Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич

РАЗЛОЖЕНИЕ ТРАНСВЕКЦИЙ ДЛЯ АВТОМОРФИЗМОВ

В 1987 году Алексей Степанов [13] предложил метод разложения унипотентов для полной линейной группы $\mathrm{GL}\,(n, R)$, первый автор сразу перенес его на другие расщепимые классические группы [2]. Впоследствии они же совместно с Евгением Плоткиным перенесли его на другие группы Шевалле [5, 23].

В простейшей форме для группы $\mathrm{GL}\,(n, R)$, $n \geqslant 3$, над коммутативным кольцом R этот метод дает *явные полиномиальные формулы*, выражающие сопряженные с элементарными трансвекциями $gt_{ij}(\xi)g^{-1}$, $g \in \mathrm{GL}\,(n, R)$, как произведения трансвекций, лежащих в собственных параболических подгруппах.

Сформулируем простейшее качественное следствие этих формул, тему работы [22].

Тема. *Пусть R – коммутативное кольцо, $g \in \mathrm{GL}\,(n, R)$, $n \geqslant 3$. Тогда элементарная группа $E(n, R)$ порождается трансвекциями $e + uv$ такими, что как v, так и vg^{-1} имеет хотя бы одну нулевую компоненту.*

Несмотря на кажущуюся техничность формулировки, это результат огромной общности и силы, который, в частности, позволяет осуществить редукцию многих структурных результатов к группам меньшего ранга. В качестве недавнего примера такого приложения упомянем [6]. В [22, 23] можно найти детальные изложения этого метода и его вариантов, а в работах [26, 24, 3, 15] обсуждаются дальнейшие обобщения.

Метод разложения унипотентов позволяет получить чрезвычайно простые доказательства структурных теорем. Кроме того, в выборе порождающих трансвекций имеется огромная свобода, которая позволяет накладывать на эти трансвекции и их образы дополнительные условия. Например, Степанов и первый автор [22] использовали

Работа первого автора была поддержана грантом НШ-8464.2006.1 и проектом РФФИ 08-01-00756, 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-00878, 09-01-00333, а также SFB-701 при университете Билефельда .

следующий вариант метода (вариация A) для получения нового доказательства теоремы ван дер Каллена–Туленбаева о центральности K_2.

Вариация A. *Пусть R – коммутативное кольцо, $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, $n \geqslant 4$. Тогда элементарная группа $E(n, R)$ порождается трансвекциями $e + uv$ такими, что v имеет хотя бы одну нулевую компоненту, а vg^{-1} имеет хотя бы две нулевые компоненты.*

Естественно возникает вопрос, можно ли так видоизменить этот метод, чтобы получить столь же простые доказательства других результатов структурной теории, скажем, стандартности описания автоморфизмов?

Размышляя над доказательством стандартности автоморфизмов групп Шевалле над коммутативными кольцами [1, 16, 20], мы пришли к выводу, что в нем естественно использовать именно *унипотентные* элементы. В то же время, подавляющее большинство имеющихся работ основано на использовании *полупростых* элементов. Единственными известными нам исключениями являются замечательные работы Ефима Зельманова [10] и Антона Клячко [20], в которых доказательство основано на экспоненцировании результатов для алгебры Ли, и работа Голубчика [17], в которой комбинируются вычисления с полупростыми и унипотентными элементами.

Обдумывая доказательство Игоря Голубчика [17], мы отметили следующий вариант метода разложения трансвекций [4].

Вариация B. *Пусть R – коммутативное кольцо, $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, $n \geqslant 4$. Тогда элементарная группа $E(n, R)$ порождается трансвекциями $e + uv$ такими, что v, gu и vg^{-1} имеют хотя бы по одной нулевой компоненте.*

Если бы удалось обобщить этот результат с (абстрактных) внутренних автоморфизмов группы $\mathrm{GL}(n, R)$ на *произвольные*, это позволило бы дать прямые доказательства стандартности описания автоморфизмов.

В настоящей работе мы делаем первый шаг в этом направлении и показываем, как разложение унипотентов можно обобщить с трансвекций, сопряженных с элементарными, на образы элементарных трансвекций под действием *стандартных* автоморфизмов.

Доказательства настолько близко следуют доказательствам соответствующих результатов в работе Алексея Степанова и первого автора [22] и в нашей работе [4], что совершенно непонятно, почему

эти очевидные обобщения не были замечены ранее. Единственный новый момент состоит в проверке того, что участвующие в разложении трансвекции действительно являются трансвекциями над *исходным* кольцом R.

Мы уверены, что при $n \geqslant 4$ полученные при этом формулы сохранятся и в общем случае и позволят получить аналог разложения унипотентов для произвольных автоморфизмов. Еще интереснее было бы, конечно, получить обобщения наших результатов на другие группы.

§1. Основные обозначения

Напомним основные используемые в дальнейшем обозначения. Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, R^* – мультипликативная группа кольца R. Для двух натуральных чисел m, n через $M(m, n, R)$ обозначается аддитивная группа $m \times n$-матриц с коэффициентами из R. Через $M(n, R) = M(n, n, R)$ обозначается полное матричное кольцо степени n над R.

