Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 365, 2009 г.

А. С. Ананьевский, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук

ОБ ОПИСАНИИ НАДГРУПП $E(m,R)\otimes E(n,R)$

§1. Введение

В работах Зенона Боревича и второго автора [3, 4], описаны подгруппы полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,R)$ над коммутативным кольцом R, содержащие *прямую сумму* элементарных подгрупп

$$E(n_1,R)\oplus\ldots\oplus E(n_t,R)\leqslant H\leqslant \mathrm{GL}(n,R),$$

где $n=n_1+\ldots+n_t$. Прямая сумма здесь представляет собой прямую сумму *линейных* групп. Таким образом, левая часть написанного выше неравенства состоит из всевозможных клеточно диагональных матриц вида

$$x_1\oplus\ldots\oplus x_t=\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_t),\quad x_i\in E(n_i,R).$$

В работе [4] описание таких подгрупп H получено в случае, когда все $n_i\geqslant 3$. В дальнейшем это описание многократно передоказывалось и обобщалось. В частности, в V-й главе диссертации второго автора [5] аналогичные результаты получены для других классических групп. С современной точки зрения речь здесь идет об описании надгрупп subsystem subgroups.

Естественно возникает вопрос, можно ли получить аналогичные результаты для подгрупп H полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,R)$ над коммутативным кольцом R, содержащих *тензорное произведение* элементарных подгрупп

$$E(n_1,R)\otimes\ldots\otimes E(n_t,R)\leqslant H\leqslant \mathrm{GL}(n,R),$$

где $n=n_1\ldots n_t$. Как и выше, тензорное произведение здесь представляет собой тензорное произведение *линейных* групп. Иными словами, тензорное произведение $H\otimes G$ *состоит* из всевозможных *кронекеровских* произведений $x\otimes y$, где $x\in H$, $y\in G$.

Работа второго автора была поддержана грантом НШ-8464.2006.1 и проектом РФФИ 08-01-00756, 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-00878, 09-01-91333, а также EPSRC EP/D03695X/1 (first grant scheme Рузби Хазрата в университете Белфаста) и SFB-701 при университете Билефельда .

Таким образом, предлагается получить для надгрупп tensored subgroups результаты, аналогичные результатам об описании надгрупп subsystem subgroups. Из общих соображений возможность такого обобщения представляется в высшей степени правдоподобной и отмечалась, в частности, в [37, 39, 40].

Например, в работе [40] это артикулируется следующим образом: "there is no doubt, that ... one can obtain analogous results for an arbitrary commutative ring R and arbitrary number of factors t under assumption $n_1, \dots, n_t \geqslant 3$." После этого следует такое совершенно экстравагантное заявление: "The answer involves ideals of R and is similar to, but easier than, that for the case of subsystem subgroups."

Ясно, что для произвольных коммутативных колец нет никаких шансов ослабить здесь предположение $n_i \geqslant 3$. Конечной целью планируемого нами цикла работ является полное описание таких подгрупп при этом предположении. Насколько нам известно, на сегодняшний момент эта программа не реализована полностью даже в случае поля.

С точки зрения Maximal Subgroup Classification Project [24], это в точности описание надгрупп для групп из классов Ашбахера $C_4 + C_7$. Мы не будем даже пытаться обсуждать здесь этот общий контекст, а отошлем читателя к обзорам [40] и [13], где можно найти сотни дальнейших ссылок.

Единственный известный нам законченный результат получен Ли Шанчжы [30–33], который описывает надгруппы $E(m, K) \otimes E(n, K)$ в случае поля $R = K$, в предположении $m, n \geqslant 2$. Однако, в случае, когда одна из степеней m или n равна 2, в его ответе возникают нестандартные подгруппы.

