремы 1 с использованием [5, лемма 6] следует, что, если n чётно, то $(2n-1)$-я сизигия $\Omega^{2n-1}(R)$ Λ-модуля R изоморфна скрученному модулю ${}_{\sigma^{-1}}R_1$, а, если n нечётно, то $(4n-2)$-я сизигия $\Omega^{4n-2}(R)$ Λ-модуля R изоморфна скрученному модулю ${}_{\sigma^{-2}}R_1$ (если φ – автоморфизм алгебры R, то ${}_{\varphi}R_1$ – это R с бимодульной структурой такой, что $x * y * z = \varphi(x) \cdot y \cdot z$ для любых $x, y, z \in R$).

3. Аддитивная структура алгебры когомологий Хохшильда

В этом параграфе сохраняются все обозначения, введённые в предыдущем. Кроме того, положим $\delta^t = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_t, R) : \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$, где d_t – это дифференциал из резольвенты, описанной в теореме 1.

Пусть w – путь из вершины $(i_2-1)n + j_2$ в вершину $(i_1-1)n + j_1$. Через $w^* : P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]} \to R$ будем обозначать Λ-гомоморфизм, переводящий $e_{i_1,j_1} \otimes e_{i_2,j_2} \in P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}$ в $w \in R$. Обозначим через $V(w) \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}, R)$ подпространство, порождённое над K гомоморфизмом w^*. Далее введём следующие обозначения:

$$V_{2l}^0 = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(e_{i,n}) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-l} V(\alpha_{i,j+l-1} \dots \alpha_{i,j}) \Big) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-1),$$

$$V_{2l}^1 = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\beta_i) \quad (l = 0, \dots, n-2),$$

$$V_{2(n-1)}^1 = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(\beta_i) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1} V(e_{i,j}) \Big) \Big),$$

$$V_{2l}^2 = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\beta_{i+1}\beta_i) \quad (l = 0, \dots, n-1),$$

$$V_0^3 = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1} V(\mu_{i+3,j-1}\tau_i\nu_{i,j}) \Big) \Big),$$

$$V_{2l}^3 = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i) \quad (l = 1, \dots, n-1),$$

$$V_{2l}^4 = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=n-l}^{n-1} V(\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j}) \quad (l = 0, \dots, n-1),$$

$$V_{2l+1}^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{r} V(e_{i,n}) \quad (l = 0, \dots, n-2),$$

$$V^0_{2l+1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(\beta_i) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-l} V(\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j}) \Big) \oplus V(\mu_{i+2,l}\gamma_i) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-2),$$

$$V^1_{2l+1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(\beta_{i+1}\beta_i) \oplus V(\beta_i \nu_{i,n-1-l}) \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-l}^{n} V(\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j}) \Big) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-2),$$

$$V^2_{2l+1} = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i) \quad (l = 1, \dots, n-2),$$

$$\widetilde{V}^0_{2l} = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{n-1-l} V(\alpha_{i,j+l-1} \dots \alpha_{i,j}) \quad (l = 0, \dots, n-1),$$

$$\widetilde{V}^1_{2l} = \bigoplus_{i=1}^{r} V(e_{i,n}) \quad (l = 0, \dots, n-2),$$

$$\widetilde{V}^1_{2(n-1)} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(e_{i,n}) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1} V(e_{i,j}) \Big) \Big),$$

$$\widetilde{V}^2_{2l} = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\beta_i) \quad (l = 0, \dots, n-1),$$

$$\widetilde{V}^3_{0} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(\beta_{i+1}\beta_i) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1} V(\mu_{i+3,j-1}\tau_i\nu_{i,j}) \Big) \Big),$$

$$\widetilde{V}^3_{2l} = \bigoplus_{i=1}^{r} V(\beta_{i+1}\beta_i) \quad (l = 1, \dots, n-1),$$

$$\widetilde{V}^4_{2l} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i) \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-l}^{n-1} V(\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j}) \Big) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-1),$$

$$\widetilde{V}^0_{2l+1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(\Big(\bigoplus_{j=1}^{n-1-l} V(\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j}) \Big) \oplus V(\mu_{i+2,l}\gamma_i) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-2),$$

$$\widetilde{V}^1_{2l+1} = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big(V(\beta_i \nu_{i,n-1-l}) \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-l}^{n} V(\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j}) \Big) \Big) \quad (l = 0, \dots, n-2).$$

Для каждого пространства V_p^q ($\widetilde{V}_p^q$) из только что привёденного списка введём пространство U_p^q ($\widetilde{U}_p^q$) и линейные отображения $\varphi_p^{q,m}$: $V_p^q \to U_p^q$ ($\widetilde{\varphi}_p^{q,m} : \widetilde{V}_p^q \to \widetilde{U}_p^q$) для $m \geqslant 0$ следующим образом:

для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : U_{2l}^0 = V_{2l+1}^0$,

$\varphi_{2l}^{0,m}(e_{i,n}^*) = (-1)^m \beta_i^* - \beta_{i-1}^* - \nu_{i,n-1-l}^* + (-1)^m (\mu_{i+2,l}\gamma_i)^*$,

$\varphi_{2l}^{0,m}((\alpha_{i,n-2}\dots\alpha_{i,n-1-l})^*) = (-1)^m \nu_{i,n-1-l}^* - (\alpha_{i,n-2}\dots\alpha_{i,n-2-l})^*$,

$\varphi_{2l}^{0,m}((\alpha_{i,j+l-1}\dots\alpha_{i,j})^*) = (\alpha_{i,j+l}\dots\alpha_{i,j})^* - (\alpha_{i,j+l-1}\dots\alpha_{i,j-1})^*$,

$\varphi_{2l}^{0,m}((\alpha_{i,l}\dots\alpha_{i,1})^*) = (\alpha_{i,l+1}\dots\alpha_{i,1})^* - (\mu_{i,l}\gamma_{i-2})^*$

$(2 \leqslant j \leqslant n-2-l,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$;

$U_{2(n-1)}^0 = \widetilde{V}_0^2, \varphi_{2(n-1)}^{0,m}(e_{i,n}^*) = (-1)^m \beta_i^* - \beta_{i-1}^*\ (1 \leqslant i \leqslant r)$;

для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : U_{2l}^1 = V_{2l+1}^1$,

$\varphi_{2l}^{1,m}(\beta_i^*) = (-1)^m (\beta_{i+1}\beta_i)^* - (\beta_i\beta_{i-1})^* - (\beta_i\nu_{i,n-1-l})^*$

$+ (-1)^m \sum\limits_{z=n-l}^{n} (\mu_{i+3,z+l-n}\tau_i\nu_{i,z})^*\quad (1 \leqslant i \leqslant r)$;

$U_{2(n-1)}^1 = \widetilde{V}_0^3, \quad \varphi_{2(n-1)}^{1,m}(\beta_i^*) = (-1)^m (\beta_{i+1}\beta_i)^* - (\beta_i\beta_{i-1})^*$

$+ (-1)^m \sum\limits_{z=1}^{n-1} (\mu_{i+3,z-1}\tau_i\nu_{i,z})^*$,

$\varphi_{2(n-1)}^{1,m}(e_{i,j}^*) = (-1)^{m+1} \sum\limits_{z=1}^{j} (\mu_{i+3,z-1}\tau_i\nu_{i,z})^* + (-1)^m (\beta_{i-1}\beta_{i-2})^*$

$+ \sum\limits_{z=j}^{n-1} (\mu_{i,z-1}\tau_{i-3}\nu_{i-3,z})^*\quad (1 \leqslant j \leqslant n-1,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$;

для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : U_{2l}^2 = V_{2l+1}^2$,

$\varphi_{2l}^{2,m}((\beta_{i+1}\beta_i)^*) = (-1)^m (\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^* - (\beta_{i+1}\beta_i\beta_{i-1})^*\quad (1 \leqslant i \leqslant r)$;

$U_{2(n-1)}^2 = \widetilde{V}_0^4, \varphi_{2(n-1)}^{2,m}((\beta_{i+1}\beta_i)^*) = (-1)^m (\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^*$

$- (\beta_{i+1}\beta_i\beta_{i-1})^*\quad (1 \leqslant i \leqslant r)$;

для $0 \leqslant l \leqslant n-1 : U_{2l}^3 = 0,\quad U_{2l}^4 = 0, \varphi_{2l}^{3,m} = 0,\quad \varphi_{2l}^{4,m} = 0$;

для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : U_{2l+1}^{-1} = \widetilde{V}_{2l+2}^2,\quad \varphi_{2l+1}^{-1,m}(e_{i,n}^*) = (-1)^m \beta_i^* + \beta_{i-1}^*$;

для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : U^0_{2l+1} = \widetilde{V}^3_{2l+2}$,
$\varphi^{0,m}_{2l+1}(\beta^*_i) = (-1)^m(\beta_{i+1}\beta_i)^* + (\beta_i\beta_{i-1})^*$,
$\varphi^{0,m}_{2l+1}((\alpha_{i,j+l}\dots\alpha_{i,j})^*) = (-1)^{m+1}(\beta_{i-1}\beta_{i-2})^*$,
$\varphi^{0,m}_{2l+1}(\nu^*_{i,n-1-l}) = -(\beta_{i-1}\beta_{i-2})^*$,
$\varphi^{0,m}_{2l+1}((\mu_{i+2,l}\gamma_i)^*) = (-1)^{m+1}(\beta_{i+1}\beta_i)^*$
$(1 \leqslant j \leqslant n-2-l,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$;
для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : U^1_{2l+1} = \widetilde{V}^4_{2l+2}$,
$\varphi^{1,m}_{2l+1}((\beta_{i+1}\beta_i)^*) = (-1)^m(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^* + (\beta_{i+1}\beta_i\beta_{i-1})^*$,
$\varphi^{1,m}_{2l+1}((\beta_i\nu_{i,n-1-l})^*) = -(\beta_i\beta_{i-1}\beta_{i-2})^* + (-1)^{m+1}(\tau_i\nu_{i,n-1-l})^*$,
$\varphi^{1,m}_{2l+1}((\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j})^*) = (\mu_{i+3,j+l+1-n}\tau_i\nu_{i,j})^*$
$-(\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j-1})^*$,
$\varphi^{1,m}_{2l+1}((\mu_{i+3,l}\tau_i)^*) = -(\mu_{i+3,l}\tau_i\nu_{i,n-1})^* + (-1)^{m+1}(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^*$
$(n-l \leqslant j \leqslant n-1,\quad 1 \leqslant i \leqslant r)$,

для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : U^2_{2l+1} = 0, \varphi^{2,m}_{2l+1} = 0$;
для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : \widetilde{U}^0_{2l} = \widetilde{V}^0_{2l+1}$,
$\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l}((\alpha_{i,n-2}\dots\alpha_{i,n-1-l})^*) = (-1)^m\nu^*_{i,n-1-l} - (\alpha_{i,n-2}\dots\alpha_{i,n-2-l})^*$,
$\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l}((\alpha_{i,j+l-1}\dots\alpha_{i,j})^*) = (\alpha_{i,j+l}\dots\alpha_{i,j})^* - (\alpha_{i,j+l-1}\dots\alpha_{i,j-1})^*$,
$\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l}((\alpha_{i,l}\dots\alpha_{i,1})^*) = (\alpha_{i,l+1}\dots\alpha_{i,1})^* + (\mu_{i,l}\gamma_{i-2})^*$
$(2 \leqslant j \leqslant n-2-l,\quad 1 \leqslant i \leqslant r)$;
$\widetilde{U}^0_{2(n-1)} = V^2_0, \widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2(n-1)} = 0$;
для $0 \leqslant l \leqslant n-2 : \widetilde{U}^1_{2l} = \widetilde{V}^1_{2l+1},\quad \widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2l}(e^*_{i,n}) = (-1)^{m+1}(\beta_i\nu_{i,n-1-l})^*$
$+(\beta_{i-1}\nu_{i-1,n-1-l})^* + \sum\limits_{z=n-l}^{n}(\mu_{i+3,z+l-n}\tau_i\nu_{i,z})^*$
$+(-1)^{m+1}\sum\limits_{z=n-l}^{n}(\mu_{i+2,z+l-n}\tau_{i-1}\nu_{i-1,z})^*\quad(1 \leqslant i \leqslant r)$;
$\widetilde{U}^1_{2(n-1)} = V^3_0,\quad \widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2(n-1)}(e^*_{i,n}) = \sum\limits_{z=1}^{n-1}(\mu_{i+3,z-1}\tau_i\nu_{i,z})^*$
$+(-1)^{m+1}\sum\limits_{z=1}^{n-1}(\mu_{i+2,z-1}\tau_{i-1}\nu_{i-1,z})^* + (-1)^{m+1}(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^*$
$+(\beta_{i+1}\beta_i\beta_{i-1})^* + (-1)^{m+1}(\beta_i\beta_{i-1}\beta_{i-2})^* + (\beta_{i-1}\beta_{i-2}\beta_{i-3})^*$,
$\widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2(n-1)}(e^*_{i,j}) = (-1)^{m+1}\sum\limits_{z=1}^{j}(\mu_{i+3,z-1}\tau_i\nu_{i,z})^* + (\beta_i\beta_{i-1}\beta_{i-2})^*$
$+(-1)^{m+1}(\beta_{i-1}\beta_{i-2}\beta_{i-3})^* + \sum\limits_{z=j}^{n-1}(\mu_{i,z-1}\tau_{i-3}\nu_{i-3,z})^*$
$(1 \leqslant j \leqslant n-1,\ 1 \leqslant i \leqslant r)$;

