Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

**М. А. Антипов**

# СТРУКТУРА СТАБИЛЬНОЙ ГРУППЫ ГРОТЕНДИКА СИММЕТРИЧЕСКОЙ SB-АЛГЕБРЫ

В работе [1] вычислен порядок группы Гротендика $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda))$ стабильной категории произвольной симметрической специальной бирядной алгебры $\Lambda$. Данная работа является завершением [1] и посвящена точному вычислению структуры $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda))$.

## 1. Общие сведения

Напомним, что стабильной категорией $\mathrm{stmod}\,(\Lambda)$ кольца $\Lambda$ называется категория, объекты которой суть конечно-порождённые $\Lambda$-модули, и для всяких $X, Y \in \mathrm{stmod}\,(\Lambda)$ имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{stmod}\,(\Lambda)}(X,Y) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)/P(X,Y),$$

где $P(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)$ – подгруппа морфизмов, допускающих представление в виде $f = gh$, где $h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,P)$, $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P,Y)$ и $P$ – некоторый проективный модуль.

Напомним, что группа Гротендика $\mathrm{K}_0(\mathcal{C})$ (скелетно-малой) триангулированной категории $\mathcal{C}$ определяется как факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной символами вида $[X]$, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, по подгруппе, порожденной всеми элементами вида $[X]+[Z]-[Y]$, где

$$X \to Y \to Z \to X[1]$$

– выделенный треугольник (такой выделенный треугольник часто изображаем так: $X \to Y \to Z \to$).

Напомним также следующее

**Предложение 1.1.** *Пусть $\Lambda$ – конечномерная фробениусова алгебра. Тогда*

$$\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda)) = \mathrm{K}_0(\text{mod-}\Lambda)/P(\Lambda),$$

*где $P(\Lambda)$ – подгруппа, порожденная образами элементов вида $[P]$, где $P$ проективен.*

**Доказательство.** См., например, [2].

Поскольку группа $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda))$ – это свободная абелева группа, базисом которой являются образы простых модулей над $\Lambda$, часто используется следующая переформулировка предложения 1.1:

**Предложение 1.2.** *Пусть $\Lambda$ – конечномерная фробениусова алгебра с $n$ простыми модулями,* $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda))$ *– группа Гротендика стабильной категории. Тогда существует точная последовательность*

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^n \to \mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda)) \to 0,$$

*где $f$ – отображение, заданное матрицей Картана алгебры $\Lambda$.*

Напомним теперь определения, относящиеся к классификации симметрических специальных бирядных алгебр (далее, сокращенно, SB-алгебр).

Сопоставим произвольному (мульти)графу $\Gamma$ его *орграф полуребер* $\Gamma^o$ следующим образом: вершины $\Gamma^o$ те же, что и у $\Gamma$, а ребра $\Gamma^o$ получаются заменой каждого ребра $\Gamma$ на пару противоположно направленных стрелок. В частности, каждая петля превратится в две петли.

Графом с вращениями называется (мульти)граф $\Gamma$ с $k$ вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_k$ и вместе с набором циклических перестановок $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$, таких, что каждая перестановка $f_i$ действует на множестве полуребер, выходящих из вершины $v_i$.

**Определение 1.** *Пару $(\Gamma, f)$, где $\Gamma$ – (мульти)граф, а $f : V(\Gamma) \to \mathbb{N}$ – произвольное отображение, будем называть помеченным графом.*

Напомним, (см.,например, [1]), что имеется естественная биекция между множеством классов изоморфности связных помеченных графов с вращениями и множеством классов изоморфности неразложимых симметрических SB-алгебр над полем $K$. При этом соответствии для каждой алгебры $\Lambda$ имеется биекция между множеством классов изоморфности простых $\Lambda$-модулей и множеством рёбер графа $\Gamma(\Lambda)$, соответствующего алгебре $\Lambda$. Граф $\Gamma(\Lambda)$ называется графом Брауэра алгебры $\Lambda$.

Пусть $V(\Gamma) = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ – множество вершин, а $E(\Gamma) = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество ребер графа $\Gamma(\Lambda)$. Сопоставим произвольной вершине $b$ графа $\Gamma(\Lambda)$, помеченной натуральным числом $l_b$, матрицу $A_b = (a_{ij}^{(b)})_{i,j=1}^n$ следующим образом. Для любого ребра $i$ графа $\Gamma(\Lambda)$ через $v_b(i)$ обозначим количество концов ребра $i$, совпадающих с $b$

(т.е. $v_b(i) = 2$, если $i$ – петля с вершиной $b$, $v_b(i) = 1$ если $b$ инцидентна ребру $i$, но $i$ не является петлей, и $v_b(i) = 0$ для неинцидентных $b$ и $i$). Положим $a_{ij}^{(b)} = l_b v_b(i) v_b(j)$.

**Предложение 1.3.** *Пусть $A$ – матрица Картана алгебры $\Lambda$. Тогда, во введенных обозначениях, $A = A_{b_1} + A_{b_2} + \cdots + A_{b_k}$.*

**Доказательство.** См. [1].

**Замечание 1.4.** Из предложения 1.3 следует, что вид матрицы Картана симметрической SB-алгебры зависит лишь от графа Брауэра как помеченного графа (без учета структуры вращений). Поэтому в дальнейшем мы будем говорить просто о матрице Картана помеченного графа. При этом множество строк (и множество столбцов) матрицы находится в естественной биекции с множеством ребер графа. Нетрудно видеть, что если в этой матрице положить все кратности равными 1, получится просто матрица смежности реберного (мульти)графа данного графа.