Далее, $G = \mathrm{GL}(n, R) = M(n, R)^*$ – обозначает полную линейную группу степени n над R. Как обычно, e обозначает единичную матрицу, а e_{ij} – стандартную матричную единицу. Матричный элемент матрицы g в позиции (i, j) обозначается через g_{ij}, так что $g = (g_{ij})$. Через g_{*j} обозначается j-й столбец матрицы g, иными словами $g_{*j} = (g_{1j}, \dots, g_{nj})^t$. Аналогично, через g_{i*} обозначается i-я строка этой матрицы, т.е. $g_{i*} = (g_{i1}, \dots, g_{in})$. Матрица, обратная к $g \in G$, обозначается через $g^{-1} = (g'_{ij})$, а ее строки и столбцы – через g'_{i*} и g'_{*j}, соответственно. Через g^t обозначается матрица, транспонированная к g. Вообще говоря, $g^t \in \mathrm{GL}(n, R^o)$, где R^o – противоположное к R кольцо. В наших основных результатах кольцо R коммутативно, в этом случае $R^o = R$ так что g^t можно рассматривать как элемент $\mathrm{GL}(n, R)$.

Обозначим через R^n свободный правый R-модуль, состоящий из столбцов высоты n с компонентами из R, а через ${}^nR$ – свободный левый R-модуль, состоящий из строк длины n с компонентами из R. Модуль ${}^nR$ двойственен к R^n, спаривание между ${}^nR$ и R^n задается умножением строки на столбец ${}^nR \times R^n \longrightarrow R$, $(v, u) \mapsto vu \in R$. Стандартные базисы R^n и ${}^nR$ обозначаются через $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$, соответственно. Напомним, что e_i – столбец высоты n, у которого i-я компонента равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Точно так же, f_i – строка длины n, у которой i-я компонента равна 1, а

все остальные компоненты равны 0. Базис $f_1, \dots, f_n$ является двойственным к $e_1, \dots, e_n$ относительно описанного выше спаривания. Группа $G = \mathrm{GL}\,(n, R)$ действует на R^n слева посредством умножением столбца $u \in R^n$ на матрицу $g \in G$, $(g, u) \mapsto gu$. Точно так же, группа G действует на ${}^nR$ справа посредством умножения: $(v, g) \mapsto vg$ для $v \in {}^nR$, $g \in G$.

Напомним, что столбец $u = (u_1, \dots, u_n)^t$ называется *унимодулярным*, если существует такая строка $v \in {}^nR$, что $vu = 1$, т.е., иными словами, если компоненты u порождают единичный *левый* идеал: $Ru_1 + \dots + Ru_n = R$. Аналогично, строка $v = (v_1, \dots, v_n)$ называется *унимодулярной*, если существует такой столбец $u \in R^n$, что $vu = 1$, т.е., иными словами, ее компоненты порождают единичный *правый* идеал $u_1R + \dots + u_nR = R$. Строки и столбцы обратимой матрицы унимодулярны. Над полем верно и обратное, любая унимодулярная строка дополняется до квадратной обратимой матрицы; то же для столбцов. Однако над кольцом это, вообще говоря, неверно. А именно, необходимым условием для дополняемости любой унимодулярной строки над кольцом R до обратимой матрицы является несуществование над R стабильно свободных, но не свободных модулей.

Матрицы вида $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, а $\xi \in R$, называются *элементарными трансвекциями*. По определению, (абсолютная) элементарная группа $E(n, R)$ порождается всеми элементарными трансвекциями,

$$E(n, R) = \langle t_{ij}(\xi), \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \quad \xi \in R \rangle.$$

Для любого столбца $u \in R^n$ и для любой строки $v \in {}^nR$ матрицы

$$t_{*j}(u, \xi) = e + (u - u_j e_j)\xi f_j = \prod t_{ij}(u_i \xi), \qquad i \neq j,$$
$$t_{i*}(v, \xi) = e + e_i \xi (v - v_i f_i) = \prod t_{ij}(\xi v_j), \qquad j \neq i,$$

принадлежат $E(n, R)$.

Через P_i мы обозначаем i-ю стандартную *максимальную параболическую подгруппу* в $G = \mathrm{GL}\,(n, R)$. С геометрической точки зрения подгруппа P_i, $i = 1, \dots, n-1$, это в точности стабилизатор подмодуля V_i в V, порожденного $e_1, \dots, e_i$. В матрицах P_i реализуется как группа верхних блочно-треугольных матриц,

$$P_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \, x \in \mathrm{GL}\,(i, R), \, y \in M\,(i, n-i, R), \, z \in \mathrm{GL}\,(n-i, R) \right\}.$$

§2. Трансвекции

Напомним основные факты, связанные с трансвекциями.

• Рассмотрим, прежде всего, как выглядят матрицы, сопряженные с элементарными трансвекциями. Пусть $g \in \mathrm{GL}\,(n, R)$. Тогда

$$gt_{ij}(\xi)g^{-1} = g(e + \xi e_{ij})g^{-1} = e + g_{*i}\xi g'_{j*} = e + u\xi v,$$

где $u = g_{*i}$ – i-й столбец матрицы g, а $v = g'_{j*}$ – j-я строка матрицы g^{-1}. Так как $i \neq j$, то $vu = 0$.