для $0 \leqslant l \leqslant n-1$: $\widetilde{U}^2_{2l} = 0, \quad \widetilde{U}^3_{2l} = 0, \quad \widetilde{U}^4_{2l} = 0,$
$\widetilde{\varphi}^{\,2,m}_{2l} = 0, \quad \widetilde{\varphi}^{\,3,m}_{2l} = 0, \quad \widetilde{\varphi}^{\,4,m}_{2l} = 0;$

для $0 \leqslant l \leqslant n-2$: $\widetilde{U}^0_{2l+1} = V^3_{2l+2},$
$\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l+1}((\alpha_{i,j+l}\dots\alpha_{i,j})^*) = (\beta_i\beta_{i-1}\beta_{i-2})^* + (-1)^m(\beta_{i-1}\beta_{i-2}\beta_{i-3})^*,$
$\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l+1}(\nu^*_{i,n-1-l}) = (-1)^m(\beta_i\beta_{i-1}\beta_{i-2})^* + (\beta_{i-1}\beta_{i-2}\beta_{i-3})^*,$
$\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l+1}((\mu_{i+2,l}\gamma_i)^*) = -(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^* + (-1)^{m+1}(\beta_{i+1}\beta_i\beta_{i-1})^*$
$(1 \leqslant j \leqslant n-2-l, \quad 1 \leqslant i \leqslant r);$

для $0 \leqslant l \leqslant n-2$: $\widetilde{U}^1_{2l+1} = V^4_{2l+2},$
$\widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2l+1}((\beta_i\nu_{i,n-1-l})^*) = (-1)^{m+1}(\tau_i\nu_{i,n-1-l})^*,$
$\widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2l+1}((\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j})^*) = (\mu_{i+3,j+l+1-n}\tau_i\nu_{i,j})^*$
$-(\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j-1})^*,$
$\widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2l+1}((\mu_{i+3,l}\tau_i)^*) = -(\mu_{i+3,l}\tau_i\nu_{i,n-1})^* \ (n-l \leqslant j \leqslant n-1, \ 1 \leqslant i \leqslant r).$

Лемма 2.

(1) *Для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено*

$$\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{0,m}_{2l} = \begin{cases} 1, & \text{если } m \vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{если } m \not\vdots 2, \ \operatorname{char} K \neq 2 \text{ и } r \not\vdots 2; \end{cases}$$

(2) $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{0,m}_{2(n-1)} = 1$, *если* $m \vdots 2$;

(3) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l} = 0$;

(4) *пусть* $m \vdots 2$, $n \not\vdots 2$, $r \not\vdots 2$ *и* НОД $(3n-1, r) = 1$, *тогда* $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2(n-1)} = 1$;

(5) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено*

$$\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{2,m}_{2l} = \begin{cases} 1, & \text{если } m \vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{если } m \not\vdots 2, \ \operatorname{char} K \neq 2 \text{ и } r \not\vdots 2; \end{cases}$$

(6) $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{2,m}_{2(n-1)} = 1$, *если* $m \vdots 2$;

(7) $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{3,m}_{2l} = \begin{cases} r, & \text{если } 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ rn, & \text{если } l = 0; \end{cases}$

(8) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-1$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{4,m}_{2l} = rl$;

(9) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено*

$$\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{-1,m}_{2l+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } m \not\vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{если } m \vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2 \text{ и } r \not\vdots 2; \end{cases}$$

(10) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{0,m}_{2l+1} = r(n-l)$;

(11) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено*

$$\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l+1} = \begin{cases} r+1, & \text{если } m \not\vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2, \\ r, & \text{если } m \vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2 \text{ и } r \not\vdots 2; \end{cases}$$

(12) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{2,m}_{2l+1} = r$;

(13) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-1$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l} = 0$;

(14) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено*

$$\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2l} = \begin{cases} 1, & \text{если } m \vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2, \\ 0, & \text{если } m \not\vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2 \text{ и } r \not\vdots 2; \end{cases}$$

(15) *пусть* НОД $(3n-1, r) = 1$, *тогда*

$$\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2(n-1)} = \begin{cases} 2, & \text{если } n \vdots 2 \text{ и выполнено одно из} \\ & \text{условий: } m \vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2, \\ 1, & \text{если } n \not\vdots 2,\ r \not\vdots 2 \text{ и } \operatorname{char} K = 2, \\ 0 & \text{если } m \not\vdots 2,\ r \not\vdots 2 \text{ и } \operatorname{char} K \neq 2; \end{cases}$$

(16) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-1$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{\,2,m}_{2l} = r$;

(17) $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}_{2l}^{3,m} = \begin{cases} r, & \text{если } 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ rn, & \text{если } l = 0; \end{cases}$

(18) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-1$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}_{2l}^{4,m} = r(l+1)$;

(19) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено*

$$\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}_{2l+1}^{0,m} = \begin{cases} r(n-1-l)+1, & \text{если } m \not\vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} K = 2, \\ r(n-1-l), & \text{если } m \vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2 \text{ и } r \not\vdots 2; \end{cases}$$

(20) *для* $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *выполнено* $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}_{2l+1}^{1,m} = r$.

Доказательство. (1) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$w = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i e_{i,n}^* + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1-l} \zeta_{i,j} (\alpha_{i,j+l-1} \dots \alpha_{i,j})^* \in V_{2l}^0$$

для некоторых $\varkappa_i, \zeta_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-1-l)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2l}^{0,m}$ равносильно тому, что

$$\begin{aligned} \varphi_{2l}^{0,m}(w) = &\sum_{i=1}^{r} ((-1)^m \varkappa_i - \varkappa_{i+1}) \beta_i^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r} ((-1)^m \zeta_{i,n-1-l} - \varkappa_i) \nu_{i,n-1-l}^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-2-l} (\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j+1}) (\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j})^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r} ((-1)^m \varkappa_i - \zeta_{i+2,1}) (\mu_{i+2,l} \gamma_i)^* = 0. \end{aligned}$$

Если $m \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, то $(-1)^m = 1$. В этом случае $\varphi_{2l}^{0,m}(w) = 0$ равносильно тому, что $\varkappa_i = \varkappa_{i+1}$, $\varkappa_i = \zeta_{i,n-1-l}$, $\zeta_{i,j} = \zeta_{i,j+1}$, $\zeta_{i+2,1} = \varkappa_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-2-l$, то есть, если $\varkappa_1 = \varkappa$, то $\zeta_{i,j} = \varkappa_i = \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1-l$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2l}^{0,m}$ равносильно $w = \varkappa \Big(\sum\limits_{i=1}^{r} e_{i,n}^* + \sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{n-1-l} (\alpha_{i,j+l-1} \dots \alpha_{i,j})^* \Big)$ для некоторого $\varkappa \in K$. Это

значит, что в случае, когда $m \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi_{2l}^{0,m} = 1$.

Пусть теперь $m \not\vdots 2$, $\operatorname{char} K \neq 2$ и $r \not\vdots 2$. Тогда $\varkappa_{i+1} = -\varkappa_i$. Далее по индукции получаем, что $\varkappa_{i+p} = (-1)^p \varkappa_i$ для любого p. Тогда $\varkappa_i = \varkappa_{i+r} = (-1)^r \varkappa_i = -\varkappa_i$, то есть $\varkappa_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Так как $\zeta_{i,n-1-l} + \varkappa_i = 0$, то $\zeta_{i,n-1-l} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Следовательно, так как $\zeta_{i,j} = \zeta_{i,j+1}$ для $1 \leqslant j \leqslant n-2-l$, то $\zeta_{i,j} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1-l$. Тогда из $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2l}^{0,m}$ следует $w = 0$, то есть $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi_{2l}^{0,m} = 0$.

(2) Пусть $w = \sum\limits_{i=1}^{r} \varkappa_i e_{i,n}^* \in V_{2(n-1)}^0$ для некоторых $\varkappa_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2(n-1)}^{0,m}$ равносильно тому, что $\varphi_{2(n-1)}^{0,m}(w) = \sum\limits_{i=1}^{r} ((-1)^m \varkappa_i - \varkappa_{i+1}) \beta_i^* = 0$. Если $m \vdots 2$, то последнее равенство равносильно тому, что $\varkappa_i = \varkappa_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть, если $\varkappa_1 = \varkappa$, то $\varkappa_i = \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2(n-1)}^{0,m}$ равносильно тому, что $w = \varkappa(\sum\limits_{i=1}^{r} e_{i,n}^*)$ для некоторого $\varkappa \in K$. Это значит, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi_{2(n-1)}^{0,m} = 1$.

(3) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и $w = \sum\limits_{i=1}^{r} \varkappa_i \beta_i^* \in V_{2l}^1$ для некоторых $\varkappa_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда коэффициент при $(\beta_i \nu_{i,n-1-l})^*$ в разложении $\varphi_{2l}^{1,m}(w)$ по базису

$$((\beta_{i+1}\beta_i)^*, (\beta_i \nu_{i,n-1-l})^*, (\mu_{i+3,j+l-n} \tau_i \nu_{i,j})^*)_{1 \leqslant i \leqslant r, n-l \leqslant j \leqslant n}$$

равен $-\varkappa_i$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2l}^{1,m}$ равносильно тому, что $\varkappa_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть $w = 0$. Следовательно, $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi_{2l}^{1,m} = 0$.

(4) Пусть

$$w = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i \beta_i^* + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_{i,j} e_{i,j}^* \in V_{2(n-1)}^1$$

для некоторых $\varkappa_i$, $\zeta_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2(n-1)}^{1,m}$ равносильно тому, что

$$\varphi_{2(n-1)}^{1,m}(w) = \sum_{i=1}^{r} ((-1)^m \varkappa_i - \varkappa_{i+1} + (-1)^m \sum_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+2,z})(\beta_{i+1}\beta_i)^*$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-1}((-1)^{m+1}\sum_{z=j}^{n-1}\zeta_{i,z}+(-1)^m\varkappa_i+\sum_{z=1}^{j}\zeta_{i+3,z})(\mu_{i+3,j-1}\tau_i\nu_{i,j})^*=0.$$

Пусть теперь $m\vdots 2$, $n\not\vdots 2$, $r\not\vdots 2$ и НОД$(3n-1,r)=1$. В этом случае $\varphi^{1,m}_{2(n-1)}(w)=0$ равносильно тому, что

$$\varkappa_{i+1}=\varkappa_i+\sum_{z=1}^{n-1}\zeta_{i+2,z}\quad\text{и}\quad\varkappa_i=\sum_{z=j}^{n-1}\zeta_{i,z}-\sum_{z=1}^{j}\zeta_{i+3,z}$$

для $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant n-1$. Пусть $\varphi^{1,m}_{2(n-1)}(w)=0$. Так как $\sum\limits_{z=j}^{n-1}\zeta_{i,z}-\sum\limits_{z=1}^{j}\zeta_{i+3,z}=\varkappa_i=\sum\limits_{z=j+1}^{n-1}\zeta_{i,z}-\sum\limits_{z=1}^{j+1}\zeta_{i+3,z}$ для $1\leqslant j\leqslant n-2$, то $\zeta_{i+3,j+1}=-\zeta_{i,j}$ для $1\leqslant j\leqslant n-2$. Далее по индукции получаем, что $\zeta_{i+3p,j+p}=(-1)^p\zeta_{i,j}$ для $0\leqslant p\leqslant n-2$, $1\leqslant j\leqslant n-1-p$. Следовательно, $\zeta_{i,j}=(-1)^{j-1}\zeta_{i-3(j-1),1}$ для $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant n-1$. Так как $\varkappa_{i+2}=\sum\limits_{z=1}^{n-1}\zeta_{i+2,z}-\zeta_{i+5,1}$, то

$$\varkappa_{i+1}=\varkappa_i+\sum_{z=1}^{n-1}\zeta_{i+2,z}=\varkappa_i+\varkappa_{i+2}+\zeta_{i+5,1},$$