Нет сомнения, что работа Ли Шанчжы представляет собой совершенно выдающееся достижение. Его доказательство при $m \neq n$ основано на использовании линейной зависимости и не обобщается на кольца. С другой стороны, в особенности в случае $m = n$, его доказательства основаны на феерических матричных вычислениях, проследить которые совсем не просто. Сам Ли Шанчжы говорил нам, что это *самый* трудный цикл его статей, который потребовал даже больше работы, чем его статьи по описанию надгрупп для класса Ашбахера C_3. Многие детали вычислений опубликованы только в книге [33], но если доказательство трудно понять, то совсем не потому, что оно написано по-китайски.

В процессе работы над этой задачей в общем случае выяснилось, что и для колец в качестве *первого шага* необходимо полностью рас-

смотреть случай $t=2$, а именно, классифицировать подгруппы H такие, что

$$E(m,R)\otimes E(n,R)\leqslant H\leqslant \mathrm{GL}(mn,R),$$

где $m,n\geqslant 3$.

В настоящей работе, которая является изложением курсовых работ первого и третьего авторов, выполненных под руководством второго автора, мы как раз и *начинаем* систематическое обсуждение этого *первого шага*. Оказалось, что в общем случае небанально даже просто правильно *сформулировать* возникающий ответ.

Сразу отметим два *принципиальных* отличия случая кольца от случая поля, возникающие на уровне *формулировки*. Отличия на уровне доказательств подробно обсуждаются в следующем параграфе.

• Тензорное произведение групп точек двух алгебраических групп *как линейных групп* может оказаться меньше группы точек их тензорного произведения. Таким образом, описание надгрупп $E(m,R)\otimes E(n,R)$ должно с самого начала правильно учитывать такие эффекты теории алгебраических групп, как *несюръективность эпиморфизмов* на точках [41], [44].

• В общем случае ответ дается не в терминах одного, как кажется из общих соображений, а в терминах *трех* идеалов кольца, два из которых играют в точности такую же роль, как *относительные форменные параметры* при описании подгрупп в классических группах над кольцом с необратимой 2.

В настоящей работе мы формулируем несколько результатов, которые показывают, как с учетом этих явлений *модифицировать* стандартный ответ, по сравнению с работами Ли Шанчжы [30–33], чтобы он *имел шансы* оставаться справедливым для произвольного коммутативного кольца.

В процессе работы выяснилось, что случай $m=n$ *значительно* сложнее случая $m\neq n$. Оказалось, что в предположении $n\geqslant m+2$ для нашей задачи работает обычный метод стабилизации столбца при помощи миноров, предложенный по другому поводу в диссертациях Алексея Степанова и второго автора [22, 5]. В классических обозначениях этот метод изложен в работе [37], вариация 1, а возможность более простой записи в грассмановых координатах отмечена в [8].

Это позволяет дать для случая $n\geqslant m+2$ прямое доказательство стандартности, не зависящее от результатов Ли Шанчжы и не исполь-

зующее локализацию[1]. Точнее, в работах [1, 2] будет доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть R – коммутативное кольцо, а $m, n \geqslant 3$, причем $n \geqslant m+2$. Тогда для любой промежуточной подгруппы H,*

$$E(m,R) \otimes E(n,R) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}(mn,R),$$

существует единственная допустимая тройка (A,B,C) идеалов кольца R такая, что

$$E(m,n,R,A,B,C) \leqslant H \leqslant C(m,n,R,A,B,C).$$

В настоящей работе мы лишь вводим необходимые обозначения, формулируем основные промежуточные результаты и намечаем общую схему рассуждений. Детальные доказательства анонсированных здесь результатов занимают много десятков страниц и приведены в [1, 2].

Мы уверены, что в ближайшее время нам удастся ослабить условие в этой теореме до $n \neq m$. Конечно, доказательство этого более общего результата должно опираться на результаты Ли Шанчжы [30–33], относящиеся к случаю поля, и самым существенным образом использовать локализацию для извлечения трансвекций. Вместе с тем, в настоящее время мы не видим никаких подходов к доказательству аналогичного результата[2] при $m = n$.