## 2. Решетка строк матрицы Картана

**Замечание 2.1.** Пусть $\Gamma$ – граф Брауэра (непомеченный), вершины которого пронумерованы различными целыми числами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ (не обязательно последовательными). Мы можем сопоставить ему "матрицу Картана" $A \in M_n(\mathbb{Q}[l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_k}])$. Здесь $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_k}$ – независимые переменные. Ясно, что при переходе от непомеченного графа к помеченному происходит просто замена независимых переменных на целочисленные значения соответствующих кратностей $l_{i_r}$. Далее всюду, где речь идет о помеченных графах, символы $l_{i_r}$ будут обозначать целые числа, а там, где речь идет о непомеченных графах – независимые переменные. В частности, мы всюду считаем, что вершины рассматриваемых графов как-то пронумерованы.

Теперь мы укажем удобное порождающее множество решетки строк матрицы Картана графа $\Gamma$.

Пусть $L_i$ – ненулевая строка матрицы $A_i$ (в обозначениях предыдущего пункта), выбранная следующим образом: если в соответствующей вершине графа $\Gamma$ нет петель, то все ненулевые строки в матрице $A_i$ равны, любую из них мы и обозначим $L_i$; в противном случае найдутся две ненулевые строки, отличающиеся умножением на 2 – обозначим их $L_i$ и $2L_i$.

Итак, каждой строчке $L_i$ однозначно соответствует вершина графа $\Gamma$, а строчке матрицы Картана однозначно соответствует ребро в графе $\Gamma$. Обозначим через $L(A)$ решетку, порожденную строками матрицы $A$. Напомним, что граф называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на два подмножества (доли) так, что любое ребро графа соединяет вершины из разных подмножеств, или, эквивалентно, если любой цикл в графе состоит из четного числа ребер (имеет четную длину).

**Предложение 2.2.** (1) *Пусть в связном графе* $\Gamma$ *есть цикл нечетной длины (т.е. этот граф не является двудольным). Тогда*

$$L(A) = \left\{ \sum n_i L_i | n_i \in \mathbb{Z},\ \sum n_i = 0 \pmod 2 \right\}.$$

(2) *Пусть граф* $\Gamma$ *двудолен и* $V\Gamma = V_1 \cup V_2$ *есть разбиение множества его вершин на доли. Тогда*

$$L(A) = \left\{ \sum n_i L_i | n_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{C_i \in V_1} n_i = \sum_{C_i \in V_2} n_i \right\}.$$

**Доказательство.** 1. Из предложения 1.3 следует, что любая строка матрицы $A$ есть сумма нескольких ненулевых строк матриц $A_i$. Поскольку через каждую вершину проходит ровно два (возможно, совпадающих) $A$-цикла, то в этой сумме ровно два (возможно, равных) слагаемых, т.е. каждая строчка матрицы $A$ имеет вид

$$L_i + L_j,$$

где $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ – номера концов соответствующего ребра в $\Gamma$. Таким образом, все строчки матрицы $A$ (и вся решетка $L(A)$) содержатся в решетке, указанной в формулировке утверждения. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим цикл нечетной длины $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_{2t+1}}$ в $\Gamma$. Строки матрицы, соответствующие ребрам этого цикла, имеют вид

$$m_1 = L_{i_1} + L_{i_2}, m_2 = L_{i_2} + L_{i_3}, \ldots, m_{2t+1} = L_{i_{2t+1}} + L_{i_1},$$

откуда $2L_{i_1} = \sum m_i - \sum m_{2i} \in L(A)$. Далее если $C_i$, $C_j$ – концы некоторого ребра в $\Gamma$ и $2L_i \in L(A)$, то и $2L_j = 2(L_i + L_j) - 2L_i \in L(A)$,

$L_i - L_j = (L_i + L_j) - 2L_j \in L(A)$. Отсюда в силу связности $\Gamma$ мы получаем, что $2L_i \in L(A)$, $L_i - L_j \in L(A)$ при любых $i, j \leq k$. Очевидно, что указанные элементы порождают требуемую решетку.

2. По определению двудольности, если $C_i$, $C_j$ – концы одного ребра в $\Gamma$, то они лежат в разных долях, поэтому все строчки матрицы $A$ (вида $L_i + L_j$) лежат в указанной решетке. Чтобы доказать обратное включение, заметим, что все элементы вида $L_i + L_j$, где $C_i$, $C_j$ – из разных долей, и все элементы вида $L_i - L_j$, где $C_i$, $C_j$ – из одной доли, принадлежат $L(A)$ – это легко доказывается индукцией по расстоянию между $C_i$ и $C_j$ в $\Gamma$. Ясно, что множество всех таких элементов порождает указанную в формулировке утверждения решетку. Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим произвольные вершины $C_i$, $C_j$ из разных долей и пусть $C_i = C_{i_0}, C_{i_1}, \ldots, C_{i_s} = C_j$ суть последовательные вершины на некотором пути, соединяющем $C_i$ и $C_j$. Поскольку при любом $t$, $0 \leq t \leq s-1$ вершины $C_{i_t}$ и $C_{i_{t+1}}$ лежат в разных долях, то $s$ – нечетно и

$$L_i + L_j = (L_{i_0} + L_{i_1}) - (L_{i_1} + L_{i_2}) + (L_{i_2} + L_{i_3}) - \cdots + (L_{i_{s-1}} + L_{i_s}) \in L(A).$$

Точно так же получаем, что $L_i - L_j \in L(A)$, где $C_i$, $C_j$ – произвольные вершины из одной доли. Ясно, что множество всех элементов этих двух видов порождает указанную в формулировке утверждения решетку.