то есть $\zeta_{i+5,1}=-\varkappa_i-\varkappa_{i+2}+\varkappa_{i+1}$. Так как $\varkappa_i=\zeta_{i,n-1}-\sum\limits_{z=1}^{n-1}\zeta_{i+3,z}$, то $\varkappa_{i+2}=\varkappa_{i+1}+\sum\limits_{z=1}^{n-1}\zeta_{i+3,z}=\varkappa_{i+1}-\varkappa_i+\zeta_{i,n-1}$, то есть $\zeta_{i,n-1}=\varkappa_{i+2}+\varkappa_i-\varkappa_{i+1}=-\zeta_{i+5,1}$. С другой стороны, $\zeta_{i,n-1}=(-1)^{n-2}\zeta_{i-3(n-2),1}=-\zeta_{i-3(n-2),1}$, то есть $\zeta_{i+5,1}=\zeta_{i-3(n-2),1}$. Заменяя i на $i-5$, получаем, что $\zeta_{i,1}=\zeta_{i-(3n-1),1}$. Отсюда получаем по индукции, что $\zeta_{i,1}=\zeta_{i-p(3n-1),1}$ для любого p. Так как НОД$(3n-1,r)=1$, это означает, что $\zeta_{i_1,1}=\zeta_{i_2,1}$ для $1\leqslant i_1,i_2\leqslant r$. Пусть $\zeta_{i,1}=\zeta$ для $1\leqslant i\leqslant r$. Тогда $\zeta_{i,j}=(-1)^{j-1}\zeta$ для $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant n-1$. Тогда $\varkappa_i=\sum\limits_{z=1}^{n-1}\zeta_{i,z}-\zeta_{i+3,1}=-\zeta$ для $1\leqslant i\leqslant r$. Ясно, что при $\varkappa_i=-\zeta$, $\zeta_{i,j}=(-1)^{j-1}\zeta$ имеем $\varphi^{1,m}_{2(n-1)}(w)=0$. Тогда $w\in\operatorname{Ker}\varphi^{1,m}_{2(n-1)}$ равносильно тому, что $w=\zeta(-\sum\limits_{i=1}^{r}\beta_i^*+\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}e^*_{i,j})$ для некоторого $\zeta\in K$. Это значит, что в этом случае $\dim_K\operatorname{Ker}\varphi^{1,m}_{2(n-1)}=1$.

(5) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и $w = \sum\limits_{i=1}^{r} \varkappa_i(\beta_{i+1}\beta_i)^* \in V_{2l}^2$ для некоторых $\varkappa_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker}\varphi_{2l}^{2,m}$ равносильно тому, что $\varphi_{2l}^{2,m}(w) = \sum\limits_{i=1}^{r}((-1)^m\varkappa_i - \varkappa_{i+1})(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^* = 0$. Если $m \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, то последнее равенство равносильно тому, что $\varkappa_i = \varkappa_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть, если $\varkappa_1 = \varkappa$, то $\varkappa_i = \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $w \in \operatorname{Ker}\varphi_{2l}^{2,m}$ равносильно тому, что $w = \varkappa(\sum\limits_{i=1}^{r}(\beta_{i+1}\beta_i)^*)$ для некоторого $\varkappa \in K$. Это значит, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker}\varphi_{2l}^{2,m} = 1$. Пусть теперь $m \not\vdots 2$, $\operatorname{char} K \neq 2$ и $r \not\vdots 2$. Тогда $\varkappa_{i+1} = -\varkappa_i$. Далее по индукции получаем, что $\varkappa_{i+p} = (-1)^p\varkappa_i$ для любого p. Тогда $\varkappa_i = \varkappa_{i+r} = (-1)^r\varkappa_i = -\varkappa_i$, то есть $\varkappa_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда из $w \in \operatorname{Ker}\varphi_{2l}^{2,m}$ следует $w = 0$, то есть $\dim_K \operatorname{Ker}\varphi_{2l}^{2,m} = 0$.

(6) Доказывается аналогично (2).

(7) $\dim_K \operatorname{Ker}\varphi_{2l}^{3,m} = \dim_K V_{2l}^3 = \begin{cases} r, & 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ rn, & l = 0, \end{cases}$

так как $\varphi_{2l}^{3,m} = 0$.

(8) $\dim_K \operatorname{Ker}\varphi_{2l}^{4,m} = \dim_K V_{2l}^4 = rl$, так как $\varphi_{2l}^{4,m} = 0$.

(9) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и $w = \sum\limits_{i=1}^{r} \varkappa_i e_{i,n}^* \in V_{2l+1}^{-1}$ для некоторых $\varkappa_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker}\varphi_{2l+1}^{-1,m}$ равносильно тому, что $\varphi_{2l+1}^{-1,m}(w) = \sum\limits_{i=1}^{r}((-1)^m\varkappa_i + \varkappa_{i+1})\beta_i^* = 0$. Если $m \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, то последнее равенство равносильно тому, что $\varkappa_i = \varkappa_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть, если $\varkappa_1 = \varkappa$, то $\varkappa_i = \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $w \in \operatorname{Ker}\varphi_{2l+1}^{-1,m}$ равносильно тому, что $w = \varkappa(\sum\limits_{i=1}^{r} e_{i,n}^*)$ для некоторого $\varkappa \in K$. Это значит, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker}\varphi_{2l+1}^{-1,m} = 1$. Пусть теперь $m \vdots 2$, $\operatorname{char} K \neq 2$ и $r \not\vdots 2$. Тогда $\varkappa_{i+1} = -\varkappa_i$. Далее по индукции получаем, что $\varkappa_{i+p} = (-1)^p\varkappa_i$ для любого p. Тогда $\varkappa_i = \varkappa_{i+r} = (-1)^r\varkappa_i = -\varkappa_i$, то есть $\varkappa_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда из $w \in \operatorname{Ker}\varphi_{2l+1}^{-1,m}$ следует $w = 0$, то есть $\dim_K \operatorname{Ker}\varphi_{2l+1}^{-1,m} = 0$.

(10) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$w = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i \beta_i^* + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1-l} \zeta_{i,j} (\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j})^* + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (\mu_{i+2,l} \gamma_i)^* \in V_{2l+1}^0$$

для некоторых $\varkappa_i, \zeta_{i,j}, \varepsilon_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-1-l)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2l+1}^{0,m}$ равносильно тому, что

$$\varphi_{2l+1}^{0,m}(w) = \sum_{i=1}^{r} ((-1)^m \varkappa_i + \varkappa_{i+1}$$

$$+(-1)^{m+1} \sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+2,z} - \zeta_{i+2,n-1-l} + (-1)^{m+1} \varepsilon_i)(\beta_{i+1} \beta_i)^* = 0.$$

Последнее равенство равносильно тому, что

$$\varepsilon_i = \varkappa_i + (-1)^m \varkappa_{i+1} - \sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+2,z} + (-1)^{m+1} \zeta_{i+2,n-1-l}.$$

Значит, $w \in \operatorname{Ker} \varphi_{2l+1}^{0,m}$ равносильно тому, что

$$w = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i \beta_i^* + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1-l} \zeta_{i,j} (\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j})^*$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} (\varkappa_i + (-1)^m \varkappa_{i+1} - \sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+2,z} + (-1)^{m+1} \zeta_{i+2,n-1-l})(\mu_{i+2,l} \gamma_i)^*$$

для некоторых $\varkappa_i, \zeta_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-1-l)$. Это означает, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi_{2l+1}^{0,m} = r(n-l)$.

(11) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$w = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i (\beta_{i+1} \beta_i)^* + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (\beta_i \nu_{i,n-1-l})^*$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=n-l}^{n} \zeta_{i,j} (\mu_{i+3,j+l-n} \tau_i \nu_{i,j})^* \in V_{2l+1}^1$$

для некоторых $\varkappa_i$, ε_i, $\zeta_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r, n-l \leqslant j \leqslant n)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что

$$\begin{aligned}\varphi^{1,m}_{2l+1}(w) = &\sum_{i=1}^{r}((-1)^m\varkappa_i + \varkappa_{i+1} - \varepsilon_{i+2} + (-1)^{m+1}\zeta_{i,n})(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r}((-1)^{m+1}\varepsilon_i - \zeta_{i,n-l})(\tau_i\nu_{i,n-1-l})^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=n-l}^{n-1}(\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j+1})(\mu_{i+3,j+l+1-n}\tau_i\nu_{i,j})^* = 0.\end{aligned}$$

Пусть $\varphi^{1,m}_{2l+1}(w) = 0$. Обозначим $\zeta_{i,n-l}$ через ζ_i для $1 \leqslant i \leqslant r$. Так как $\zeta_{i,j+1} = \zeta_{i,j}$ для $1 \leqslant i \leqslant r, n-l \leqslant j \leqslant n-1$, то $\zeta_{i,j} = \zeta_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $n-l \leqslant j \leqslant n$. Кроме того, $\varepsilon_i = (-1)^{m+1}\zeta_i$. Значит, $w \in \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l+1}$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\zeta_i \in K$: $\zeta_{i,j} = (-1)^{m+1}\varepsilon_i = \zeta_i$, $(-1)^m\varkappa_i + \varkappa_{i+1} - \varepsilon_{i+2} + (-1)^{m+1}\zeta_{i,n} = (-1)^m\varkappa_i + \varkappa_{i+1} - (-1)^{m+1}\zeta_{i+2} + (-1)^{m+1}\zeta_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r, n-l \leqslant j \leqslant n)$. Далее считаем, что такие $\zeta_i \in K$ нашлись. Если $m \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, то $(-1)^{m+1} = 1$. В этом случае $\varphi^{1,m}_{2l+1}(w) = 0$ равносильно тому, что $\varkappa_{i+1} = \varkappa_i + \zeta_{i+2} - \zeta_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Предположим, что это равенство выполнено. Пусть $\varkappa_1 = \varkappa$. Докажем по индукции, что $\varkappa_i = \varkappa + \zeta_{i+1} + \zeta_i - \zeta_2 - \zeta_1$. Для $i = 1$ это верно. Пусть это верно для $i-1$, тогда $\varkappa_i = \varkappa_{i-1} + \zeta_{i+1} - \zeta_{i-1} = (\varkappa + \zeta_i + \zeta_{i-1} - \zeta_2 - \zeta_1) + \zeta_{i+1} - \zeta_{i-1} = \varkappa + \zeta_{i+1} + \zeta_i - \zeta_2 - \zeta_1$. Равенство $\varkappa_i = \varkappa + \zeta_{i+1} + \zeta_i - \zeta_2 - \zeta_1$ корректно определяет $\varkappa_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, поскольку в этом случае $\varkappa_{i+r} = \varkappa_i$, так как $\zeta_{i+r} = \zeta_i$. Кроме того, эти $\varkappa_i$ очевидно удовлетворяют равенству $\varkappa_{i+1} = \varkappa_i + \zeta_{i+2} - \zeta_i$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что найдутся такие $\varkappa$, $\zeta_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, что

$$\begin{aligned}w = &\sum_{i=1}^{r}(\varkappa + \zeta_{i+1} + \zeta_i - \zeta_2 - \zeta_1)(\beta_{i+1}\beta_i)^* \\ &+\zeta_i\Big(\sum_{i=1}^{r}(\beta_i\nu_{i,n-1-l})^* + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=n-l}^{n}(\mu_{i+3,j+l-n}\tau_i\nu_{i,j})^*\Big).\end{aligned}$$

Это означает, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l+1} = r+1$. Пусть теперь $m \vdots 2$, $\operatorname{char} K \neq 2$ и $r \not\vdots 2$. В этом случае $\varphi^{1,m}_{2l+1}(w) = 0$ равносильно тому,