§2. В действительности все обстоит совсем не так, как на самом деле

В действительности оказалось, что задача о надгруппах tensored subgroups – как, впрочем, и недавно решенная Виктором Петровым, вторым автором и Ю Хоном задача о надгруппах классических групп [9–11], [20, 34, 45, 46] – является *значительно* более сложной, чем нам представлялось в момент написания [39], в момент написания [40] и даже в момент написания [37].

[1] В том смысле, что локализация не используется для извлечения трансвекций. Однако, все известные нам вычисления нормализатора опираются, в той или иной форме, на всю мощь локализационных методов.

[2] Естественно, с заменой группы $C(m,n,R,A,B,C)$ на ее нормализатор в $\mathrm{GL}(mn,R)$.

Ситуация в некотором смысле ПРЯМО ПРОТИВОПОЛОЖНА тому, что заявлено в воспроизведенной в предыдущем параграфе цитате из [40]. Фактически дополнительные трудности по сравнению с работой [4] начинаются здесь с самых первых шагов.

Более того, даже многие вспомогательные утверждения для рассматриваемого нами случая требуют принципиально другого технического напряжения, сопоставимого только с тем, которое обычно присуще анализу исключительных групп, [6, 7, 15–17]. Отметим некоторые наиболее существенные моменты.

• Прямые суммы элементарных групп содержат элементы вычета 1 и, таким образом, в случае поля описание их надгрупп сразу следует из описания неприводимых групп, порожденных корневыми подгруппами. В то же время, минимальный вычет квадратичного элемента, содержащегося в тензорных произведениях элементарных групп, может быть сколь угодно большим, и описание их надгрупп опирается либо на всю мощь полученного Францем Тиммесфельдом бесконечного аналога теории квадратичных пар [38], либо на трудные и малопонятные матричные вычисления Ли Шанчжы [30–33].

• *Линейные* сравнения, определяющие промежуточные подгруппы, заменяются на *квадратичные*, и, соответственно, *квадратичные* сравнения, задающие их нормализаторы, заменяются на сравнения *степени четыре*.

• В то время как группа R-точек аффинной групповой схемы $\mathrm{GL}_m\oplus\mathrm{GL}_n$ совпадает с $\mathrm{GL}(m,R)\oplus\mathrm{GL}(n,R)$, для тензорных произведений это, вообще говоря, не имеет места. Подгруппа в $\mathrm{GL}(mn,R)$, состоящая из кронекеровских произведений матриц степеней m и n над R, может быть строго меньше группы R-точек аффинной групповой схемы $\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n$. Иными словами, вообще говоря,

$$\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)\lneqq(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R).$$

Это значит, что, в отличие от работы [4], где можно было обойтись элементарной матричной техникой, здесь мы должны с самого начала учитывать эффекты теории алгебраических групп.

• Возникающий ОТВЕТ практически НЕВОЗМОЖНО УГАДАТЬ ИЗ ОБЩИХ СООБРАЖЕНИЙ, не проводя детальных вычислений уровней. Более того, проявляющиеся при этом трудности не просматриваются на уровне поля. Дело в том, что – в отличие от коммутативного кольца – поле довольно редко *одновременно* имеет характеристику

2 и характеристику m или n. Поэтому все патологии, возникающие при $m = 2$ или $n = 2$ над полями характеристики 2, списываются на исключительное поведение группы $\mathrm{GL}(2, R)$. Между тем, в случае кольца аналогичные явления возникают при любых m и n и должны рассматриваться КАК ЧАСТЬ СТАНДАРТНОГО ОТВЕТА, а вовсе не как исключения[3].