Сопоставим графу $\Gamma$ его подграф $\Gamma_1$ следующим образом. Если $\Gamma$ двудолен, выберем в качестве $\Gamma_1$ произвольное остовное дерево графа $\Gamma$ (т.е. дерево $T$ такое, что $V(T) = V(\Gamma)$ и $E(T) \subset E(\Gamma)$). Если $\Gamma$ не является двудольным, выделим из него произвольное остовное дерево и добавим к нему одно ребро (графа $\Gamma$) так, чтобы образовался цикл нечетной длины. Полученный граф (с $n$ вершинами и $n$ ребрами) обозначим за $\Gamma_1$.

**Предложение 2.3.** *Строчки, соответствующие ребрам $\Gamma_1$, порождают $L(A)$.*

**Доказательство.** Из выражений $L_i + L_j$, где $(C_i, C_j)$ пробегает множество ребер остовного дерева, можно (как уже отмечалось в предложении 2.2) получить все элементы вида $L_i + L_j$, где $C_i$, $C_j$ – из разных долей дерева, и все элементы вида $L_i - L_j$, где $C_i$, $C_j$ – из одной доли дерева. В случае, когда $\Gamma$ двудолен, мы уже получили, таким образом, множество образующих для $L(A)$ (доли двудольного

графа и его остовного дерева это одно и то же). Если $\Gamma$ не двудолен, то, поскольку в $\Gamma_1$ есть нечетный цикл, мы и в этом случае можем воспроизвести рассуждения предложения 1.3 (получив то же самое множество образующих).

Обозначим за $A_0'$ матрицу, строки которой суть строки $A$, соответствующие ребрам $\Gamma_1$, и рассмотрим теперь (квадратную) матрицу $A_0$, состоящую из столбцов матрицы $A_0'$, соответствующих ребрам $\Gamma_1$. Обозначим через $L^{\mathrm{col}}(A_0')$ и $L^{\mathrm{col}}(A_0)$ соответствующие пространства столбцов.

**Лемма 2.4.** $L^{\mathrm{col}}(A_0') = L^{\mathrm{col}}(A_0)$.

**Доказательство.** Столбцы матрицы $A_0$ суть подстолбцы матрицы $A$. Утверждение следует теперь из предложения 2.3 и симметричности матрицы Картана.

**Замечание 2.5.** Пусть $B$ – произвольная симметричная подматрица $A$. Рассмотрим подграф $H$, порожденный соответствующими ребрами $\Gamma$ (т.е., его ребра соответствуют столбцам $B$, а вершины суть вершины $\Gamma$, инцидентные хотя бы одному из этих ребер; нумерация ребер сохраняется.) Тогда $B$ – матрица Картана для $H$. Пара $(A_0, \Gamma_1)$ есть частный случай этой ситуации.

**Следствие 2.6.** *Всякий минор матрицы $A$ есть целочисленная линейная комбинация миноров того же порядка ее подматрицы $A_0$.*

Коядро матрицы Картана $A$ помеченного графа (т.е, коядро отображения $f$ из предложения 1.2) можно вычислять через инвариантные множители $A$. Согласно следствию 2.6, мы можем свести необходимые нам вычисления к случаю, когда граф представляет собой либо дерево, либо связный граф с одним циклом нечетной длины. Этот случай мы и изучаем дальше.

## 3. Ранг и определитель матрицы Картана

Пусть $A$ – матрица Картана графа Брауэра. Из предложения 1.3 непосредственно усматривается, что всякий минор $m$-го порядка матрицы $A$ равен однородному многочлену степени $m$ от кратностей вершин графа.

При этом степень такого многочлена по любой переменной не превосходит 1.

**Предложение 3.1.** *Всякий минор $l$-го порядка матрицы $A$ представляется в виде суммы одночленов вида $c_{i_1 i_2 \dots i_l} l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_l}$, где $i_1, i_2, \dots, i_l$ – попарно различные индексы.*

**Доказательство.** См. [1].

Из предложения 3.1 следует, что все вычисления с минорами матрицы $A$ можно производить в кольце

$$R_k = \mathbb{Z}[l_1, l_2, \dots, l_k]/\langle l_1^2, l_2^2, \dots, l_k^2 \rangle,$$

где $k$ – количество вершин графа $\Gamma$. Так мы и будем поступать. При $p < q$ кольцо $R_p$ будем рассматривать как подкольцо $R_q$.

**Следствие 3.2.** *Идеал $I_r$ кольца $R_k$, порожденный всеми минорами $r$-го порядка матрицы $A$, содержится в идеале, порожденном всевозможными произведениями вида $l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_r}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le k$ – попарно различные индексы.*

В работе [1] вычислен определитель матрицы Картана связного помеченного графа с $k$ вершинами и $n$ ребрами. Отметим, что $k \le n+1$, так как связный граф с $n+1$ вершиной имеет не менее $n$ ребер.

**Предложение 3.3.** (1) *Пусть $n > k$. Тогда $\det(A) = 0$;*

(2) *при $n = k$ имеем $\det(A) = c l_1 l_2 \dots l_k$, где $c$ – постоянная, равная 0 или 4 в зависимости от четности или нечетности длины единственного цикла в графе $\Gamma$ (т.е. наличия или отсутствия двудольности);*

(3) *при $k = n+1$ имеем*

$$\det(A) = l_1 l_2 \dots l_k \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \dots + \frac{1}{l_k} \right).$$

**Доказательство.** См. [1].

**Следствие 3.4.** *Если граф Брауэра является двудольным, то ранг матрицы Картана равен $k-1$; в противном случае он равен $k$.*

**Доказательство.** См. [1].

## 4. Вычисление миноров: двудольный случай

Согласно следствию 2.6, для того, чтобы вычислить инвариантные множители (матрицы Картана) помеченного двудольного графа,

достаточно сделать это для его остовного дерева. Сделаем это с помощью индукции по числу вершин в дереве.