что $\varkappa_{i+1} + \varkappa_i = \zeta_i - \zeta_{i+2}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $(-1)^i(\varkappa_{i+1} + \varkappa_i - \zeta_i + \zeta_{i+2}) = 0$. Просуммирував эти равенства от i до $i + r - 1$, получаем, что $\sum\limits_{z=i}^{i+r-1} (-1)^i(\varkappa_{i+1} + \varkappa_i - \zeta_i + \zeta_{i+2}) = 0$. Преобразуем левую часть последнего равенства:

$$\sum_{z=i}^{i+r-1} (-1)^z(\varkappa_{z+1} + \varkappa_z - \zeta_z + \zeta_{z+2})$$

$$= \sum_{z=i}^{i+r-1} (-1)^z \varkappa_{z+1} + \sum_{z=i}^{i+r-1} (-1)^z \varkappa_z - \sum_{z=i}^{i+r-1} (-1)^z \zeta_z + \sum_{z=i}^{i+r-1} (-1)^z \zeta_{z+2}$$

$$= -\sum_{z=i+1}^{i+r} (-1)^z \varkappa_z + \sum_{z=i}^{i+r-1} (-1)^z \varkappa_z - \sum_{z=i}^{i+r-1} (-1)^z \zeta_z + \sum_{z=i+2}^{i+r+1} (-1)^z \zeta_z$$

$$= (-1)^{i+r+1} \varkappa_{i+r} + (-1)^i \varkappa_i - (-1)^i \zeta_i + (-1)^i \zeta_{i+1}$$

$$+(-1)^{i+r} \zeta_{i+r} + (-1)^{i+r+1} \zeta_{i+r+1} = (-1)^i(2\varkappa_i - 2\zeta_i + 2\zeta_{i+1}).$$

Получаем, что $\varkappa_i = \zeta_i - \zeta_{i+1}$. Ясно, что эти $\varkappa_i$ удовлетворяют равенству $\varkappa_{i+1} + \varkappa_i = \zeta_i - \zeta_{i+2}$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что найдутся такие $\zeta_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, что

$$w = \sum_{i=1}^{r} (\zeta_i - \zeta_{i+1})(\beta_{i+1}\beta_i)^* + \sum_{i=1}^{r} \zeta_i(\beta_i \nu_{i,n-1-l})^*$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \zeta_i \Big(\sum_{j=n-l}^{n} (\mu_{i+3,j+l-n} \tau_i \nu_{i,j})^* \Big).$$

Это означает, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l+1} = r$.

(12) $\dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{2,m}_{2l+1} = \dim_K V^2_{2l+1} = r$, так как $\varphi^{2,m}_{2l+1} = 0$.

(13) Для $l = n - 1$ это следует из того, что $\widetilde{V}^0_{2(n-1)} = 0$. Пусть $0 \leqslant l \leqslant n - 2$ и $w = \sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{n-1-l} \zeta_{i,j}(\alpha_{i,j+l-1} \dots \alpha_{i,j})^* \in \widetilde{V}^0_{2l}$ для некоторых $\zeta_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n - 1 - l)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l}$ равносильно

тому, что

$$\widetilde{\varphi}_{2l}^{0,m}(w) = \sum_{i=1}^{r}(-1)^m\zeta_{i,n-1-l}\nu_{i,n-1-l}^* + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-2-l}(\zeta_{i,j}-\zeta_{i,j+1})(\alpha_{i,j+l}\dots\alpha_{i,j})^* + \sum_{i=1}^{r}\zeta_{i+2,1}(\mu_{i+2,l}\gamma_i)^* = 0.$$

Значит, если $\widetilde{\varphi}_{2l}^{0,m}(w) = 0$, то $\zeta_{i,n-1-l} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Из равенств $\zeta_{i,j} = \zeta_{i,j+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-2-l$ следует, что $\zeta_{i,j} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1-l$, то есть $w = 0$. Следовательно, $\dim_K \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}_{2l}^{0,m} = 0$.

(14) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и $w = \sum\limits_{i=1}^{r}\varkappa_i e_{i,n}^* \in \widetilde{V}_{2l}^1$ для некоторых $\varkappa_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}_{2l}^{1,m}$ равносильно тому, что

$$\widetilde{\varphi}_{2l}^{1,m}(w) = \sum_{i=1}^{r}((-1)^{m+1}\varkappa_i + \varkappa_{i+1})(\beta_i\nu_{i,n-1-l})^* + \sum_{i=1}^{r}\sum_{z=n-l}^{n}(\varkappa_i + (-1)^{m+1}\varkappa_{i+1})(\mu_{i+3,z+l-n}\tau_i\nu_{i,z}) = 0.$$

Далее разбор случаев проходит так же, как и в случае (5).

(15) Пусть $w = \sum\limits_{i=1}^{r}\varkappa_i e_{i,n}^* + \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\zeta_{i,j}e_{i,j}^* \in \widetilde{V}_{2(n-1)}^1$. Тогда $w \in \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}_{2(n-1)}^{1,m}$ равносильно тому, что

$$\widetilde{\varphi}_{2(n-1)}^{1,m}(w) = \sum_{i=1}^{r}((-1)^{m+1}\varkappa_i + \varkappa_{i+1} + (-1)^{m+1}\varkappa_{i+2} + \varkappa_{i+3} + \sum_{z=1}^{n-1}\zeta_{i+2,z}$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{z=1}^{n-1}\zeta_{i+3,z})(\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^* + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-1}((-1)^{m+1}\sum_{z=j}^{n-1}\zeta_{i,z}$$

$$+\varkappa_i + (-1)^{m+1}\varkappa_{i+1} + \sum_{z=1}^{j}\zeta_{i+3,z})(\mu_{i+3,j-1}\tau_i\nu_{i,j})^* = 0.$$

Пусть $m \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$. Тогда $\widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)}(w) = 0$ равносильно тому, что выполнено $-\varkappa_i + \varkappa_{i+1} - \varkappa_{i+2} + \varkappa_{i+3} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+2,z} - \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+3,z} = 0$, $-\sum\limits_{z=j}^{n-1} \zeta_{i,z} + \varkappa_i - \varkappa_{i+1} + \sum\limits_{z=1}^{j} \zeta_{i+3,z} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Предположим, что $\widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)}(w) = 0$. Так как

$$\sum_{z=j}^{n-1} \zeta_{i,z} - \sum_{z=1}^{j} \zeta_{i+3,z} = \varkappa_i - \varkappa_{i+1} = \sum_{z=j+1}^{n-1} \zeta_{i,z} - \sum_{z=1}^{j+1} \zeta_{i+3,z}$$

для $1 \leqslant j \leqslant n-2$, то $\zeta_{i+3,j+1} = -\zeta_{i,j}$ для $1 \leqslant j \leqslant n-2$. Далее по индукции получаем, что $\zeta_{i+3p,j+p} = (-1)^p \zeta_{i,j}$ для $0 \leqslant p \leqslant n-2$, $1 \leqslant j \leqslant n-1-p$. Следовательно, $\zeta_{i,j} = (-1)^{j-1} \zeta_{i-3(j-1),1}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Так как $-\zeta_{i,n-1} + \varkappa_i - \varkappa_{i+1} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+3,z} = 0$, $-\sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+2,z} + \varkappa_{i+2} - \varkappa_{i+3} + \zeta_{i+5,z} = 0$, то $\zeta_{i,n-1} - \varkappa_i + \varkappa_{i+1} - \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+3,z} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+2,z} - \varkappa_{i+2} + \varkappa_{i+3} - \zeta_{i+5,z} = 0$, то есть $\zeta_{i,n-1} = \zeta_{i+5,1}$. С другой стороны, $\zeta_{i,n-1} = (-1)^{n-2} \zeta_{i-3(n-2),1}$, то есть $\zeta_{i+5,1} = (-1)^{n-2} \zeta_{i-3(n-2),1}$. Заменяя i на $i-5$, получаем, что $\zeta_{i,1} = (-1)^{n-2} \zeta_{i-(3n-1),1}$. Отсюда получаем по индукции, что $\zeta_{i,1} = (-1)^{p(n-2)} \zeta_{i-p(3n-1),1}$ для любого p. Если $n \vdots 2$, то в силу того, что НОД $(3n-1, r) = 1$, это означает, что $\zeta_{i_1,1} = \zeta_{i_2,1}$ для $1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant r$. Пусть $\zeta_{i,1} = \zeta$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $\zeta_{i,j} = (-1)^{j-1} \zeta$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Следовательно, $\varkappa_{i+1} - \varkappa_i = -\sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i,z} + \zeta_{i+3,1} = -\sum\limits_{z=2}^{n-1} (-1)^z \zeta = 0$, то есть $\varkappa_{i+1} = \varkappa_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, и таким образом, если $\varkappa_1 = \varkappa$, то $\varkappa_i = \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)}$ равносильно тому, что $w = \varkappa(\sum\limits_{i=1}^{r} e^*_{i,n}) + \zeta(\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} e^*_{i,j})$ для некоторых $\varkappa, \zeta \in K$. Это значит, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)} = 2$. Пусть теперь $\operatorname{char} K = 2$, $n \not\vdots 2$, $r \not\vdots 2$. Тогда аналогично случаю $n \vdots 2$ получаем, что для некоторого $\zeta \in K$ мы имеем $\zeta_{i,1} = \zeta$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Далее $\zeta_{i,j} = (-1)^{j-1} \zeta = \zeta$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Тогда

$\varkappa_{i+1} - \varkappa_i = -\sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i,z} + \zeta_{i+3,1} = -(n-1)\zeta + \zeta = \zeta$. Тогда $\varkappa_{i+p} = \varkappa_i + p\zeta$ для любого p. Тогда $\varkappa_i = \varkappa_{i+r} = \varkappa_i + r\zeta = \varkappa_i + \zeta$, то есть $\zeta = 0$. Тогда $\varkappa_{i+1} = \varkappa_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть, если $\varkappa_1 = \varkappa$, то $\varkappa_i = \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)}$ равносильно тому, что $w = \varkappa(\sum\limits_{i=1}^{r} e^*_{i,n})$ для некоторого $\varkappa \in K$. Это значит, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)} = 1$.

Пусть теперь $m \not\vdots 2$, $r \not\vdots 2$ и $\operatorname{char} K \neq 2$. Тогда $\widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)}(w) = 0$ равносильно тому, что $\varkappa_i + \varkappa_{i+1} + \varkappa_{i+2} + \varkappa_{i+3} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+2,z} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+3,z} = 0$, $\sum\limits_{z=j}^{n-1} \zeta_{i,z} + \varkappa_i + \varkappa_{i+1} + \sum\limits_{z=1}^{j} \zeta_{i+3,z} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Предположим, что $\widetilde{\varphi}^{1,m}_{2(n-1)}(w) = 0$. Так как $\sum\limits_{z=j}^{n-1} \zeta_{i,z} + \sum\limits_{z=1}^{j} \zeta_{i+3,z} = -\varkappa_i - \varkappa_{i+1} = \sum\limits_{z=j+1}^{n-1} \zeta_{i,z} + \sum\limits_{z=1}^{j+1} \zeta_{i+3,z}$ для $1 \leqslant j \leqslant n-2$, то $\zeta_{i+3,j+1} = \zeta_{i,j}$ для $1 \leqslant j \leqslant n-2$. Далее по индукции получаем, что $\zeta_{i+3p,j+p} = \zeta_{i,j}$ для $0 \leqslant p \leqslant n-2$, $1 \leqslant j \leqslant n-1-p$. Следовательно, $\zeta_{i,j} = \zeta_{i-3(j-1),1}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Так как $\zeta_{i,n-1} + \varkappa_i + \varkappa_{i+1} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+3,z} = 0$, $\sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+2,z} + \varkappa_{i+2} + \varkappa_{i+3} + \zeta_{i+5,z} = 0$, то $\zeta_{i,n-1} + \varkappa_i + \varkappa_{i+1} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+3,z} + \sum\limits_{z=1}^{n-1} \zeta_{i+2,z} + \varkappa_{i+2} + \varkappa_{i+3} + \zeta_{i+5,z} = 0$, то есть $\zeta_{i,n-1} = -\zeta_{i+5,1}$. С другой стороны, $\zeta_{i,n-1} = \zeta_{i-3(n-2),1}$, то есть $\zeta_{i+5,1} = -\zeta_{i-3(n-2),1}$. Заменяя i на $i-5$, получаем, что $\zeta_{i,1} = -\zeta_{i-(3n-1),1}$. Отсюда получаем по индукции, что $\zeta_{i,1} = (-1)^p \zeta_{i-p(3n-1),1}$ для любого p. Тогда $\zeta_{i,1} = (-1)^r \zeta_{i-r(3n-1),1} = -\zeta_{i,1}$, то есть $\zeta_{i,1} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $\zeta_{i,j} = \zeta_{i-3(j-1),1} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Тогда $\varkappa_{i+1} = -\varkappa_i$. Далее получаем по индукции, что $\varkappa_{i+p} = (-1)^p \varkappa_i$ для любого p и, следовательно, $\varkappa_i = \varkappa_{i+r} = (-1)^r \varkappa_i = -\varkappa_i$, то есть $\varkappa_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда из $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l}$ следует $w = 0$, то есть $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l} = 0$.