• В соответствии с этим трансвекция обычно определяется как матрица следующего вида

$$x_{uv}(\xi) = e + u\xi v, \quad u \in R^n, \quad \xi \in R, \quad v \in {}^nR.$$

Традиционно u называется *центром* трансвекции x_{uv}, а v – или, если быть совсем точным, гиперплоскость, ортогональная к v – называется ее *осью*.

Если $R = K$ – поле, то для любого унимодулярного столбца u высоты n и любой унимодулярной строки v длины n таких, что $vu = 0$, найдется такая обратимая матрица g, что u является первым столбцом g, а v – второй строкой g^{-1}, так что $e + u\xi v$ сопряжено с $t_{12}(\xi)$.

Перечислим несколько очевидных свойств таких трансвекций.

• Если не требовать, чтобы столбец и строка были унимодулярны, вводить скалярный параметр $\xi \in R$ не обязательно. Можно положить $x_{uv} = x_{uv}(1)$, при этом

$$x_{uv}(\xi) = x_{\xi u,v} = x_{u,\xi v}.$$

• Очевидно, что элементарные трансвекции $t_{ij}(\xi)$ – и, более общо, матрицы вида $t_{*j}(u)$ и $t_{i*}(v)$ – являются трансвекциями в этом понимании. Например, если $u_r = 0$, то $t_{*j}(u) = x_{u,f_r}$, а если $v_r = 0$, то $t_{i*}(v) = x_{e_r,v}$, в частности, $t_{ij}(\xi) = x_{e_i,\xi f_j}$.

• Класс трансвекций замкнут относительно сопряжения: для любой трансвекции x_{uv} и любого $g \in G$ имеет место равенство

$$gx_{uv}g^{-1} = x_{gu,vg^{-1}}.$$

• **Формула сложения**, утверждающая аддитивность трансвекции по обоим аргументам, в случае когда все множители определены. Например, аддитивность по второму аргументу означает, что

$$x_{u,v+w} = x_{uv}x_{uw},$$

для любых $u \in R^n$, $v, w \in {}^nR$ таких, что $vu = wu = 0$.

• **Формула коммутирования**

$$[x_{uv}, x_{xy}] = x_{uy}(vx),$$

где $u, x \in R^n$, $v, y \in {}^nR$, причем $vu = yx = yu = 0$.

• Из леммы Уайтхеда–Васерштейна следует, что если у u или v есть хотя бы одна нулевая компонента, то трансвекция $e+uv$ принадлежит элементарной группе $E(n, R)$.

§3. Нормализатор элементарной группы

Сейчас мы в очередной раз переосмыслим понятие трансвекции.

Для этого напомним, прежде всего, как вычисляется нормализатор элементарной группы $E(n, R)$ в полной линейной группе $\mathrm{GL}\,(n, S)$ над расширением S кольца R. Следующее утверждение хорошо известно, см., например, [21, лемма 2.2], где аналогичное утверждение доказано для всех групп Шевалле ранга $\geqslant 2$.

Лемма 1. *Пусть $R \leqslant S$ – расширение коммутативных колец, $g \in \mathrm{GL}\,(n, S)$, $n \geqslant 3$. Тогда следующие условия эквивалентны*

• $gE(n, R)g^{-1} \leqslant E(n, R)$;

• $gE(n, R)g^{-1} \leqslant \mathrm{GL}\,(n, R)$;

• $g\,\mathrm{GL}\,(n, R)g^{-1} \leqslant \mathrm{GL}\,(n, R)$;

• $g_{ij}g'_{hk} \in R$ *для всех* $i, j, h, k = 1, \dots, n$;

• $g_{ij}g'_{hk} \in R$ *для всех* $i, j, h, k = 1, \dots, n$ *таких, что* $j \neq h$.

Более того, эквивалентность всех фигурирующих здесь условий, кроме первого, очевидна – это просто различные переформулировки абсолютной неприводимости $E(n, R)$.

Лемма 2. *Линейная оболочка $E(n, R)$ совпадает с $M(n, R)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что она содержит все матричные единицы e_{ij}. При $i \neq j$ это очевидно, $e_{ij} = t_{ij}(1) - e$. В свою очередь,

$$e_{ii} = t_{ij}(1)t_{ji}(1) - t_{ij}(1) - t_{ji}(1) + e.$$

Таким образом, все условия, кроме, быть может, первого, являются просто переформулировками того факта, что

$$gM(n, R)g^{-1} \leqslant M(n, R).$$

Столь же очевидно, что первое условие *влечет* все остальные. То, что оно на самом деле *эквивалентно* остальным, уже совсем не так очевидно. В случае $g \in \mathrm{GL}\,(n, R)$ это в точности теорема нормальности Суслина. В общем случае это вытекает из следующей доказанной – но не сформулированной! – Баком [14] характеризации элементарной группы $E(n, R)$ над коммутативным кольцом.

Лемма 3. *Пусть R коммутативно, $n \geqslant 3$. Тогда $E(n, R)$ является наибольшей совершенной подгруппой в* $\mathrm{GL}\,(n, R)$

Иными словами, $E(n, R)$ совершенна и каждая совершенная подгруппа $H \leqslant \mathrm{GL}\,(n, R)$ содержится в $E(n, R)$. Подробнее по этому поводу см. [18, 21, 7]. Отсюда, в частности, вытекает, что $E(n, R)$ является *вполне* характеристической подгруппой в $\mathrm{GL}\,(n, R)$. Поэтому при эндоморфизме $\mathrm{GL}\,(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}\,(n, R)$, $x \mapsto gxg^{-1}$, она переходит в себя.