А именно, пусть, как и во введении,

$$E(m, R) \otimes E(n, R) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}(mn, R).$$

Руководствуясь аналогией с работами Виктора Петрова и второго автора [9–11, 20, 34], можно ожидать, что в предположении $m, n \geqslant 3$, для каждой такой подгруппы H существует единственный идеал A в R такой, что H лежит между группой

$$\mathrm{EE}(m, n, R, A) = (E(m, R) \otimes E(n, R))E(mn, R, A)$$

и ее нормализатором в $\mathrm{GL}(mn, R)$:

$$\mathrm{EE}(m, n, R, A) \leqslant H \leqslant N_G(\mathrm{EE}(m, n, R, A)).$$

Однако, вообще говоря, такой ответ может иметь место лишь при некоторых дополнительных предположениях на основное кольцо, скажем, если $m, n \in R^*$. В общем случае ответ дается не в терминах одного, а в терминах *трех* идеалов кольца, два из которых играют в точности такую же роль, как относительные форменные параметры при описании подгрупп в классических группах над кольцом с необратимой 2. Таким образом, без предположения $m, n \in R^*$ небанально даже просто *сформулировать* полный ответ.

• Кроме обычных структурных результатов, таких как теорема нормальности Суслина или теорема Уилсона–Голубчика о нормальном строении, мы вынуждены опираться на более трудные результаты структурной теории, такие, как описание мономорфизмов линейных групп, полученное Уотерхаузом, Петечуком, Голубчиком–Михалевым и Зельмановым, или полученную Баком, Хазратом и вторым автором характеризацию элементарной подгруппы $E(n, R)$ как

[3]Уяснение этого обстоятельства было для нас существенной психологической трудностью. Вероятно, это одна из основных причин, по которым результаты настоящей работы не были получены ранее.

наибольшей совершенной подгруппы в $\mathrm{GL}(n,R)$. В свою очередь, некоторые из этих результатов опираются на метод локализации-пополнения, нетривиальные кольцевые вычисления и т.д. К тому же, некоторые из них имеются в литературе лишь при дополнительном предположении $2\in R^*$, что создает нам дополнительные трудности.

Кроме того, в доказательствах дальнейших результатов мы существенно используем некоторые недавние результаты об описании подгрупп для других классов Ашбахера, в частности работы Алексея Степанова о надгруппах subring subgroups [35, 36].

§3. Основные обозначения

Используемые нами обозначения большей частью совершенно стандартны и совпадают с обозначениями, употреблявшимися в [4, 8–11, 37]. Канонической ссылкой, где можно найти *все* необходимые нам определения и факты, служит замечательная монография А. Хана и О. Т. О'Миры [28]. Тем не менее, для того, чтобы настоящую статью можно было читать независимо от этих работ, напомним основные обозначения, относящиеся к подгруппам $\mathrm{GL}(n,R)$.

Пусть вначале G – произвольная группа, $C(G)$ – ее центр. Под коммутатором двух элементов $x,y\in G$ мы всегда понимаем их левонормированный коммутатор $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$. Через ${}^xy=xyx^{-1}$ и $y^x=x^{-1}yx$ обозначаются, соответственно, левый и правый сопряженные к y при помощи x. Запись $H\leqslant G$ обозначает, что H – подгруппа в G, а $H\trianglelefteq G$ – что H – нормальный делитель. Для подмножества $X\subseteq G$ через $\langle X\rangle$ обозначается порожденная им подгруппа. Если $H\leqslant G$, то $\langle X\rangle^H$ обозначает наименьшую подгруппу в G, содержащую X и нормализуемую H. Для двух подгрупп $F,H\leqslant G$ через $[F,H]$ обозначается их взаимный коммутант, порожденный $[f,h]$, $f\in F$, $h\in H$. Кратные коммутаторы тоже левонормированы, так что, в частности, $[E,F,H]=[[E,F],H]$.