(16) $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{2,m}_{2l} = \dim_K \widetilde{V}^2_{2l} = r$, так как $\widetilde{\varphi}^{2,m}_{2l} = 0$.

(17) $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{3,m}_{2l} = \dim_K \widetilde{V}^3_{2l} = \begin{cases} r, & 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ rn, & l = 0, \end{cases}$

так как $\widetilde{\varphi}^{3,m}_{2l} = 0$.

(18) $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{4,m}_{2l} = \dim_K \widetilde{V}^4_{2l} = r(l+1)$, так как $\widetilde{\varphi}^{4,m}_{2l} = 0$.
(19) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$w = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1-l} \zeta_{i,j}(\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j})^* + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (\mu_{i+2,l}\gamma_i)^* \in \widetilde{V}^0_{2l+1}$$

для некоторых $\zeta_{i,j}$, $\varepsilon_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1-l)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что

$$\widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1}(w) = \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+2,z} + (-1)^m \sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+1,z}$$

$$+(-1)^m \zeta_{i+2,n-1-l} + \zeta_{i+1,n-1-l} - \varepsilon_i - (-1)^m \varepsilon_{i+1} \Big) (\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^* = 0.$$

Введём следующее обозначение:

$$\varkappa_i = (-1)^m \sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+1,z} + \zeta_{i+1,n-1-l} - \varepsilon_i.$$

Тогда $\widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1}(w) = 0$ равносильно тому, что $\varkappa_i + (-1)^m \varkappa_{i+1} = 0$. Если $m \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, то последнее равенство равносильно тому, что $\varkappa_i = \varkappa_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть, если $\varkappa_1 = \varkappa$, то $\varkappa_i = \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что найдётся $\varkappa \in K$, такое, что $\varepsilon_i = \sum\limits_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+1,z} + \zeta_{i+1,n-1-l} - \varkappa$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть

$$w = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1-l} \zeta_{i,j}(\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j})^*$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+1,z} + \zeta_{i+1,n-1-l} - \varkappa \Big) (\mu_{i+2,l}\gamma_i)^*$$

для некоторых $\zeta_{i,j}, \varkappa \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1-l)$. Это означает, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1} = r(n-1-l)+1$. Если же $m \vdots 2$, $\operatorname{char} K \neq 2$ и $r \not\vdots 2$, то $\widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1}(w) = 0$ равносильно тому, что $\varkappa_{i+1} =$

$-\varkappa_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда получаем по индукции $\varkappa_{i+p} = (-1)^p \varkappa_i$. Следовательно, $\varkappa_i = \varkappa_{i+r} = (-1)^r \varkappa_i = -\varkappa_i$. Тогда $\varkappa_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Значит, $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что

$$\varepsilon_i = -\sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+1,z} + \zeta_{i+1,n-1-l}$$

для $1 \leqslant i \leqslant r$, то есть

$$\begin{aligned} w = &\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1-l} \zeta_{i,j} (\alpha_{i,j+l} \dots \alpha_{i,j})^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \Big(-\sum_{z=1}^{n-2-l} \zeta_{i+1,z} + \zeta_{i+1,n-1-l} \Big) (\mu_{i+2,l} \gamma_i)^* \end{aligned}$$

для некоторых $\zeta_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1-l)$. Это означает, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l+1} = r(n-1-l)$.

(20) Пусть $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$\begin{aligned} w = &\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (\beta_i \nu_{i,n-1-l})^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=n-l}^{n} \zeta_{i,j} (\mu_{i+3,j+l-n} \tau_i \nu_{i,j})^* \in \widetilde{V}^1_{2l+1} \end{aligned}$$

для некоторых $\varepsilon_i, \zeta_{i,j} \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r, n-l \leqslant j \leqslant n)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l+1}(w) = &\sum_{i=1}^{r} ((-1)^{m+1} \varepsilon_i - \zeta_{i,n-l}) (\tau_i \nu_{i,n-1-l})^* \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=n-l}^{n-1} (\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j+1}) (\mu_{i+3,j+l+1-n} \tau_i \nu_{i,j})^* = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство равносильно тому, что $\zeta_{i,j} = (-1)^{m+1} \varepsilon_i$ для $(1 \leqslant i \leqslant r,\ n-l \leqslant j \leqslant n)$. Тогда $w \in \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l+1}$ равносильно тому, что найдутся такие $\varepsilon_i \in K$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, что

$$w = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (\beta_i \nu_{i,n-1-l})^* + (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \Big(\sum_{j=n-l}^{n} (\mu_{i+3,j+l-n} \tau_i \nu_{i,j})^* \Big).$$

Это означает, что в этом случае $\dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l+1} = r$.

Лемма доказана.

Заметим следующий факт. Рассмотрим линейное подпространство пространства R, порождённое над K всеми путями, ведущими из вершины $(i_2-1)n+j_2$ в вершину $(i_1-1)n+j_1$. Пусть $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ – его базис. Ясно, что $(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_p^*)$ – базис $\operatorname{Hom}_\Lambda(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}, R)$, то есть:

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}, R) = \bigoplus_{i=1}^{p} V(w_i). \tag{3.1}$$

Пусть l и m – некоторые целые числа. Рассмотрим следующее условие на l и m:

$$\mathcal{P}(l,m) \equiv \begin{cases} l \vdots 2, & \text{если } n \vdots 2 \text{ или } m \vdots 2, \\ l \not\vdots 2, & \text{если } n \not\vdots 2 \text{ и } m \not\vdots 2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Рассмотрим t-ый член бимодульной резольвенты алгебры R. Пусть $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$ или $t = 2l+1+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$. Из описания Q_t, данного в теореме 1, легко следует, что, если выполняется $\mathcal{P}(l,m)$, то в этих случаях $Q_t = \sigma^m(T_{2l})$ или $Q_t = \sigma^m(T_{2l+1})$ соответственно, а, если не выполняется $\mathcal{P}(l,m)$, то $Q_t = \sigma^m(T'_{2l})$ или $Q_t = \sigma^m(T'_{2l+1})$ соответственно. Кроме того, заметим, что $\mathcal{P}(l,m)$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(l+1,m)$ не выполнено, а $\mathcal{P}(n-1,m)$ выполнено тогда и только тогда, когда не выполнено $\mathcal{P}(0,m+1)$.

Случай $r \geqslant 4$**.** В этом пункте везде полагаем, что $r \geqslant 4$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{HH}^t(R)$ *– t-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Предположим, что $r \geqslant 4$. Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R)$ *принимает следующие значения:*

1, *если выполнено одно из условий:*

$$\begin{gathered} t = 2l + m(2n-1) \text{ или } t = 2l+1+m(2n-1),\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \\ \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m),\ 3l + m(3n-1) \vdots r \text{ и } \left[\begin{array}{l} \operatorname{char} K = 2, \\ m \vdots 2, \end{array}\right. \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$t = 2l + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 1 + m(2n-1),\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,$$
$$\text{выполнено } \mathcal{P}(l,m),\ 3l + m(3n-1) - 2 \vdots r \text{ и } \left[\begin{array}{l} \operatorname{char} K = 2, \\ m \vdots 2, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2l + 1 + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 2 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m), \\ 3l + m(3n-1) + 1 \vdots r \text{ и } \left[\begin{array}{l} \operatorname{char} K = 2, \\ m \not\vdots 2, \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2l + 1 + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 2 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m), \\ 3l + m(3n-1) - 1 \vdots r \text{ и } \left[\begin{array}{l} \operatorname{char} K = 2, \\ m \not\vdots 2, \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2l + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 1 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \mathcal{P}(l,m) \text{ не выполняется}, \\ 3l + m(3n-1) - 1 \vdots r \text{ и } \left[\begin{array}{l} \operatorname{char} K = 2, \\ m \vdots 2, \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2l + 1 + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 2 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \mathcal{P}(l,m) \text{ не выполняется}, \\ 3l + m(3n-1) \vdots r \text{ и } \left[\begin{array}{l} \operatorname{char} K = 2, \\ m \not\vdots 2, \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2n - 2 + m(2n-1) \text{ или } t = (m+1)(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \mathcal{P}(n-1,m) \text{ не выполняется}, \\ 3(n-1) + m(3n-1) - 1 \vdots r,\ \operatorname{char} K = 2 \text{ и } n \not\vdots 2, \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2n - 2 + m(2n-1) \text{ или } t = (m+1)(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(n-1,m), \\ 3(n-1) + m(3n-1) \vdots r, \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 2n - 2 + m(2n-1) \text{ или } t = (m+1)(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(n-1,m), \\ 3(n-1) + m(3n-1) - 1 \vdots r, \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{array}{c} t = 2n-2+m(2n-1) \text{ или } t=(m+1)(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \text{ выполнено } \mathcal{P}(n-1,m), \\ 3(n-1)+m(3n-1)-2 \vdots r; \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

2, *если выполнено условие:*

$$\begin{array}{c} t = 2n-2+m(2n-1) \text{ или } t=(m+1)(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \mathcal{P}(n-1,m) \text{ не выполняется}, \\ 3(n-1)+m(3n-1)-1 \vdots r, \ n \vdots 2 \text{ и } \left[\begin{array}{l} \operatorname{char} K = 2, \\ m \vdots 2; \end{array}\right. \end{array} \tag{3.13}$$

0, *если не выполняется ни одно из условий, описанных выше.*

Лемма 3. *Пусть Q_t – один из членов резольвенты из теоремы 1. Если $r > 4$, то выполнено одно из условий:*

(1) $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$ *и* $3l + m(3n-1) - q \vdots r$, *где* $q \in \{0,1,2,3,4\}$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = V^q_{2l}$.

(2) $t = 2l+1+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$ *и* $3l+m(3n-1)-q \vdots r$, *где* $q \in \{-1,0,1,2\}$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = V^q_{2l+1}$.

(3) $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется и* $3l + m(3n-1) - q \vdots r$, *где* $q \in \{0,1,2,3,4\}$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \widetilde{V}^q_{2l}$.

(4) $t = 2l + 1 + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется и* $3l + m(3n-1) - q \vdots r$, *где* $q \in \{0,1\}$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \widetilde{V}^q_{2l+1}$.

(5) $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = 0$.

Доказательство леммы 3. Из (3.1) и того, что $r > 4$, вытекает следующее описание $\operatorname{Hom}_\Lambda(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}, R)$ для фиксированных i_1, i_2,

$1 \leqslant j_1 \leqslant n$, $1 \leqslant j_2 \leqslant n$:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}, R) = \begin{cases} V(\alpha_{i_2,j_1-1}\ldots\alpha_{i_2,j_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2 (\bmod r),\ j_1 \geqslant j_2, \\ V(\mu_{i_2+3,j1-1}\tau_{i_2}\nu_{i_2,j_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2+3 (\bmod r),\ j_1 \leqslant j_2, \\ V(\beta_{i_2}\nu_{i_2,j_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2+1 (\bmod r),\ j_1 = n, \\ V(\mu_{i_2+2,j_1-1}\gamma_{i_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2+2 (\bmod r),\ j_2 = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее, если учесть, что $Q_t = \sigma^l(T_{2l})$, $Q_t = \sigma^l(T_{2l+1})$, $Q_t = \sigma^l(T'_{2l})$ и $Q_t = \sigma^l(T'_{2l+1})$ для пунктов (1), (2), (3) и (4) соответственно, проверка утверждения леммы не представляет труда.

Лемма 4. *Пусть $r > 4$, и пусть Q_t – один из членов резольвенты из теоремы* 1.

(1) *Пусть выполнено условие* (1) *леммы* 3. *Тогда* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = U^q_{2l} \oplus U$ *для некоторого* U, *и, если* $i_1 : U^q_{2l} \to \mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$ – *прямое вложение* U^q_{2l} *в* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1\varphi^{q,m}_{2l}$. *Кроме того, выполнены следующие условия:*

(а) *если* $q \in \{0, 2\}$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *и* $m \not\vdots 2$, *то* $r \not\vdots 2$;

(б) *если* $q \in \{0, 2\}$, $l = n-1$, *то* $m \vdots 2$;

(в) *если* $q = 1$, $l = n-1$, *то* $m \vdots 2$, $n \not\vdots 2$, $r \not\vdots 2$ *и* НОД $(3n-1, r) = 1$.