Рассмотрим два дерева $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ с $n-1$ и $n$ ребром соответственно такие, что $\Gamma_2$ получается из $\Gamma_1$ добавлением некоторой висячей вершины (с номером $n+1$). Пусть $A_1$, $A_2$ – их матрицы Картана. В этом случае $A_1$ получается из $A_2$ вычеркиванием строки и столбца, соответствующих единственному дополнительному ребру $e$. Предположим, что $1, 2, \ldots, n+1$ – номера вершин $\Gamma_2$, причем $n+1$ – номер отсутствующей в $\Gamma_1$ вершины, $n$ – кратность смежной с ней вершины. Пусть $I_r^{(1)}$, $I_r^{(2)}$ – идеалы колец $R_n$ и $R_{n+1}$, порожденные всеми минорами $r$-го порядка матриц $A_1$ и $A_2$ соответственно.

**Лемма 4.1.** *Предположим, что при любом натуральном $r < n-1$ идеал $I_r^{(1)}$ совпадает с идеалом, порожденным всевозможными произведениями вида $l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_r}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ – попарно различные индексы. Тогда при любом натуральном $r < n-2$ идеал $I_{r+1}^{(2)}$ также совпадает с идеалом, порожденным всевозможными произведениями вида $l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{r+1}}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_{r+1} \leq n+1$ – попарно различные индексы.*

**Доказательство.** Зафиксируем $r < n-2$. По следствию 3.2, идеал $I_{r+1}^{(2)}$ содержится в идеале, порожденном указанным набором элементов. Докажем обратное включение.

Рассмотрим произвольный минор $r$-го порядка $M$ матрицы $A_1$; представим его в виде $M = xl_k + y$, где $x, y \in R_{k-1}$. Добавим к соответствующей подматрице строку и столбец, соответствующие $e$; на их пересечении стоит элемент $l_k + l_{k+1}$, а все остальные добавленные элементы равны либо 0, либо $l_k$. Тогда, в силу того, что $l_k^2 = 0$, полученный минор равен

$$(l_k + l_{k+1})(xl_k + y) = l_k y + l_{k+1} M \in I_{r+1}^{(2)}.$$

Поскольку $r+1 < n-1$, из условия леммы следует, что $l_k y \in I_{r+1}^{(1)} \in I_{r+1}^{(2)}$ (это линейная комбинация мономов указанного в формулировке вида), значит, $l_{k+1} M \in I_{r+1}^{(2)}$ для любого минора $r$-го порядка матрицы $A_1$. Значит, по условию, любое произведение вида $l_{k+1} l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_r} \in I_{r+1}^{(2)}$ и любое такое произведение, не содержащее $l_{k+1}$, также лежит в $I_{r+1}^{(2)}$ по условию (т.к. $r+1 < n-1$).

Для получения аналогичного результата для $r = n-2$ нам понадобится точнее вычислить некоторые миноры.

**Лемма 4.2.** *Рассмотрим матрицу $A_3$, полученную из $A_2$ удалением столбца, соответствующего ребру $e$ и строчки, соответствующего ребру $e_1 \neq e$. Тогда*

$$|\det(A_3)| = l_1 l_2 \dots l_k \left( \frac{1}{l_{i_1}} + \frac{1}{l_{i_2}} + \dots + \frac{1}{l_{i_s}} \right),$$

*где $i_1, i_2, \dots, i_s$ – номера всех вершин одной из связных компонент, образующихся при удалении из графа $\Gamma_1$ ребра $e_1$.*

**Доказательство.** Пусть $C_n = C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_m}$ – кратчайший путь в дереве между $C_n$ и вершиной, инцидентной $e$. Прибавим к строчке $A_3$, соответствующей $e$ (в котором некоторые компоненты равны $l_n$, а остальные – нулю), строки, соответствующие ребрам $C_{j_2}C_{j_3}, \dots$ этого пути. Затем вычтем из получившегося столбца строки, соответствующие ребрам $C_{j_1}C_{j_2}, C_{j_3}C_{j_4}, \dots$ этого пути. В результате получится строка, у которой все ненулевые компоненты равны $l_{j_m}$, либо все равны $-l_{j_m}$ (в зависимости от четности длины пути); во втором случае поменяем знак получившегося столбца.

Пусть $i_1, i_2, \dots, i_s$ – номера вершин компоненты связности $\Gamma_3$ графа $\Gamma_1 \setminus \{e_1\}$, не содержащей $C_{j_m}$, $e_2, e_3, \dots, e_s$ – ребра этой компоненты. Так как на пересечении столбцов, соответствующих этим ребрам, со строками, соответствующими остальным ребрам (включая ребро $e_1$) стоят нули, то получившаяся матрица имеет блочную структуру. Легко видеть, что эти блоки являются матрицами Картана: один – для $\Gamma_3$ с унаследованными кратностями, а другой для графа, полученного из второй компоненты $\Gamma_1 \setminus \{e_1\}$ добавлением висячей (инцидентной $C_{j_m}$) вершины кратности 0. Применив к каждой из них предложение 3.3 и перемножив результаты, получим требуемое.