Зафиксируем теперь $g \in \mathrm{GL}\,(n, S)$, нормализующий $E(n, R)$, и рассмотрим сопряженные с элементарными трансвекциями $t_{ij}(\xi)$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\xi \in R$, при помощи g. Как и в предыдущем параграфе,

$$gt_{ij}(\xi)g^{-1} = e + g_{*i}\xi g'_{j*} = e + u\xi v,$$

где $u = g_{*i}$ – i-й столбец матрицы g, а $v = g'_{j*}$ – j-я строка обратной матрицы g^{-1}. Однако теперь $u \in S^n$ и $v \in {}^nS$.

Более того, для любых $u \in R^n$ и $v \in {}^nR$ имеет место равенство

$$gx_{uv}g^{-1} = x_{gu, vg^{-1}},$$

но теперь $gu \in S^n$ и $vg^{-1} \in {}^nS$. Включения же $gu \in R^n$ и $vg^{-1} \in {}^nR$ вообще говоря не имеют места.

Это обстоятельство чрезвычайно важно при доказателдьстве стандартности автоморфизмов $\mathrm{GL}\,(n, R)$. В каждом из таких доказательств в какой-то момент проверяется, что образы трансвекций являются трансвекциями. Но в общем случае компоненты оси и центра этих трансвекций совершенно не обязаны лежать в исходном кольце.

§4. Стандартные автоморфизмы

Напомним теперь, как выглядит *стандартный* ответ на задачу описания автоморфизмов $\mathrm{GL}\,(n, R)$. Для этого перечислим четыре очевидных типа автоморфизмов $\mathrm{GL}\,(n, R)$.

• **Кольцевые автоморфизмы**. Сопоставление $R \rightsquigarrow \mathrm{GL}\,(n,R)$ является *функтором* из категории коммутативных колец в категорию групп. В частности, любой кольцевой автоморфизм $\rho \in \mathrm{Aut}\,(R)$ порождает групповой автоморфизм $\rho \in \mathrm{GL}\,(n,R)$, переводящий $E(n,R)$ в себя.

• **Внутренние автоморфизмы**. Пусть S – некоторое кольцо, содержащее R. Согласно предыдущему пункту $\mathrm{GL}\,(n,R) \leqslant \mathrm{GL}\,(n,S)$. Пусть $g \in \mathrm{GL}\,(n,S)$ нормализует $\mathrm{GL}\,(n,R)$. Тогда отображение $\iota_g : x \mapsto gxg^{-1}$ называется *внутренним автоморфизмом* группы $\mathrm{GL}\,(n,R)$, представленным (или индуцированным) элементом g. Конечно, такой автоморфизм ι_g, вообще говоря, совсем не обязан быть внутренним автоморфизмом *абстрактной* группы $\mathrm{GL}\,(n,R)$. Однако, работая с группами точек алгебраических групп над кольцами – да и над незамкнутыми полями! – как правило, необходимо стоять на *алгебраической*, а не на абстрактной точке зрения.

• **Графовые автоморфизмы**. Напомним, что $x^{-t} = (x^t)^{-1} \in \mathrm{GL}\,(n,R)$ называется матрицей, *контраградиентной* к $x \in \mathrm{GL}\,(n,R)$. Для коммутативного кольца контраградиент $\mathrm{GL}\,(n,R) \to \mathrm{GL}\,(n,R)$, $x \mapsto x^{-t}$, является автоморфизмом $\mathrm{GL}\,(n,R)$. Более общо, если $R = R_1 \oplus R_2$, отображение $(x_1,x_2) \mapsto (x_1,x_2^{-t})$ определяет автоморфизм $\mathrm{GL}\,(n,R)$, тождественный на $\mathrm{GL}\,(n,R_1)$ и контраградиентный на $\mathrm{GL}\,(n,R_2)$. Автоморфизмы такого типа называются графовыми.

• **Центральные автоморфизмы**. Наконец, пусть $C(n,R) \cong R^*$ – центр группы $\mathrm{GL}\,(n,R)$, а $\chi : \mathrm{GL}\,(n,\Lambda) \to R^*$ – линейный характер $\mathrm{GL}\,(n,R)$. Тогда отображение $\widehat{\chi} : G \to G$, $\widehat{\chi} : x \mapsto \chi(x)x$ является автоморфизмом $\mathrm{GL}\,(n,R)$, называемым центральным автоморфизмом.

Так как группа $E(n,R)$ совершенна, а группа R^* абелева, никаких нетривиальных центральных автоморфизмов у группы $E(n,R)$ нет.

Стандартные автоморфизмы группы $\mathrm{GL}\,(n,R)$ – это композиции перечисленных типов автоморфизмов. В условиях стандартного описания все автоморфизмы группы $\mathrm{GL}\,(n,R)$ стандартны. Это так, например, для коммутативных колец. При условии $2 \in R^*$ следующий результат впервые доказан в полной общности в работе Уильяма Уотерхауза [27], а в случае $n \geqslant 4$ – в работе Василия Петечука [11]. Мы не обсуждаем здесь некоммутативные обобщения этого результата, в частности, замечательные работы Игоря Голубчика, Александра Михалева и Ефима Зельманова [8–10], работы о гомоморфизмах ли-

нейных групп [12] и т.д.