(2) *Пусть выполнено условие* (2) *леммы* 3. *Тогда* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = U^q_{2l+1} \oplus U$ *для некоторого* U, *и, если* $i_1 : U^q_{2l+1} \to \mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$ – *прямое вложение* U^q_{2l+1} *в* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1\varphi^{q,m}_{2l+1}$. *Кроме того, выполнено следующее условие:*

если $q \in \{-1, 1\}$ *и* $m \vdots 2$, *то* $r \not\vdots 2$.

(3) *Пусть выполнено условие* (3) *леммы* 3. *Тогда* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = \widetilde{U}^q_{2l} \oplus U$ *для некоторого* U, *и, если* $i_1 : \widetilde{U}^q_{2l} \to \mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$ – *прямое вложение* $\widetilde{U}^q_{2l}$ *в* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1\widetilde{\varphi}^{q,m}_{2l}$. *Кроме того, выполнены следующие условия:*

(а) *если* $q = 1$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$ *и* $m \not\vdots 2$, *то* $r \not\vdots 2$;

(б) *если* $q = 1$, $l = n-1$, *то* НОД $(3n-1, r) = 1$. *Если* $n \not\vdots 2$, *то* $m \not\vdots 2$. *Если* $n \not\vdots 2$ *или* $m \not\vdots 2$, *то* $r \not\vdots 2$.

(4) *Пусть выполнено условие* (4) *леммы* 3. *Тогда* $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R) = \widetilde{U}^q_{2l+1} \oplus U$ *для некоторого* U, *и, если* $i_1 : \widetilde{U}^q_{2l+1} \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$ *– прямое вложение* $\widetilde{U}^q_{2l+1}$ *в* $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1 \widetilde{\varphi}^{q,m}_{2l+1}$. *Кроме того, выполнено следующее условие:*

если $q = 0$ *и* $m \vdots 2$, *то* $r \not\vdots 2$.

Доказательство. 1. То, что U^q_{2l} – прямое слагаемое $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$, легко получается из леммы 3. Надо проверить, что $\varphi^{q,m}_{2l}(w)(\eta) = \delta^t(w)(\eta) = w(d_t(\eta)) = w(\sigma^m(s_{2l})(\eta))$ для любого $w \in V^q_{2l}$ и любого $\eta = e_{i_1,j_1} \otimes e_{i_2,j_2} \in Q_{t+1}$. Проверка этого равенства во всех случаях не представляет труда.

(а) Пусть $m \not\vdots 2$. Если $r \vdots 2$, то, поскольку по предположению $m(3n-1)+3l-q \vdots r$, имеем $m(3n-1)+3l \vdots 2$. Если $n \vdots 2$, то из выполнения $\mathcal{P}(l,m)$ следует, что $l \vdots 2$, а тогда $m(3n-1)+3l \not\vdots 2$. Если же $n \not\vdots 2$, то из выполнения $\mathcal{P}(l,m)$ следует, что при $m \not\vdots 2$ мы имеем $l \not\vdots 2$, то есть опять $m(3n-1)+3l \not\vdots 2$. Противоречие.

(б) Следует из того, что $\mathcal{P}(n-1,m)$ может выполняться лишь при $m \vdots 2$.

(в) Из того, что выполнено $\mathcal{P}(n-1,m)$, следует, что $n \not\vdots 2$, $m \vdots 2$. Так как $m(3n-1)+3(n-1)-1 = (m+1)(3n-1)-3 \vdots r$, но $(m+1)(3n-1)-3 \not\vdots 2$ (так как $3n-1 \vdots 2$), то $r \not\vdots 2$. Если НОД $(3n-1, r) = d$, то $3 \vdots d$. Следовательно, $d = 1$ или $d = 3$. Но $3n-1 \not\vdots 3$, то есть НОД $(3n-1, r) = 1$.

2. То, что U^q_{2l+1} – прямое слагаемое $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$, легко получается из леммы 3. Надо проверить, что $\varphi^{q,m}_{2l+1}(w)(\eta) = \delta^t(w)(\eta) = w(d_t(\eta)) = w(\sigma^m(s_{2l+1})(\eta))$ для любого $w \in V^q_{2l+1}$ и любого $\eta = e_{i_1,j_1} \otimes e_{i_2,j_2} \in Q_{t+1}$. Проверка этого равенства во всех случаях не представляет труда. Далее, пусть $q \in \{-1, 1\}$ и $m \vdots 2$. Имеем $m(3n-1)+3l-q \vdots r$, следовательно, если $r \vdots 2$, то $m(3n-1)+3l \not\vdots 2$. Тогда $l \not\vdots 2$. Но из выполнения $\mathcal{P}(l,m)$ следует, что, если $m \vdots 2$, то $l \vdots 2$. Противоречие.

3. То, что $\widetilde{U}^q_{2l}$ – прямое слагаемое $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$, легко получается

из леммы 3. Надо проверить, что $\widetilde{\varphi}^{q,m}_{2l}(w)(\eta) = \delta^t(w)(\eta) = w(d_t(\eta)) = w(\sigma^m(s'_{2l})(\eta))$ для любого $w \in \widetilde{V}^q_{2l}$ и любого $\eta = e_{i_1,j_1} \otimes e_{i_2,j_2} \in Q_{t+1}$. Проверка этого равенства во всех случаях не представляет труда.

(а) Пусть $m \not\vdots 2$. Если $r \vdots 2$, то, поскольку по предположению $m(3n-1)+3l-q \vdots r$, имеем $m(3n-1)+3l \not\vdots 2$. Если $n \vdots 2$, то из того, что $\mathcal{P}(l,m)$ не выполняется, следует, что $l \not\vdots 2$, а тогда $m(3n-1)+3l \vdots 2$. Если же $n \not\vdots 2$, то из того, что $\mathcal{P}(l,m)$ не выполняется, следует, что при $m \not\vdots 2$ мы имеем $l \vdots 2$, то есть опять $m(3n-1)+3l \vdots 2$. Противоречие.

(б) Первое утверждение этого пункта доказывается так же, как и в пункте (в) случая 1. Если $n \not\vdots 2$, то из того, что $\mathcal{P}(n-1,m)$ не выполняется, следует, что $m \not\vdots 2$. Если $n \not\vdots 2$ или $m \not\vdots 2$, то $m(3n-1)+3(n-1)-1 = (m+1)(3n-1)-3 \not\vdots 2$. Так как $(m+1)(3n-1)-3 \vdots r$, то $r \not\vdots 2$.

4. То, что $\widetilde{U}^q_{2l+1}$ – прямое слагаемое $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1},R)$, легко получается из леммы 3. Надо проверить, что $\widetilde{\varphi}^{q,m}_{2l+1}(w)(\eta) = \delta^t(w)(\eta) = w(d_t(\eta)) = w(\sigma^m(s'_{2l+1})(\eta))$ для любого $w \in \widetilde{V}^q_{2l+1}$ и любого $\eta = e_{i_1,j_1} \otimes e_{i_2,j_2} \in Q_{t+1}$. Проверка этого равенства во всех случаях не представляет труда. Далее, пусть $q=0$ и $m \vdots 2$. Имеем $m(3n-1)+3l \vdots r$, следовательно, если $r \vdots 2$, то $m(3n-1)+3l \vdots 2$. Тогда $l \vdots 2$. Но из того, что $\mathcal{P}(l,m)$ не выполняется, следует, что при $m \vdots 2$ мы имеем $l \not\vdots 2$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Предположим, что $r=4$. Пусть Q_t – один из членов резольвенты из теоремы 1. Тогда выполнено одно из условий:*

(1) $t = 2l+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$ *и* $3l+m(3n-1)-q \vdots r$, *где* $q \in \{1,2,3\}$. *В этом случае* $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = V^q_{2l}$.

(1′) $t = 2l+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$ *и* $3l+m(3n-1) \vdots r$. *В этом случае* $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = V^0_{2l} \oplus V^4_{2l}$.

(2) $t = 2l+1+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$ *и* $3l+m(3n-1)-q\vdots r$, *где* $q \in \{-1,0,1,2\}$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = V^q_{2l+1}$.

(3) $t = 2l+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется и* $3l+m(3n-1)-q\vdots r$, *где* $q \in \{1,2,3\}$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = \widetilde{V}^q_{2l}$.

(3′) $t = 2l+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется и* $3l+m(3n-1)\vdots r$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = \widetilde{V}^0_{2l} \oplus \widetilde{V}^4_{2l}$.

(4) $t = 2l+1+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется и* $3l+m(3n-1)-q\vdots r$, *где* $q \in \{0,1\}$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = \widetilde{V}^q_{2l+1}$.

(5) $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = 0$.

Доказательство леммы 5. По-прежнему верно данное в лемме 3 описание для $\operatorname{Hom}_\Lambda(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]},R)$, и проверить утверждение леммы не представляет труда.

Ясно, что верен и аналог леммы 4 с той лишь разницей, что в случаях (1′) и (3′) леммы 5 мы имеем $\delta^t = \varphi^{0,m}_{2l} \oplus \varphi^{4,m}_{2l}$ и $\delta^t = \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l} \oplus \widetilde{\varphi}^{4,m}_{2l}$ соответственно.

Доказательство теоремы 2. Сначала разберём случай $r > 4$. Заметим, что при $t > 0$

$$\begin{aligned}\dim_K \operatorname{HH}^t(R)\\ &= \dim_K \operatorname{Ker}\delta^t + \dim_K \operatorname{Ker}\delta^{t-1} - \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t-1},R). \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Так как $\dim_K \operatorname{HH}^t(R) \leqslant \dim_K \operatorname{Ker}\delta^t \leqslant \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)$, то $\dim_K \operatorname{HH}^t(R)$ может быть не равно 0 только в случаях, указанных в лемме 3. Разберём эти случаи.

1. Пусть $t = 2l+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, выполнено $\mathcal{P}(l,m)$ и $3l+m(3n-1)\vdots r$. Если $l > 0$, то $t-1 = 2l-1+m(2n-1)$ и $\mathcal{P}(l-1,m)$ не выполняется. Поэтому $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t-1},R) = 0$, если $3l-3+m(3n-1)-q \not\vdots r$ для $q \in \{0,1\}$. Так как $r > 4$, это следует из $3l+m(3n-1)\vdots r$. Если $l = 0$, то либо $t = 0$, либо $t-1 = 2(n-1)+(m-1)(2n-1)$ и $\mathcal{P}(n-1,m-1)$ не выполняется. Во втором случае $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t-1},R) = 0$, если $3n-3+(m-1)(3n-1)-q \not\vdots r$ для $q \in \{0,1,2,3,4\}$. Так как

$r > 4$, то для $q = 1$ это следует из $m(3n-1)\vdots r$. Если же это не верно для $q \in \{0, 2, 3, 4\}$, то $\delta^{t-1} = \widetilde{\varphi}^{q,m}_{2(n-1)} = 0$. Значит, в любом случае $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \operatorname{Ker} \delta^t = \dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{0,m}_{2l}$. Если $m\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, то выполняется первая часть условия (3.3). Тогда по лемме 2 имеем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$. Если же $m \not\vdots 2$ и $\operatorname{char} K \neq 2$, то не выполняется ни одно из условий, описанных в теореме 2. Тогда по лемме 4 имеем $r \not\vdots 2$, то есть по лемме 2 получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

2. Пусть $t = 2(n-1) + m(2n-1)$, выполнено $\mathcal{P}(n-1, m)$ и $3(n-1) + m(3n-1)\vdots r$. Тогда аналогично части 1 этого доказательства имеем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{0,m}_{2(n-1)}$. Следовательно, выполняется первая часть условия (3.10). Тогда по лемме 4 имеем $m\vdots 2$, то есть по лемме 2 получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$.

3. Пусть $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, выполнено $\mathcal{P}(l, m)$ и $3l + m(3n-1) - 1\vdots r$. Тогда не выполняется ни одно из условий теоремы 2. По лемме 2 имеем $\operatorname{Ker} \delta^t = \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2l} = 0$, а тогда и $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

4. Пусть $t = 2(n-1) + m(2n-1)$, выполнено $\mathcal{P}(n-1, m)$ и $3(n-1) + m(3n-1) - 1\vdots r$. Тогда аналогично части 1 этого доказательства имеем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{1,m}_{2(n-1)}$. Тогда выполняется первая часть условия(3.11). Тогда по лемме 4 имеем $m\vdots 2$, $n \not\vdots 2$, $r \not\vdots 2$ и НОД $(3n-1, r) = 1$, то есть по лемме 2 получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$.