Напомним, что группа G называется *центральным произведением* своих подгрупп $F,H\leqslant G$, если выполняются три следующих условия:

$$\langle F,H\rangle=G,\qquad [F,H]=1,\qquad F,H\trianglelefteq G.$$

В этом случае обычно пишут $G=F\circ H$. Легко видеть, что из условия $[F,H]=1$ вытекает, что

$$F\cap H=C(F)\cap C(H)\leqslant C(G).$$

Пусть теперь R – произвольное ассоциативное кольцо с 1, которое по умолчанию всегда предполагается коммутативным. Через $M(m,n,R)$ обозначается R-бимодуль $m \times n$ матриц с коэффициентами из R, $M(n,R) = M(n,n,R)$ – полное матричное кольцо степени n над R. Далее, $R^\bullet = R \setminus \{0\}$ – множество ненулевых элементов кольца R, R^* – мультипликативная группа этого кольца, а $G = \mathrm{GL}(n,R) = M(n,R)^*$ – полная линейная группа степени n над R. Если R коммутативно, $\mathrm{SL}(n,R)$ – специальная линейная группа степени n над R.

Как обычно, для матрицы $g \in G$ через g_{ij} обозначается ее коэффициент, стоящий на месте (i,j), т.е. $g = (g_{ij})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Через $g^{-1} = (g'_{ij})$ обозначается обратная к g матрица, а через g^t – транспонированная. В случае, когда в обозначении матричных элементов используются верхние индексы, мы обычно пишем $\widetilde{g}_{ij}$ вместо g'_{ij}. Через $g_{*j} = (g_{1j}, \dots, g_{nj})^t$ обозначается j-й столбец матрицы g, а через $g_{i*} = (g_{i1}, \dots, g_{in})$ – ее i-я строка.

Как обычно, e – единичная матрица, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой на месте (i,j) стоит 1 и нули на всех остальных местах. Через $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ для $\xi \in R$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, обозначается *элементарная трансвекция*. Через $X_{ij} = \{t_{ij}(\xi), \xi \in R\}$, $i \neq j$, обозначается *корневая подгруппа*.

Пусть теперь $I \trianglelefteq R$ – идеал в R. Обозначим через $E(n,I)$ подгруппу в G, порожденную всеми элементарными трансвекциями уровня I:

$$E(n,I) = \langle t_{ij}(\xi), \xi \in I, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle.$$

В наиболее важном случае $I = R$ группа $E(n,R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется (абсолютной) *элементарной группой*.

В дальнейшем основную роль играют *относительные элементарные группы* $E(n,R,I)$. Напомним, что $E(n,R,I)$ – это нормальное замыкание $E(n,I)$ в $E(n,R)$:

$$E(n,R,I) = \langle t_{ij}(\xi), \xi \in I, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle^{E(n,R)}.$$

Пусть, по-прежнему, $I \trianglelefteq R$, а R/I – фактор-кольцо R по I. Обозначим через $\rho_I : R \longrightarrow R/I$ каноническую проекцию, отправляющую $\lambda \in R$ в $\overline{\lambda} = \lambda + I \in R/I$. Применяя проекцию ко всем компонентам матриц, мы получим гомоморфизм редукции $\rho_I : \mathrm{GL}(n,R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,R/I)$, сопоставляющий матрице $g = (g_{ij})$ ее класс $\overline{g} = (\overline{g}_{ij})$ по

модулю I. Ядро гомоморфизма ρ_I обозначается $\mathrm{GL}(n,R,I)$ и называется *главной конгруэнц-подгруппой* в G уровня I.

Пусть теперь $C(n,R)$ обозначает центр группы $\mathrm{GL}(n,R)$, состоящий из скалярных матриц εe, $\varepsilon\in R^*$. Из абсолютной неприводимости $E(n,R)$ вытекает, что $C_{\mathrm{GL}(n,R)}(E(n,R))=C(n,R)$ (лемма Бернсайда). Полный прообраз центра группы $\mathrm{GL}(n,R/I)$ обозначается $C(n,R,I)$ и называется *полной конгруэнц-подгруппой* уровня I. Группа $C(n,R,I)$ состоит из всех матриц, сравнимых со скалярной матрицей по модулю I.