Лемма 4. *Пусть кольцо R коммутативно, а $n \geqslant 3$, причем в случае $n = 3$ предположим дополнительно, что $2 \in R^*$. Тогда каждый автоморфизм $\mathrm{GL}\,(n, R)$ стандартен.*

Что происходит с трансвекциями при стандартных автоморфизмах?

• Ясно, что образ трансвекции $e + uv$ под действием кольцевого автоморфизма $\rho \in \mathrm{Aut}\,(R)$ равен $e + \rho(u)\rho(v)$, где, как обычно, через $\rho(u)$ и $\rho(v)$ обозначены образы столбца u и строки v в результате покомпонентного применения автоморфизма ρ.

• Ясно, что образ трансвекции $e + uv$ под действием внутреннего автоморфизма $\phi = \iota_g$, $g \in \mathrm{GL}\,(n, S)$ равен $e + (gu)(ug^{-1})$. Так как $gu \in S^n$, $vg^{-1} \in {}^nS$, то этот образ снова является трансвекцией, но, вообще говоря, трансвекцией над кольцом S, а не над самим исходным кольцом R.

Например, в случае элементарной трансвекции $t_{rs}(1)$, $r \neq s$, этот образ равен $e + g_{*r}g'_{s*}$. Рассматривая наряду с сопряжением при помощи g также сопряжение при помощи g^{-1}, мы получим

$$g_{ir}g'_{sj} = \phi(t_{rs}(1)) - \delta_{ij}, \quad g'_{ir}g_{sj} = \phi^{-1}(t_{rs}(1)) - \delta_{ij}.$$

• Наконец, образ трансвекции $e + uv$ под действием контраградиента равен $e - v^t u^t$. В свою очередь, в случае, когда кольцо разложено в прямую сумму $R = R_1 \oplus R_2$, трансвекции интерпретируются как пары трансвекций над слагаемыми, $(e + u_1v_1, e + u_2v_2)$.

§5. Курсом на P_1

Следующий результат является обобщением темы работы [22] с *абстрактных* внутренних автоморфизмов на произвольные *стандартные* автоморфизмы.

Теорема 1. *Пусть R – коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$, а ϕ – стандартный автоморфизм группы $\mathrm{GL}\,(n, R)$. Тогда элементарная группа $E(n, R)$ порождается трансвекциями $e + uv$ такими, что как $e + uv$, так и $\phi(e + uv)$ лежат в параболической подгруппе, сопряженной с P_1 при помощи матрицы перестановки.*

В действительности, доказательство аналогичного результата в [22] состоит в явной полиномиальной формуле, выражающей корневой элемент $gt_{ij}(\xi)g^{-1}$ как произведение n сомножителей, каждый из которых лежит в (максимальной) параболической подгруппе типа P_1.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать этот факт для неразложимых колец. С другой стороны, так как $E(n,R)^t = E(n,R)$, то графовый автоморфизм можно считать тривиальным. Таким образом, пусть $\phi = \iota_g \circ \rho$ для некоторого $g \in \mathrm{GL}\,(n,S)$, нормализующего $E(n,R)$, и для некоторого $\rho \in \mathrm{Aut}\,(R)$.

Возьмем попарно различные индексы $i,j,h = 1,\dots,n$ – ровно в этом месте используется предположение $n \geqslant 3$. Выберем произвольный индекс $k = 1,\dots,n$, произвольный элемент $\xi \in R$ и положим

$$v = \rho^{-1}(g_{kh}\rho(\xi)g'_{hk})f_j - \rho^{-1}(g_{kh}\rho(\xi)g'_{jk})f_h.$$

Обратите внимание, что матричные элементы матрицы g входят сюда только вместе с матричными элементами обратной матрицы g^{-1}. Таким образом, из леммы 1 следует, что $g_{kh}\rho(\xi)g'_{hk}, g_{kh}\rho(\xi)g'_{jk} \in R$.

Ясно, что $v_l = 0$ для всех $l \neq j,h$, так что, в частности, $v_i = 0$. Заметим теперь, что из коммутативности кольца R вытекает, что

$$(\rho(v)g^{-1})_k = g_{kh}\rho(\xi)g'_{hk}g'_{jk} - g_{kh}\rho(\xi)g'_{jk}g'_{hk} = 0.$$

Остается лишь проверить, что трансвекции $y_i(v) = e + e_i v$ такого вида действительно порождают элементарную группу $E(n,R)$. Для этого достаточно выразить любую элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi)$ как произведение $y_i(v)$ для перечисленных выше столбцов v. Заметим, что

$$y_i(v) = t_{ij}(\rho^{-1}(g_{kh}\rho(\xi)g'_{hk}))t_{ih}(-\rho^{-1}(g_{kh}\rho(\xi)g'_{jk})),$$

а из коммутативности кольца R следует, что

$$t_{ij}(\xi) = \prod t_{ij}(\rho^{-1}(g_{kh}\rho(\xi)g'_{hk}))t_{ih}(-\rho^{-1}(g_{kh}\rho(\xi)g'_{jk})), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Это и завершает доказательство.