5. Пусть $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, выполнено $\mathcal{P}(l, m)$ и $3l + m(3n-1) - 2\vdots r$. Тогда аналогично части 1 этого доказательства получаем, что при $m\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$ выполняется первая часть условия (3.4) и $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$, а при $m \not\vdots 2$ и $\operatorname{char} K \neq 2$ не выполняется ни одно из условий, описанных в теореме 2, и $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$.

6. Пусть $t = 2(n-1) + m(2n-1)$, выполнено $\mathcal{P}(n-1, m)$ и $3(n-1) + m(3n-1) - 2\vdots r$. Тогда выполняется первая часть условия (3.12). Аналогично части 2 этого доказательства получаем, что $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$.

7. Пусть $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, выполнено $\mathcal{P}(l, m)$

и $3l + m(3n-1) - 3 \vdots r$. Рассмотрим сначала случай $l = 0$. Ясно, что $m > 0$. Тогда $t-1 = 2(n-1)+(m-1)(2n-1)$, $\mathcal{P}(n-1, m-1)$ не выполняется, а потому $\delta^{t-1} = \widetilde{\varphi}^{1,m-1}_{2(n-1)}$. Тогда, используя лемму 2, получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \operatorname{Ker} \delta^t + \dim_K \operatorname{Ker} \delta^{t-1} - \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda (Q_{t-1}, R) = rn + \dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m-1}_{2(n-1)} - rn = \dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m-1}_{2(n-1)}$. Кроме того, по лемме 4 имеем $\text{НОД}\,(3n-1, r) = 1$. Если $m \vdots 2$ и $\operatorname{char} K \neq 2$, то не выполняется ни одно из условий, описанных в теореме 2. Тогда по лемме 4 имеем $r \not\vdots 2$, а, следовательно, по лемме 2 получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$. Пусть теперь $m \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$. Предположим, что $n \vdots 2$. Тогда выполняется вторая часть условия (3.13) (с заменой m на $m-1$). Тогда по лемме 2 имеем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 2$. Если же $n \not\vdots 2$, то по лемме 4 получаем $r \not\vdots 2$ и $m \vdots 2$, а тогда $\operatorname{char} K = 2$. В этом случае выполняется вторая часть условия (3.9) (с заменой m на $m-1$). Тогда по лемме 2 имеем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 1$. Разберём теперь случай $l > 0$. Тогда $t-1 = 2l-1+m(2n-1)$, $\mathcal{P}(l-1, m)$ не выполняется, а потому $\delta^{t-1} = \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l-1}$. Тогда, используя лемму 2, получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \operatorname{Ker} \delta^t + \dim_K \operatorname{Ker} \delta^{t-1} - \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda (Q_{t-1}, R) = \dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{3,m}_{2l} + \dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l-1} - \dim_K \widetilde{V}^0_{2l-1} = r + \dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l-1} - r(n+1-l) = \dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{0,m}_{2l-1} - r(n-l)$. Если $m \not\vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$, то выполняется вторая часть условия (3.8) (с заменой l на $l-1$). Тогда по лемме 2 имеем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = r(n-l) + 1 - r(n-l) = 1$. Если же $m \vdots 2$ и $\operatorname{char} K \neq 2$, то не выполняется ни одно из условий, описанных в теореме 2. Тогда по лемме 4 имеем $r \not\vdots 2$, а тогда по лемме 2 получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = r(n-l) - r(n-l) = 0$.

8. Пусть $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, выполнено $\mathcal{P}(l, m)$ и $3l + m(3n-1) - 4 \vdots r$. Тогда не выполняется ни одно из условий, описанных в теореме 2. По лемме 2 имеем $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^t = \dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{4,m}_{2l} = rl$. Тогда при $l = 0$ автоматически имеем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = 0$. Если $l > 0$, то $t-1 = 2l-1+m(2n-1)$, $\mathcal{P}(l-1, m)$ не выполняется, а потому $\delta^{t-1} = \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l-1}$. Тогда, используя лемму 2, получаем $\dim_K \mathrm{HH}^t(R) = \dim_K \operatorname{Ker} \delta^t + \dim_K \operatorname{Ker} \delta^{t-1} - \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda (Q_{t-1}, R) = \dim_K \operatorname{Ker} \varphi^{4,m}_{2l} + \dim_K \operatorname{Ker} \widetilde{\varphi}^{1,m}_{2l-1} - \dim_K \widetilde{V}^1_{2l-1} = rl + r - r(l+1) = 0$.

Аналогично анализируются оставшиеся случаи (2)–(4) леммы 3.

В случае $r = 4$ вместо леммы 3 надо использовать лемму 5. Все возникающие при этом варианты разбираются так же, как и в случае $r > 4$. То, что в этом случае при $t = 2l + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, $3l + m(3n-1) \vdots r$ мы имеем $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = V_{2l}^0 \oplus V_{2l}^4$ или $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) = \widetilde{V}_{2l}^0 \oplus \widetilde{V}_{2l}^4$ в зависимости от того, выполнено $\mathcal{P}(l,m)$ или нет, ничего не меняет, поскольку для таких Q_t имеем $\varphi_{2l}^{4,m} = 0$ и $V_{2l}^4 \subset \mathrm{Im}\,\delta^{t-1}$ или $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\varphi}_{2l}^{0,m} = 0$ и $\widetilde{\varphi}_{2l}^{4,m} = 0$ соответственно.

Случай $r \leqslant 2$**.** В этом пункте разберём случай $r \leqslant 2$ (случай $r = 3$ не рассматривается, так как $r \not\vdots 3$).

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{HH}^t(R)$ *– t-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Предположим, что $r = 2$. Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R)$ *принимает следующие значения:*

1, *если выполнено одно из условий:*

$$\begin{gathered} t = 2l + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 1 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,\ \mathcal{P}(l,m) \text{ не выполняется}, \\ 3l + m(3n-1) - 1 \vdots r, \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} t = 2l + 1 + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 2 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,\ \mathcal{P}(l,m) \text{ не выполняется}, 3l + m(3n-1) \vdots r; \end{gathered} \tag{3.16}$$

2, *если выполнено одно из условий:*

$$\begin{gathered} t = 2l + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 1 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m), \\ 3l + m(3n-1) \vdots r, \end{gathered} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} t = 2l + 1 + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 2 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m), \\ 3l + m(3n-1) - 1 \vdots r, \end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\begin{gathered} t = 2n - 2 + m(2n-1) \text{ или } t = (m+1)(2n-1), \\ \mathcal{P}(n-1,m) \text{ не выполняется}, \\ 3(n-1) + m(3n-1) - 1 \vdots r, \end{gathered} \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered} t = 2n-2+m(2n-1) \text{ или } t=(m+1)(2n-1), \\ \text{выполнено } \mathcal{P}(n-1,m),\ 3(n-1)+m(3n-1)\vdots r. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Лемма 6. *Пусть $r=2$, и пусть Q_t – один из членов резольвенты из теоремы 1. Тогда выполнено одно из условий:*

(1) $t=2l+m(2n-1)$, $0\leqslant l\leqslant n-1$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$. *В этом случае:*

(а) *если* $3l+m(3n-1)\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=V_{2l}^0\oplus V_{2l}^2\oplus V_{2l}^4$;

(б) *если* $3l+m(3n-1)-1\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=V_{2l}^1\oplus V_{2l}^3$.

(2) $t=2l+1+m(2n-1)$, $0\leqslant l\leqslant n-2$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$. *В этом случае:*

(а) *если* $3l+m(3n-1)\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=V_{2l+1}^0\oplus V_{2l+1}^2$;

(б) *если* $3l+m(3n-1)-1\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=V_{2l+1}^{-1}\oplus V_{2l+1}^1$.

(3) $t=2l+m(2n-1)$, $0\leqslant l\leqslant n-1$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется. В этом случае:*

(а) *если* $3l+m(3n-1)\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=\widetilde{V}_{2l}^0\oplus\widetilde{V}_{2l}^2\oplus\widetilde{V}_{2l}^4$;

(б) *если* $3l+m(3n-1)-1\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=\widetilde{V}_{2l}^1\oplus\widetilde{V}_{2l}^3$.

(4) $t=2l+1+m(2n-1)$, $0\leqslant l\leqslant n-2$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется. В этом случае:*

(а) *если* $3l+m(3n-1)\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=\widetilde{V}_{2l+1}^0$;

(б) *если* $3l+m(3n-1)-1\vdots r$, *то* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R)=\widetilde{V}_{2l+1}^1$.

Доказательство леммы 6. Из (3.1) и того, что $r=2$, вытекает следующее описание $\operatorname{Hom}_\Lambda(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]},R)$ для фиксированных i_1, i_2,

$1 \leqslant j_1 \leqslant n$, $1 \leqslant j_2 \leqslant n$:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(P_{[i_1,j_1][i_2,j_2]}, R)$$
$$= \begin{cases} V(\alpha_{i_2,j_1-1}\dots\alpha_{i_2,j_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2 (\bmod r),\ j_1 \geqslant j_2,\ j_2 < n, \\ V(\mu_{i_2+3,j1-1}\tau_{i_2}\nu_{i_2,j_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2+1 (\bmod r),\ j_1 \leqslant j_2,\ j_1 < n, \\ V(\beta_{i_2}\nu_{i_2,j_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2+1 (\bmod r),\ j_1 = n > j_2, \\ V(\mu_{i_2+2,j_1-1}\gamma_{i_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2 (\bmod r),\ j_2 = n > j_1, \\ V(e_{i_2,n}) \oplus V(\beta_{i_2+1}\beta_{i_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2 (\bmod r),\ j_1 = j_2 = n, \\ V(\beta_{i_2}) \oplus V(\beta_{i_2+2}\beta_{i_2+1}\beta_{i_2}), & \text{если } i_1 \equiv i_2+1 (\bmod r),\ j_1 = j_2 = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Далее проверить утверждение леммы не представляет труда.

Лемма 7. *Пусть $r = 2$, и пусть Q_t – один из членов резольвенты из теоремы* 1.

(1а) *Пусть выполнено условие* (1), (*а*) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = U^0_{2l} \oplus U^2_{2l} \oplus U^4_{2l} \oplus U$$

для некоторого U, и, если i_1 – прямое вложение $U^0_{2l} \oplus U^2_{2l} \oplus U^4_{2l}$ в $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1(\varphi^{0,m}_{2l} \oplus \varphi^{2,m}_{2l} \oplus \varphi^{4,m}_{2l})$.

(1б) *Пусть выполнено условие* (1), (б) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = U^1_{2l} \oplus U^3_{2l} \oplus U$$

для некоторого U, и, если i_1 – прямое вложение $U^1_{2l} \oplus U^3_{2l}$ в $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1(\varphi^{1,m}_{2l} \oplus \varphi^{3,m}_{2l})$.

(2а) *Пусть выполнено условие* (2), (а) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = U^0_{2l+1} \oplus U^2_{2l+1} \oplus U$$

для некоторого U, и, если i_1 – прямое вложение $U^0_{2l+1} \oplus U^2_{2l+1}$ в $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1(\varphi^{0,m}_{2l+1} \oplus \varphi^{2,m}_{2l+1})$.

(2б) *Пусть выполнено условие* (2), (б) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = U^{-1}_{2l+1} \oplus U^1_{2l+1} \oplus U$$

для некоторого U, и, если i_1 – прямое вложение $U^{-1}_{2l+1} \oplus U^1_{2l+1}$ в $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1(\varphi^{-1,m}_{2l+1} \oplus \varphi^{1,m}_{2l+1})$.

(3а) *Пусть выполнено условие* (3), (а) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = \widetilde{U}^0_{2l} \oplus \widetilde{U}^2_{2l} \oplus \widetilde{U}^4_{2l} \oplus U$$

для некоторого U, *и, если* i_1 *– прямое вложение* $\widetilde{U}^0_{2l} \oplus \widetilde{U}^2_{2l} \oplus \widetilde{U}^4_{2l}$ *в* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1(\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l} \oplus \widetilde{\varphi}^{\,2,m}_{2l} \oplus \widetilde{\varphi}^{\,4,m}_{2l})$.