**Следствие 4.3.** *Идеал $I_{n-1}^{(1,5)}$, порожденный минорами $n-1$-го порядка, получающимися из матрицы $A_2$ удалением строчки, соответствующей ребру $e$ и одного из столбцов, совпадает с идеалом, порожденным всевозможными произведениями вида $l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_{n-1}}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n$ – попарно различные индексы.*

**Доказательство.** Заметим, что если $i_1, i_2, \dots, i_s$ – номера всех вершин одной из компонент связности, на которые граф $\Gamma_1$ распадается после удаления некоторого ребра, то

$$l_1 l_2 \dots l_k \left( \frac{1}{l_{i_1}} + \frac{1}{l_{i_2}} + \dots + \frac{1}{l_{i_s}} \right) \in I_{n-1}^{(1,5)}.$$

Это следует из леммы 4.2 и того, что

$$l_1 l_2 \dots l_k \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \dots + \frac{1}{l_k} \right) = \det(A_1) \in I_{n-1}^{(1,5)}. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь произвольную вершину $i$ и применим лемму 4.2 ко всем ребрам, инцидентным $i$ и соответствующим компонентам, не содержащим $i$. Вычитая сумму соответствующих элементов из (1), получаем, что $\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{l_i} \in I_{n-1}^{(1,5)}$ при любом $i = 1, \dots, n$.

**Лемма 4.4.** *В предположениях леммы* 4.1 *идеал* $I_{n-1}^{(2)}$ *совпадает с идеалом, порожденным всевозможными произведениями вида* $l_{i_1} \dots l_{i_{n-1}}$, *где* $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \le n+1$ *– попарно различные индексы.*

**Доказательство.** Вновь, как и в лемме 4.1, нетривиально лишь одно из включений. Как и в лемме 4.1, для всякого минора (теперь $n-2$-го порядка) $M = x l_k + y, x, y \in R_{k-1}$ матрицы $A_1$ имеем $l_k y + l_{k+1} M \in I_{n-1}^{(2)}$. Отсюда, представляя произведение $\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{l_i l_j}$ в виде комбинации миноров матрицы $A_1$ (для всяких $i < j < n$), получаем, что $\frac{l_1 l_2 \dots l_n l_{n+1}}{l_i l_j} \in I_{n-1}^{(2)}$, т.е. всякий моном степени $n-1$, содержащий и $l_n$, и $l_{n+1}$, лежит в $I_{n-1}^{(2)}$. Представляя произведение $\frac{l_1 l_2 \dots l_n}{l_i}$ в виде комбинации миноров матрицы $A_1$ (для всякого $i < n$), получаем, что $\frac{l_1 l_2 \dots l_{n-1}(l_n + l_{n+1})}{l_i} \in I_{n-1}^{(2)}$.

Но по следствию 4.3 имеем

$$\frac{l_1 l_2 \dots l_{n-1} l_n}{l_i} \in I_{n-1}^{(1,5)} \subset I_{n-1}^{(2)},$$

значит и

$$\frac{l_1 l_2 \dots l_{n-1} l_{n+1}}{l_i} \in I_{n-1}^{(1,5)} \subset I_{n-1}^{(2)};$$
$$l_1 l_2 \dots l_{n-1} \in I_{n-1}^{(1,5)} \subset I_{n-1}^{(2)}$$

– также по следствию 4.3. Мы доказали, таким образом, то все мономы указанного вида содержатся в $I_{n-1}^{(2)}$.

**Следствие 4.5.** *Пусть* $\Gamma$ *– помеченный двудольный граф с* $k$ *вершинами и* $n$ *ребрами,* $d_r = d_r(A)$ *– наибольший общий делитель миноров* $r$*-го порядка матрицы Картана* $A$ *графа* $\Gamma$. *Тогда*

(1) *При* $r < k-1$ $d_r$ *есть наибольший общий делитель чисел вида* $l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_r}$, *где* $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ *– попарно различные индексы.*

(2) *При* $r = k-1$ $d_r = l_1 l_2 \dots l_k (\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \dots + \frac{1}{l_k})$.

(3) *При* $r > k-1$ $d_r = 0$.

**Доказательство.** По следствию 2.6 для всякого натурального $r$ имеем $d_r(A) = d_r(A_0)$, где $A_0$ – матрица Картана остовного дерева графа Г. Так как ее порядок равен $k-1$, то при $r > k-1$ $d_r = 0$. При $r = k-1$ единственный минор $r$-го порядка равен $\det(A_0) = l_1 l_2 \dots l_k (\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \dots + \frac{1}{l_k})$ по предложению 3.3. Первое же из требуемых утверждений (для случая дерева) тривиально выводится из лемм 4.1 и 4.2 с помощью индукции по $k$.

## 5. Вычисление миноров: цикл нечетной длины

Пусть теперь Г – произвольный (связный) граф с $n$ вершинами и $n$ ребрами. Заметим, что любой симметричный минор порядка $n-1$ его матрицы Картана $A$ является матрицей Картана дерева, получающегося выкидыванием соответствующего ребра. Отсюда в силу следствия 4.5 получаем

**Предложение 5.1.** *Пусть* $k \le n-2$. *Идеал, порожденный минорами порядка* $k$ *матрицы Картана* $n$*-вершинного цикла, совпадает с идеалом, порожденным всеми* $k$*-произведениями кратностей вершин.*

Предположим теперь, что единственный цикл в Г имеет нечетную длину. Вычислим миноры $n-1$-го порядка матрицы $A$.

Пусть сначала Г – граф, являющийся циклом нечетной длины. Его матрица Картана имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} l_{i_1}+l_{i_2} & l_{i_2} & 0 & \dots & \dots & 0 & l_{i_1} \\ l_{i_2} & l_{i_2}+l_{i_3} & l_{i_3} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_{i_3} & l_{i_3}+l_{i_4} & l_{i_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & l_{i_{n-1}} & l_{i_{n-1}}+l_{i_n} & l_{i_n} \\ l_{i_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & l_{i_n} & l_{i_n}+l_{i_1} \end{pmatrix}.$$

Будем считать нумерацию переменных $l_i$ циклической (т.е., индексы определены по модулю $n$).