§6. Курсом на $P_1 \cap wP_1w^{-1}$

Однако, для доказательства более трудных структурных результатов часто недостаточно уметь попадать в максимальную параболическую подгруппу. Типичным примером является доказательство центральности K_2, когда для проверки корректности модели ван дер Каллена [19] необходимо представлять корневые элементы как произведения элементов, лежащих в *субмаксимальных* параболических подгруппах (или других попарных пересечениях максимальных параболических подгрупп). Обсуждение этого вопроса можно найти в [22, 25, 7]. Вот простейший результат такого типа для стандартных автоморфизмов, аналог сформулированной выше вариации A.

Теорема 2. *Пусть R – коммутативное кольцо, $n \geqslant 4$, а $\phi \in \mathrm{Aut}\,(\mathrm{GL}\,(n,R))$. Тогда элементарная группа $E(n,R)$ порождается трансвекциями $e+uv$ такими, что $e+uv$ лежит в параболической подгруппе, сопряженной с P_1 при помощи матрицы перестановки, а $\phi(e+uv)$ лежит в пересечении двух различных подгрупп такого типа.*

Снова доказательство аналогичного результата в [22] состоит в явной полиномиальной формуле, выражающей корневой элемент $gt_{ij}(\xi)g^{-1}$ как произведение $n(n-1)/2$ сомножителей, каждый из которых лежит в пересечении двух параболических подгрупп типа P_1.

Введем следующие обозначения, которые будут использованы в доказательстве. Для матрицы $g \in \mathrm{GL}\,(n,S)$ и четырех индексов $r \neq s$, $p \neq q$, рассмотрим соответствующий минор $\mathrm{D}^{pq}_{rs}(g)$ порядка два матрицы g, стоящий на пересечении r-й и s-й строк с p-м и q-м столбцами. Иными словами,

$$\mathrm{D}^{pq}_{rs}(g) = \det\begin{pmatrix} g_{rp} & g_{rq} \\ g_{sp} & g_{sq} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, можно считать, что кольцо R неразложимо, а графовый автоморфизм тождественен. Пусть $\phi = \iota_g \circ \rho$ для некоторого $g \in \mathrm{GL}\,(n,S)$, нормализующего $E(n,R)$, и для некоторого $\rho \in \mathrm{Aut}\,(R)$.

Возьмем попарно различные индексы $i,j,h,k = 1,\dots,n$ – именно здесь использовано предположение $n \geqslant 4$. Выберем два произвольных различных индекса $p,q = 1,\dots,n$, произвольный элемент $\xi \in R$ и положим

$$v = \rho^{-1}\Big(\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\Big(\mathrm{D}^{pq}_{hk}(g^{-1})f_j - \mathrm{D}^{pq}_{jk}(g^{-1})f_h + \mathrm{D}^{pq}_{jh}(g^{-1})f_k\Big)\Big).$$

Обратите внимание, что миноры второго порядка матрицы g^{-1} входят сюда только вместе с минором второго порядка матрицы g. Таким образом, из леммы 1 следует, что

$$\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{hk}(g^{-1}),\ \mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{jk}(g^{-1}),\ \mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{jh}(g^{-1}) \in R.$$

Ясно, что $v_l = 0$ для всех $l \neq j,h,k$ и, в частности, $v_i = 0$. Чтобы проверить наличие нулей в образе этой строки, рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} g'_{jr} & g'_{jp} & g'_{jq} \\ g'_{kr} & g'_{kp} & g'_{kq} \\ g'_{lr} & g'_{lp} & g'_{lq} \end{pmatrix},$$

где $r = p$ или $r = q$. Определитель этой матрицы равен 0 и, раскладывая его по первому столбцу, мы видим, что p-я и q-я компоненты столбца $(\rho(v)g^{-1})$ равны 0.

Остается лишь проверить, что трансвекции $y_i(v) = e + e_i v$, такого вида действительно порождают элементарную группу $E(n, R)$. Для этого достаточно выразить любую элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi)$ как произведение $y_i(v)$ для перечисленных выше столбцов v. Заметим, что

$$\begin{aligned} y_i(v) = t_{ij}&\Big(\rho^{-1}\Big(\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{hk}(g^{-1})\Big)\Big)\\ &\times t_{ih}\Big(-\rho^{-1}\Big(\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{jk}(g^{-1})\Big)\Big)\\ &\times t_{ik}\Big(\rho^{-1}\Big(\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{jh}(g^{-1})\Big)\Big). \end{aligned}$$

и теперь по теореме Бине–Коши имеем

$$\sum \mathrm{D}^{pq}_{rs}(g^{-1})\,\mathrm{D}^{rs}_{pq}(g) = 1, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant n,$$

в то время как

$$\sum \mathrm{D}^{pq}_{lm}(g^{-1})\,\mathrm{D}^{rs}_{pq}(g) = 0, \quad 1 \leqslant p < q \leqslant n,$$

при $\{l, m\} \neq \{r, s\}$. Теперь из коммутативности кольца R следует, что

$$\begin{aligned} t_{ij}(\xi) = \prod t_{ij}&\Big(\rho^{-1}\Big(\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{hk}(g^{-1})\Big)\Big)\\ &\times t_{ih}\Big(-\rho^{-1}\Big(\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{jk}(g^{-1})\Big)\Big)\\ &\times t_{ik}\Big(\rho^{-1}\Big(\mathrm{D}^{hk}_{pq}(g)\rho(\xi)\,\mathrm{D}^{pq}_{jh}(g^{-1})\Big)\Big), \end{aligned}$$

где произведение берется по всем $1 \leqslant p < q \leqslant n$. Это завершает доказательство.