(3б) *Пусть выполнено условие* (3), (б) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = \widetilde{U}^1_{2l} \oplus \widetilde{U}^3_{2l} \oplus U$$

для некоторого U, *и, если* i_1 *– прямое вложение* $\widetilde{U}^1_{2l} \oplus \widetilde{U}^3_{2l}$ *в* $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1(\widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2l} \oplus \widetilde{\varphi}^{\,3,m}_{2l})$.

(4а) *Пусть выполнено условие* (4), (а) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = \widetilde{U}^0_{2l+1} \oplus U$$

для некоторого U, *и, если* i_1 *– прямое вложение* $\widetilde{U}^0_{2l+1}$ *в*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R), \quad \text{то} \quad \delta^t = i_1\widetilde{\varphi}^{\,0,m}_{2l+1}.$$

(4б) *Пусть выполнено условие* (4), (б) *леммы* 6. *Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = \widetilde{U}^1_{2l+1} \oplus U$$

для некоторого U, *и, если* i_1 *– прямое вложение* $\widetilde{U}^1_{2l+1}$ *в*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R), \quad \text{то} \quad \delta^t = i_1\widetilde{\varphi}^{\,1,m}_{2l+1}.$$

Кроме того, в случаях (1а), (2а), (3б) *и* (4б) *имеем* $m \vdots 2$, *а в случаях* (1б), (2б), (3а) *и* (4а) $-m \not\vdots 2$. *Если* $l = n-1$, *то случай* (1б) *невозможен, а в случае* (3б) $-n \vdots 2$. *Если* $l = 0$, *то случай* (3б) *невозможен, а в случае* (1б) $-n \vdots 2$.

Доказательство леммы 7. Доказательство проходит так же, как и доказательство леммы 4.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства достаточно разобрать случаи, указанные в лемме 6. Пользуясь формулой (3.14) для $t > 0$, леммой 7 и леммой 2, в каждом случае легко проверить, что значение $\dim_K \mathrm{HH}^t(R)$ соответствует результату, указанному в теореме.

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{HH}^t(R)$ *–* t*-ая группа когомологий Хохшильда алгебры* R *с коэффициентами в* R*. Предположим, что* $r = 1$*. Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^t(R)$ *принимает следующие значения при* $t > 0$*:*

1, *если выполнено одно из условий:*

$$\begin{gathered} t = 2l + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 1 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,\ \mathcal{P}(l,m) \text{ не выполняется, } m \vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2, \end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} t = 2l + 1 + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 2 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,\ \mathcal{P}(l,m) \text{ не выполняется, } m \not\vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2; \end{gathered} \tag{3.22}$$

2, *если выполнено одно из условий:*

$$\begin{gathered} t = 2l + 1 + m(2n-1),\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \\ \mathcal{P}(l,m) \text{ не выполняется и } \operatorname{char} K = 2, \end{gathered} \tag{3.23}$$

$$\begin{gathered} t = 2l + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 1 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,\ \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m),\ m \vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2, \end{gathered} \tag{3.24}$$

$$\begin{gathered} t = 2l + 1 + m(2n-1) \text{ или } t = 2l + 2 + m(2n-1), \\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,\ \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m),\ m \not\vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2, \end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered} t = 2n - 2 + m(2n-1) \text{ или } t = (m+1)(2n-1), \\ \mathcal{P}(n-1,m) \text{ не выполняется, } n \vdots 2,\ m \vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2; \end{gathered} \tag{3.26}$$

3, *если выполнено одно из условий:*

$$t = 2l + m(2n-1),\ 0 \leqslant l \leqslant n-2,\ \operatorname{char} K = 2, \tag{3.27}$$

$$\begin{gathered} t = 2n - 2 + m(2n-1) \text{ или } t = (m+1)(2n-1), \\ \mathcal{P}(n-1,m) \text{ не выполняется, } n \not\vdots 2,\ \operatorname{char} K = 2, \end{gathered} \tag{3.28}$$

$$t = 2n-2+m(2n-1) \text{ или } t=(m+1)(2n-1), \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(n-1,m),\ \operatorname{char} K \neq 2; \tag{3.29}$$

4, *если выполнено одно из условий:*

$$t = 2l+1+m(2n-1),\ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(l,m) \text{ и } \operatorname{char} K = 2, \tag{3.30}$$

$$t = 2n-2+m(2n-1) \text{ или } t=(m+1)(2n-1), \quad \mathcal{P}(n-1,m) \text{ не выполняется, } n \vdots 2,\ \operatorname{char} K = 2, \tag{3.31}$$

$$t = 2n-2+m(2n-1) \text{ или } t=(m+1)(2n-1), \quad \text{выполнено } \mathcal{P}(n-1,m),\ \operatorname{char} K = 2; \tag{3.32}$$

0, *если выполнено условие:*

$$t = 2n-2+m(2n-1) \text{ или } t=(m+1)(2n-1), \quad \mathcal{P}(n-1,m) \text{ не выполняется, } n \not\vdots 2,\ \operatorname{char} K \neq 2. \tag{3.33}$$

Кроме того, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = rn+2$.

Лемма 8. *Пусть* $r=1$, *и пусть* Q_t *– один из членов резольвенты из теоремы* 1. *Тогда выполнено одно из условий:*

(1) $t = 2l+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = \bigoplus\limits_{q=0}^{4} V_{2l}^q$.

(2) $t = 2l+1+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, *выполнено* $\mathcal{P}(l,m)$. *В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = \bigoplus\limits_{q=-1}^{2} V_{2l+1}^q$.

(3) $t = 2l+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется. В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = \bigoplus\limits_{q=0}^{4} \widetilde{V}_{2l}^q$.

(4) $t = 2l+1+m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, $\mathcal{P}(l,m)$ *не выполняется. В этом случае* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_t,R) = \bigoplus\limits_{q=0}^{1} \widetilde{V}_{2l+1}^q$.

Доказательство леммы 8. Из (3.1) и того, что $r = 1$, следует следующее описание $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(P_{[0,j_1][0,j_2]}, R)$ для фиксированных $1 \leqslant j_1 \leqslant n$, $1 \leqslant j_2 \leqslant n$:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(P_{[0,j_1][0,j_2]}, R) = \begin{cases} V(\alpha_{0,j_1-1}\dots\alpha_{0,j_2}), & \text{если } n > j_1 > j_2, \\ V(\mu_{0,j1-1}\tau_0\nu_{0,j_2}), & \text{если } j_1 < j_2 < n, \\ V(e_{0,j_2}) \oplus V(\mu_{0,j2-1}\tau_0\nu_{0,j_2}), & \text{если } j_1 = j_2 < n, \\ V(\nu_{0,j_2}) \oplus V(\beta_0\nu_{0,j_2}), & \text{если } n = j_1 > j_2, \\ V(\mu_{0,j_1-1}\gamma_0) \oplus V(\mu_{0,j_1-1}\tau_0), & \text{если } j_1 < j_2 = n, \\ V(e_{0,n}) \oplus V(\beta_0) \oplus V(\beta_0\beta_0) \oplus V(\beta_0\beta_0\beta_0), & \text{если } j_1 = j_2 = n. \end{cases}$$

Далее проверить утверждение леммы не представляет труда.

Лемма 9. *Пусть $r = 1$, и пусть Q_t – один из членов резольвенты из теоремы 1.*

(1) *Пусть выполнено условие (1) леммы 8. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{4} U_{2l}^q\Big) \oplus U$$

для некоторого U, и, если i_1 – прямое вложение $\bigoplus\limits_{q=0}^{4} U_{2l}^q$ в

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R), \quad \text{то} \quad \delta^t = i_1\Big(\bigoplus_{q=0}^{4} U_{2l}^q\Big).$$

Кроме того, выполнено следующее условие:

если $l = n-1$, то $m \vdots 2$, $n \not\vdots 2$.

(2) *Пусть выполнено условие (2) леммы 8. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R) = \Big(\bigoplus_{q=-1}^{2} U_{2l+1}^q\Big) \oplus U$$

для некоторого U, и, если i_1 – прямое вложение $\bigoplus\limits_{q=-1}^{2} U_{2l+1}^q$ в $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(Q_{t+1}, R)$, то $\delta^t = i_1(\bigoplus\limits_{q=-1}^{2} \varphi_{2l+1}^{q,m})$.

(3) *Пусть выполнено условие* (3) *леммы* 8. *Тогда*

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{4} \widetilde{U}_{2l}^{q}\Big) \oplus U$$

для некоторого U, *и, если* i_1 *– прямое вложение* $\bigoplus\limits_{q=0}^{4} \widetilde{U}_{2l}^{q}$ *в*

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R), \quad \text{то} \quad \delta^t = i_1\Big(\bigoplus_{q=0}^{4} \widetilde{\varphi}_{2l}^{q,m}\Big).$$

Кроме того, выполнено следующее условие:

если $l = n-1$ *и* $n \not\vdots 2$, *то* $m \not\vdots 2$.

(4) *Пусть выполнено условие* (4) *леммы* 8. *Тогда*

$$\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{1} \widetilde{U}_{2l+1}^{q}\Big) \oplus U$$

для некоторого U *и, если* i_1 *– прямое вложение* $\bigoplus\limits_{q=0}^{1} \widetilde{U}_{2l+1}^{q}$ *в* $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$, *то* $\delta^t = i_1(\bigoplus\limits_{q=0}^{1} \widetilde{\varphi}_{2l+1}^{q,m})$.

Доказательство леммы 9. Доказательство проходит так же, как и доказательство леммы 4.

Доказательство теоремы 4. Для доказательства достаточно разобрать случаи, указанные в лемме 8 для $\operatorname{char} K = 2$ и $\operatorname{char} K \neq 2$. Пользуясь формулой (3.14) для $t > 0$, леммой 9 и леммой 2, в каждом случае легко проверить, что значение $\dim_K \operatorname{HH}^t(R)$ соответствует результату, указанному в теореме.

Из теорем 2–4 непосредственно вытекает следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Следствие 3. (a) $\dim_K \operatorname{HH}^0(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } r > 3, \\ 2, & \text{если } r = 2, \\ rn+2, & \text{если } r = 1; \end{cases}$

$$(\text{б})\ \dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } r > 3, \\ 2, & \text{если } r = 2 \text{ или } \begin{cases} r = 1, \\ \operatorname{char} K \neq 2, \end{cases} \\ 4, & \text{если } r = 1 \text{ и } \operatorname{char} K = 2; \end{cases}$$

$$(\text{в})\ \dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} 0, & \text{если } r > 3, \\ 1, & \text{если } \begin{cases} r = 2, \\ n > 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} r = 1, \\ n > 2, \\ \operatorname{char} K \neq 2, \end{cases} \\ 2, & \text{если } \begin{cases} r = 2, \\ n = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} r = 1, \\ n = 2, \\ \operatorname{char} K \neq 2, \end{cases} \\ 3, & \text{если } r = 1,\ n > 2 \text{ и } \operatorname{char} K = 2, \\ 4, & \text{если } r = 1,\ n = 2 \text{ и } \operatorname{char} K = 2. \end{cases}$$

Литература

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.
2. C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class A_n.* — Lect. Notes Math. **832** (1980), 449–520.
3. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math. **11** (1999), 177–201.
4. K. Erdmann, T. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* II. — Algebras and Repr. Theory **5** (2002), 457–482.
5. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
6. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
7. Ю. В. Волков, *Классы стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Вестник С.-Пб. ун-та, Сер. 1, Мат., мех., астр. (2008), Вып. 1, 15–21.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ. **343** (2007), 121–182.
9. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math. **1404** (1989), 108–126.
10. M. J. Bardzell, *The alternating syzygy behavior of monomial algebras.* — J. Algebra **188** (1997), 69–89.
11. K. Erdmann, A. Skowronski. *Periodic algebras.* — Trends in Representation Theory and Related Topics. European Math. Soc., Zurich (2008).

12. A. S. Dugas. *Periodic resolutions and self-injective algebras of finite type.* — Preprint, 2008.

Volkov Yu. V. Hochschild cohomology for self-injective algebras of tree class D_n. II.

The minimal projective bimodule resolution for certain family of representation-finite self-injective algebras of tree class D_n is constructed. Dimensions of the groups of Hochschild cohomology for the algebras under consideration are calculated by the instrumentality of this resolution. The constructed resolution is periodic and accordingly the Hochschild cohomology for these algebras are periodic too.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: wolf86_666@list.ru

Поступило 20 февраля 2009 г.