**Предложение 5.2.** *Пусть* $A_{ij}$ *– матрица, полученная из* $A$ *выкидыванием* $i$*-ой строчки и* $j$*-го столбца. Тогда*

$$\det(A_{ij}) = l_1 l_2 \dots l_n \left( \sum_{r=i+1,\dots,j} \frac{1}{l_{i_r}} - \sum_{r=j+1,\dots,i} \frac{1}{l_{i_r}} \right). \qquad (*)$$

**Доказательство.** В силу “циклической” симметрии матрицы $A$ можно ограничиться случаем $i = 1$. Матрица $A_{1i}$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{smallmatrix}\right)$, где

$$B_1 = \begin{pmatrix} l_{i_2} & l_{i_2} + l_{i_3} & l_{i_3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{i_3} & l_{i_3} + l_{i_4} & l_{i_4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & l_{i_{k-2}} & l_{i_{k-2}} + l_{i_{k-1}} & l_{i_{k-1}} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & l_{i_{k-1}} & l_{i_{k-1}} + l_{i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & l_{i_k} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{i_{k+2}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & l_{i_{k+2}} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{i_1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} l_{i_{k+1}} + l_{i_{k+2}} & l_{i_{k+2}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{i_{k+2}} & l_{i_{k+2}} + l_{i_{k+3}} & l_{i_{k+3}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_{i_{k+3}} & l_{i_{k+3}} + l_{i_{k+4}} & l_{i_{k+4}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & l_{i_{n-1}} & l_{i_{n-1}} + l_{i_n} & l_{i_n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & l_{i_n} & l_{i_n} + l_{i_1} \end{pmatrix}.$$

По предложению 3.1, в знакопеременной сумме определителя этой матрицы не уничтожаются взаимно лишь слагаемые вида $\pm\frac{\prod_{j=1}^{n} l_j}{l_k}$, так что остается понять для каждого такого слагаемого, сколько раз и с каким знаком оно входит в знакопеременную сумму.

Если $k = 1$, то из 1-ого столбца можно выбрать лишь элемент $l_2$ и далее мы видим, что единственно возможная “ладейная расстановка” в этом случае состоит из клеток диагонали (при каждом $s$ из $s$-го столбца этой матрицы выбирается $l_{s+1}$). То же самое происходит и для всех $k = i+1, i+2, \dots n$, но при $s < k-1$ из $s$-го столбца этой матрицы выбирается переменная $l_{s+1}$, а при $s \geq k-1$ – переменную $l_{s+2}$; все эти слагаемые входят в определитель со знаком $+$. В случае же $k = 2, \dots, i$ единственно возможная “ладейная расстановка” в этом случае состоит из левой нижней клетки и наддиагональных клеток при этом при $s < k$ из $s$-го столбца этой матрицы выбирается

переменная $l_s$, а при $s \geq k$ – переменная $l_{s+1}$. Соответствующая перестановка нечетна (в силу четности порядка матрицы $A_{1j}$), так что такие слагаемые входят со знаком минус.

Введем обозначение

$$J_{n-1} = \left\{ \prod_{m=1}^{n} l_m \left( \frac{a_1}{l_1} + \cdots + \frac{a_n}{l_n} \right) \mid a_i \equiv a_j \pmod 2 \quad \forall i, j \right\}.$$

Пусть $I_{n-1}(A)$ – идеал кольца $R_n$, порожденный минорами $n-1$-го порядка матрицы $A$.

**Следствие 5.3.** *Пусть $A$ – матрица Картана цикла. Тогда $I_{n-1}(A) = J_{n-1}$.*

**Доказательство.** Рассматривая разность двух выражений вида $(*)$, отличающихся лишь знаком одного из слагаемых, получаем, что для любого $i$

$$\frac{2\prod\limits_{j=1}^{j=n} l_j}{l_i} \in I_{n-1}(A).$$

Складывая все выражения вида $(*)$, в которых слагаемых со знаком $+$ на один больше, чем слагаемых со знаком $-$, получаем, что

$$l_1 l_2 \ldots l_n \left( \sum_{r=1,\ldots,n} \frac{1}{l_{i_r}} \right) \in I_{n-1}(A).$$

Очевидно, что полученные элементы порождают $J_{n-1}$. Обратное включение тривиально.

Вернемся к общему случаю.

**Лемма 5.4.** *Пусть $A$ – матрица Картана связного графа с $n$ вершинами и $n$ ребрами, $B$ – матрица, полученная заменой одной из строк матрицы $A$, имеющей вид $L_i + L_j$ (в обозначениях [2]) на строку $L_i$. Тогда*

(1) $\det(B) \in 2R_n$.

(2) *Если замененная строка соответствовала ребру, лежащему на цикле, то*

$$\det(B) = 2\prod_{i=1}^{i=n} l_i.$$

**Доказательство.** В случае, когда измененная строка соответствовала ребру не из цикла, ситуация аналогична доказательству леммы 4.2 – мы получаем блочную матрицу, один из блоков которой есть матрица Картана графа с $l$ вершинами и $l$ ребрами; ее определитель принадлежит $2R_n$ (по предложению 3.3). В случае, когда измененное ребро лежит на цикле, докажем утверждение леммы индукцией по числу вершин, не лежащих на цикле.

База индукции: если таковых вершин нет, т.е. граф есть цикл, сравним матрицу $B$ с матрицей Картана этого цикла. В соответствующей знакопеременной сумме мономы с кратными множителями по-прежнему взаимно уничтожаются, и легко видеть, что изменения сведутся к тому, что произведение $l_1 l_2 \dots l_m$ будет встречаться в этой сумме не четырежды, а дважды – оба раза со знаком $+$.