§7. Курсом на $P_1 \cap P_{n-1}$

Сейчас мы докажем еще один результат в таком же духе, обобщение вариации B из нашей работы [4]. Заметим, что именно оценка $n \geqslant 4$ в этом результате объясняет, почему метод Голубчика [17] работает для групп $\mathrm{GL}_{n\geqslant 4}$ и не работает для группы GL_3.

Теорема 3. *Пусть R – коммутативное кольцо, $n \geqslant 4$, а $\phi \in \mathrm{Aut}\,(\mathrm{GL}\,(n,R))$. Тогда элементарная группа $E(n,R)$ порождается трансвекциями $e+uv$ такими, что $e+uv$ лежит в параболической подгруппе, сопряженной с P_1 при помощи матрицы перестановки, а $\phi(e+uv)$ лежит в пересечении подгрупп типа P_1 и P_{n-1}.*

Доказательство. Как всегда, считаем что кольцо R неразложимо, а графовый автоморфизм тождественен. Пусть, как обычно, $\phi = \iota_g \circ \rho$ для некоторого $g \in \mathrm{GL}\,(n,S)$, нормализующего $E(n,R)$, и для некоторого $\rho \in \mathrm{Aut}\,(R)$.

Возьмем четыре произвольных попарно различных индекса i,j,h,k – именно здесь используется предположение $n \geqslant 4$. Зафиксируем, кроме того, произвольные индексы r,s и произвольный элемент $\xi \in R$ и положим

$$u = u(r) = \rho^{-1}\Big(g_{rj}g'_{jr}e_i - g_{ri}g'_{jr}e_j\Big),$$

$$v = v(s) = \rho^{-1}\Big(\rho(\xi)g_{sk}g'_{ks}f_h - \xi g_{sk}g'_{hs}e_k\Big).$$

Обратите внимание, что матричные элементы матрицы g входят сюда только вместе с матричными элементами обратной матрицы g^{-1}. Таким образом, из леммы 1 следует, что

$$g_{rj}g'_{jr}, \quad g_{ri}g'_{jr}, \quad \rho(\xi)g_{sk}g'_{ks}, \quad \rho(\xi)g_{sk}g'_{hs} \in R.$$

Ясно, что $v_l = 0$ для всех $l \neq h,k$, в частности, $v_i = v_j = 0$. Так как, в свою очередь, $u_m = 0$ для всех $m \neq i,j$, то $vu = 0$ по выбору i,j,h,k. Таким образом, мы получаем корректно определенную трансвекцию

$$x(r,s) = e + uv = e + u(r)v(s).$$

Заметим теперь, что из коммутативности R вытекает, что

$$\big(g\rho(u)\big)_r = g_{ri}g_{rj}g'_{jr} - g_{rj}g_{ri}g'_{jr} = 0,$$
$$\big(\rho(v)g^{-1}\big)_s = \rho(\xi)g_{sk}g'_{ks}g'_{hs} - \rho(\xi)g_{sk}g'_{hs}g'_{ks} = 0.$$

Таким образом, условия на образ трансвекции $x(r,s)$ также выполнены. Воспроизведем для наглядности получающуюся трансвекцию в случае $n=4$, $i=1$, $j=2$, $h=3$, $k=4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho^{-1}\big(g_{r2}g'_{2r}\rho(\xi)g_{s4}g'_{4s}\big) & \rho^{-1}\big(-g_{r2}g'_{2r}\rho(\xi)g_{s4}g'_{3s}\big) \\ 0 & 1 & \rho^{-1}\big(-g_{r1}g'_{2r}\rho(\xi)g_{s4}g'_{4s}\big) & \rho^{-1}\big(g_{r1}g'_{2r}\rho(\xi)g_{s4}g'_{3s}\big) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нам осталось лишь показать, что получающиеся трансвекции порождают $E(n,R)$. Для этого заметим, что

$$x(r,s) = t_{ih}\Big(\rho^{-1}\Big(g_{rj}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{ks}\Big)\Big)t_{ik}\Big(\rho^{-1}\Big(-g_{rj}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{hs}\Big)\Big)$$
$$\times\, t_{jh}\Big(\rho^{-1}\Big(-g_{ri}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{ks}\Big)\Big)t_{jk}\Big(\rho^{-1}\Big(g_{ri}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{hs}\Big)\Big).$$

Так как трансвекции $t_{ih}(*)$, $t_{ik}(*)$, $t_{jh}(*)$, $t_{jk}(*)$ попарно коммутируют, то

$$\prod_{r=1}^{n}\prod_{s=1}^{n}x(r,s) = t_{ih}\Big(\rho^{-1}\Big(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}g_{rj}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{ks}\Big)\Big)$$
$$\times\, t_{ik}\Big(\rho^{-1}\Big(-\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}g_{rj}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{hs}\Big)\Big)$$
$$\times\, t_{jh}\Big(\rho^{-1}\Big(-\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}g_{ri}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{ks}\Big)\Big)$$
$$\times\, t_{jk}\Big(\rho^{-1}\Big(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}g_{ri}g'_{jr}\rho(\xi)g_{sk}g'_{hs}\Big)\Big).$$

Снова воспользовавшись коммутативностью R, мы видим, что это произведение равно $t_{ih}(\xi)$. Так как i,h и ξ в этом вычислении совершенно произвольны, то построенные нами трансвекции $x(r,s)$ порождают элементарную группу $E(n,R)$.