Индукционный переход: рассмотрим матрицы Картана $A_1$, $A_2$ графов, отличающихся на одну висячую вершину $C_{k+1}$, смежную с вершиной $C_k$; $B_1, B_2$ – соответствующие измененные матрицы.

Пусть $\det(B_1) = 2l_1 l_2 \dots l_k$ тогда (ср. доказательство леммы 4.1)

$$\det(B_2) = (l_k + l_{k+1}) 2 l_1 l_2 \dots l_k = 2 l_1 l_2 \dots l_k l_{k+1} \in 2R_n.$$

по индукционному предположению.

**Предложение 5.5.** *Пусть $A$ – матрица Картана связного недвудольного графа с $n$ вершинами и $n$ ребрами. Тогда $I_{n-1}(A) \supset J_{n-1}$.*

**Доказательство.** В силу следствия 5.3, достаточно доказать, что утверждение остается верным при добавлении к графу с вершинами $C_1, \dots, C_k$ висячей вершины $C_{k+1}$ кратности $l_{k+1}$, связанной с $C_k$ ребром $e$. Действительно, выкидывая из большей матрицы $A_2$ строчку и столбец, соответствующие произвольному ребру на цикле, мы получим минор, равный

$$l_1 l_2 \dots l_n \left( \sum_{r=1,\dots,n} \frac{1}{l_{i_r}} \right) \in I_{n-1}(A)$$

(в силу предложения 3.3). Далее, если $\frac{2\prod_{j=1}^{j=k} l_j}{l_i}$ представляется в виде комбинации миноров меньшей матрицы Картана, то, добавив к каждой из соответствующих подматриц строку и столбец, соответствующие $e$, мы получим миноры большей матрицы Картана, некоторая

линейная комбинация которых равна (см. доказательство леммы 4.1)

$$(l_k + l_{k+1})\frac{2\prod_{j=1}^{j=k} l_j}{l_i} = l_{k+1}\frac{2\prod_{j=1}^{j=k} l_j}{l_i} = \frac{2\prod_{j=1}^{j=k+1} l_j}{l_i}$$

в случае $i \neq k$ и

$$(l_k + l_{k+1})\frac{2\prod_{j=1}^{j=k} l_j}{l_k} = 2\prod_{j=1}^{j=k+1} l_j\left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}}\right)$$

при $i = k$.

С другой стороны, рассмотрим минор, полученный выкидыванием последнего столбца и какой-нибудь строки, соответствующей лежащему на цикле ребру. Точно такими же операциями, что и в доказательстве леммы 4.2, приведем матрицу к виду, описанному в формулировке леммы 5.4. Применяя эту лемму, мы получаем, что данный минор равен

$$2\prod_{j=1}^{j=k} l_j = \frac{2\prod_{j=1}^{j=k+1} l_j}{l_k} \in I_k(A_2),$$

значит, и

$$\frac{2\prod_{j=1}^{j=k+1} l_j}{l_{k+1}} \in I_k(A_2).$$

Итак, все элементы системы образующих идеала $J_k$, описанной в доказательстве следствия 5.3, принадлежат $I_k(A_2)$.

**Предложение 5.6.** *Пусть $A$ – матрица Картана связного недвудольного графа с $n$ вершинами и $n$ ребрами. Тогда*

$$I_{n-1}(A) = J_{n-1}.$$

**Доказательство.** Нам осталось доказать, что $I_{n-1}(A) \subset J_{n-1}$. Ясно (из предложения 3.1), что любой элемент из $I_{n-1}(A)$ представляется в виде

$$\prod_{m=1}^{n} l_m\left(\frac{a_1}{l_1} + \cdots + \frac{a_n}{l_n}\right),$$

так что осталось доказать, что в этом представлении все коэффициенты $a_i$ имеют одинаковую четность. В случае, если $\Gamma$ является

циклом, это верно в силу следствия 5.3; осталось доказать, что требуемое свойство сохраняется при добавлении висячей вершины.

Пусть $A_1$, $A_2$ – матрицы рассматриваемого вида, матрица $A_2$ получается из матрицы $A_1$ $n$-го порядка добавлением новых – последних – строки и столбца (при этом добавляется новая переменная $l_{n+1}$). Предположим, что для матрицы $A_1$ требуемое утверждение выполнено. Рассмотрим произвольный минор $M$ $n$-го порядка матрицы $A_2$.

**Случай 1.** $M$ получен из $A_2$ выкидыванием последних строки и столбца. В этом случае минор равен

$$\det(A_1) = 4\prod_{i=1}^{i=n} l_i \in 2R_n \subset J_n.$$

**Случай 2.** Выкинуты не последняя строка и не последний столбец. В этом случае минор равен

$$(l_k + l_{k+1})(xl_k + y) = l_k y + l_{k+1} M_1 \in I_{r+1}^2,$$

где

$$M_1 = \prod_{m=1}^{n} l_m \left(\frac{b_1}{l_1} + \cdots + \frac{b_n}{l_n}\right)$$

– минор $n-1$-го порядка в $A_2$. Отсюда видно, что если в сумме, представляющей $M_1$, все $n$ слагаемых имели одинаковую четность, то и в соответствующей сумме для $M$ все $n+1$ слагаемых имеют одинаковую (ту же) четность.

**Случай 3.** Выкинут последний столбец и непоследняя строчка матрицы $A_2$. В этом случае точно такими же операциями, что и в доказательстве леммы 4.2, приведем матрицу к виду, описанному в формулировке леммы 5.4. Применяя эту лемму, мы получаем, что данный минор принадлежит $2R_n \subset J_n$.