Построенное в доказательстве теоремы разложение трансвекции $t_{ih}(\xi) = \prod x(r,s)$ дает разложение произвольного корневого элемента $gt_{ih}(\xi)g^{-1}$ в произведение n^2 множителей $gx(r,s)g^{-1}$, $1 \leqslant r,s \leqslant n$, каждый из которых либо лежит в (являющейся нормализатором корневого элемента) параболической подгруппе типа $P_{1,n-1}$ (при $r \neq s$), либо в регулярно вложенной подгруппе $\mathrm{GL}\,(n-1,R)$ (при $r = s$).

Приведенное выше доказательство теоремы 3 опирается на теорему Петечука [11] о стандартном описании автоморфизмов групп $\mathrm{GL}\,(n,R)$, $n \geqslant 4$. Обратно, независимое элементарное доказательство этой теоремы позволило бы дать новое доказательство стандартности автоморфизмов, выраженное исключительно в терминах унипотентных элементов.

В заключение авторы благодарят Алексея Степанова и Рузби Хазрата за полезные обсуждения. Первый автор благодарит Герберта

Абельса, Тони Бака и Ульфа Ремана за неизменную дружескую поддержку и, в частности, за приглашение в Билефельд летом 2008 года.

Литература

1. Э. Абе, *Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами.* — Алгебра и анализ **5**, No. 2 (1993), 74–90.
2. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. дисс., Ленингр. Гос. Ун-т (1987), 1–334.
3. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
4. Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич, *Еще одна вариация на тему разложения трансвекций.* — Вестн. СПбГУ, сер. 1 **3** (2008).
5. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР **40**, No. 1 (1990), 145–147.
6. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Стандартная коммутационная формула.* — Вестн. СПбГУ, сер. 1 **1** (2008), 9–14.
7. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Линейные группы над общими кольцами.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. (в печати).
8. И. З. Голубчик, *Изоморфизмы проективных групп над ассоциативными кольцами.* — Фундам. прикл. Мат. **1** (1995) No. 1, 311–314.
9. И. З. Голубчик, А. В. Михалев, *Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом.* — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1 **3** (1983), 61–72.
10. Е. И. Зельманов, *Изоморфизмы полных линейных групп над ассоциативными кольцами.* — Сиб. Мат. Журн. **26** (1985), No. 4, 49–67.
11. В. М. Петечук, *Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами.* — Мат. Сб. **45** (1983), 527–542.
12. В. М. Петечук, *Гомоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами.* — Мат. заметки **46** (1989), No. 5, 50–61.
13. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами.* Канд. дисс. ЛГУ (1987), 1–112.
14. A. Bak, *Nonabelian* K*-theory: The nilpotent class of* K_1 *and general stability.* — K-Theory **4** (1991), 363–397.
15. A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* II. *Normal subgroups.* — Algebra Colloq. (2008).
16. E. I. Bunina, *Automorphisms of adjoint Chevalley groups of types* A_l, D_l, E_l *over local rings.* (2007), 1–20; `arXiv:math/0702046`.
17. I. Z. Golubchik, *Isomorphisms of the general linear group* $\mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 4$, *over an associative ring.* — Contemp. Math. **131** (1992), No. 1, 123–136.
18. R. Hazrat, N. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
19. W. van der Kallen, *Another presentation for Steinberg groups.* — Indag. Math. **39** (1977), No. 4, 304–312.
20. A. Klyachko, *Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras.* (2007), 1–8; `arXiv: math 0708.2256v2`.

21. A. Stepanov, *Subring subgroups in symplectic and odd orthogonal group.* (2008), 1–10.
22. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
23. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — In Proc. Conf. Nonassociative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., London et al. (1991), pp. 219–335.
24. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **204**, No. 1 (2000), 201–250.
25. N. Vavilov, *An* A_3*-proof of structure theorems for Chevalley groups of types* E_6 *and* E_7. — Int. J. Algebra Comput. **17** (2007), No. 5–6, 1283–1298.
26. N. Vavilov, E. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Appl. Math. **45** (1996), 73–115.
27. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$. — Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 347–351.

Vavilov N. A., Kazakevich V. G. Decomposition of transvections for automorphisms.

The method of decomposition of unipotents consists in writing elementary matrices as products of factors lying in proper parabolic subgroups, whose images under (abstract) inner automorphisms also fall into proper parabolic subgroups of certain types. For the general linear group, this method was first proposed by Stepanov in 1987 to simplify the proof of Suslin's normality theorem. Soon thereafter Vavilov and Plotkin generalised it to other classical groups and Chevalley groups. Subsequently, many further results of that type have been discovered. In the present paper, we show that a similar decomposition can be constructed for arbitrary standard automorphisms. This result emerged in the context of a simplified proof of the theorems due to Waterhouse, Golubchik, Mikhalev, Zelmanov, and Petechuk regarding the standard description of automorphisms of the general linear group, based exclusively on the use of unipotent elements.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 12 ноября 2008 г.