**Следствие 5.7.** *Пусть $\Gamma$ – недвудольный помеченный граф с $k$ вершинами и $n$ ребрами, $d_r = d_r(A)$ – наибольший общий делитель миноров $r$-го порядка матрицы Картана $A$ графа $\Gamma$. Тогда*

(1) *При $r < k-1$ $d_r$ есть наибольший общий делитель чисел вида $l_{i_1} l_{i_2} \dots l_{i_r}$, где $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ – попарно различные индексы.*

(2) *При* $r = k-1$ $d_r$ *есть наибольший общий делитель чисел вида* $\frac{2l_{i_1}l_{i_2}\dots l_{i_k}}{l_i}$, *где* $1 \le i \le k$, *и числа* $l_1 l_2 \dots l_k(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \dots + \frac{1}{l_k})$.

(3) *При* $r = k$ $d_r = 4l_1 l_2 \dots l_k$.

(4) *При* $r > k$ $d_r = 0$.

**Доказательство.** Первое утверждение фактически доказано в предложении 5.1, третье следует из замечания 2.5 и предложения 3.3, четвертое – из замечания 2.5. Второе утверждение следует из предложения 5.6.

## 6. Структура группы Гротендика

Пусть $\Lambda$ – неразложимая симметрическая SB-алгебра, $\Gamma$ – ее помеченный граф Брауэра, $k$ – количество $A$-циклов алгебры $\Lambda$, $n$ – количество вершин в ее колчане. Обозначим через $l_1, \dots, l_k$ – кратности $A$-циклов, через $p_1, p_2, \dots, p_r$ – все простые делители чисел $l_1, \dots, l_k$, и пусть $0 \le a_{i,1} \le a_{i,2} \le \dots \le a_{i,k}$ – $p_i$-адические показатели чисел $l_1, l_2, \dots, l_k$, упорядоченные по возрастанию. Определим в этих терминах структуру конечнопорожденной абелевой группы $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda))$.

Обозначим через $K_p$ $p$-компоненту $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda))$. Пусть $a_i$ – $p_i$-адический показатель числа $l_1 l_2 \dots l_k(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \dots + \frac{1}{l_k})$; очевидно, что $a_i \ge \sum_{j=1}^{k-1} a_{i,j}$.

**Теорема 6.1.** *В приведенных выше обозначениях*

(1) *Свободный ранг группы* $\mathrm{K}_0(\mathrm{stmod}\,(\Lambda))$ *равен* $n-k$ *в случае недвудольного графа* $\Gamma$ *и* $n-k+1$ *в случае двудольного графа* $\Gamma$.

(2) *Предположим, что* $\Gamma$ *двудолен. Тогда*

$$K_{p_i} \cong \oplus_{j=1}^{k-2} \mathbb{Z}/p_i^{a_{i,j}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_i^{a_i - \sum_{j=1}^{k-2} a_{i,j}}\mathbb{Z}.$$

(3) *Предположим, что* $\Gamma$ *не является двудольным и* $p_i$ *нечетно. Тогда*

$$\begin{aligned} K_{p_i} \cong {} & \oplus_{j=1}^{k-2} \mathbb{Z}/p_i^{a_{i,j}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_i^{\min\{a_i, \sum_{j=1}^{k-1} a_{i,j}\} - \sum_{j=1}^{k-2} a_{i,j}}\mathbb{Z} \\ & \oplus \mathbb{Z}/p_i^{\sum_{j=1}^{k} a_{i,j} - \min\{a_i, \sum_{j=1}^{k-1} a_{i,j}\}}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(4) *Предположим, что* $\Gamma$ *не является двудольным и* $p_i = 2$ *при некотором* $i$. *Тогда*

$$\begin{aligned} K_2 \cong {} & \oplus_{j=1}^{k-2} \mathbb{Z}/2^{a_{i,j}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^{\min\{a_i, \sum_{j=1}^{k-1} a_{i,j}+1\} - a_{i,k-2}}\mathbb{Z} \\ & \oplus \mathbb{Z}/2^{a_{i,k}+2-\min\{a_i, \sum_{j=1}^{k-1} a_{i,j}+1\}}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Разумеется в указанных прямых суммах некоторые слагаемые могут быть нулевыми.)

**Доказательство.** 1. Это непосредственно следует из следствия 3.4.

2–4. Набор степеней в разложении $K_p$ есть набор инвариантных множителей $i_r = \frac{d_r}{d_{r-1}}$, где $d_r$ – наибольший общий делитель миноров $r$-го порядка матрицы Картана графа Г. Эти числа $d_r$ вычислены в следствиях 4.5 и 5.7; осталось отметить, что $p$-адический показатель НОД всевозможных $r$-произведений чисел $l_1, l_2, \ldots, l_k$ есть $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,r}$.

**Следствие 6.2.** *Симметрические* SB-*алгебры с одним и тем же непомеченным графом Брауэра и мультимножеством кратностей циклов имеют изоморфные группы Гротендика.*

## Литература

1. М. А. Антипов, *Группа Гротендика стабильной категории симметрической специальной бирядной алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 5–12.
2. H. Tachikawa, T. Vakamatsu, *Cartan matrices and Grothendieck groups of stable categories.* — J. Algebra **144**, (2) (1991), 390–398.

Antipov M. A. Structure of the stable Grothendieck group of a symmetric SB-algebra.

We determine the structure of the stable Grothendieck group of an arbitrary symmetric special biserial algebra in terms of multiplicities of $A$-cycles.

С.-Петербургский
государственный университет
*E-mail*: hyperbor@list.ru

Поступило 1 февраля 2009 г.