§4. Группа $\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)$

В настоящем параграфе мы опишем тензорное произведение $\mathrm{GL}(m,R)$ и $\mathrm{GL}(n,R)$ как *линейных* групп – если быть совсем точным, как *абстрактных* линейных групп. Одно из первых отличий настоящей работы от работы Боревича и второго автора [4] состоит ровно в том, что тензорное произведение $\mathrm{GL}(m,R)$ и $\mathrm{GL}(n,R)$ как линейных *алгебраических* групп вообще говоря строго больше, чем $\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)$.

Для любых четырех натуральных чисел l,m,n,p определена операция

$$\otimes : M(l,m,R)\times M(n,p,R)\longrightarrow M(ln,mp,R),$$

сопоставляющая паре матриц $x\in M(l,m,R)$, $y\in M(n,p,R)$ их *кронекерово произведение* $x\otimes y$, которое проще всего представлять себе как блочную матрицу вида

$$x\otimes y=\begin{pmatrix} x_{11}y & \dots & x_{1m}y\\ & \dots & \\ x_{l1}y & \dots & x_{lm}y\end{pmatrix}\in M(ln,mp,K).$$

Особенно часто эта конструкция используется для квадратных матриц. Стоит подчеркнуть, что если $x\in M(m,R)$, $y\in M(n,R)$ то

$$x\otimes y\in M(m,M(n,R)),\quad \text{в то время как}\quad y\otimes x\in M(n,M(m,R)).$$

И то и другое кольцо можно отождествить с $M(mn,R)$. Тем не менее, вообще говоря, $x\otimes y\neq y\otimes x$. В действительности, матрица $y\otimes x$ получается из $x\otimes y$ подходящей перестановкой строк и столбцов.

Часто мы будем использовать поблочную индексацию

$$g=\left(g^{ij}_{pq}\right),\quad 1\leqslant i,j\leqslant m,\quad 1\leqslant p,q\leqslant n,$$

матричных элементов матриц из $\mathrm{GL}(mn, R)$, согласованную с описанным выше разбиением на $m \times m$ блоков размера $n \times n$. А именно, верхняя пара индексов указывает позицию блока в блочной матрице размера $m \times m$, а нижняя пара индексов – позицию элемента внутри такого блока размера $n \times n$.

Только что описанное обозначение подразумевает, что

$$g_{pq}^{ij} = g_{n(i-1)+p,n(j-1)+q}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant m, \quad 1 \leqslant p, q \leqslant n.$$

В частности, если $g = x \otimes y$ для некоторых $x \in \mathrm{GL}(m, R)$ и $y \in \mathrm{GL}(n, R)$, то

$$g_{pq}^{ij} = x_{ij} y_{pq}.$$

В этих обозначениях формула умножения матриц принимает следующий вид

$$(fg)_{pq}^{ij} = \sum_{h=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} f_{pr}^{ih} g_{rq}^{hj}.$$

Мы не будем напоминать очевидные тождества, связывающие кронекеровское произведение с другими матричными операциями. Все это можно найти в любом хорошем учебнике линейной алгебры.

§5. Группа $(\mathrm{GL}_m \otimes \mathrm{GL}_n)(R)$

В настоящем параграфе мы опишем тензорное произведение $\mathrm{GL}(m, R)$ и $\mathrm{GL}(n, R)$ как линейных *алгебраических* групп. А именно, оказывается, что как алгебраическая подгруппа в GL_{mn} группа $\mathrm{GL}_m \otimes \mathrm{GL}_n$ определяется уравнениями

$$g_{pq}^{ij} g_{rs}^{hk} = g_{pq}^{hk} g_{rs}^{ij}.$$

Здесь и далее мы считаем, что $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant m$, $1 \leqslant p, q, r, s \leqslant n$.

Иными словами, для любого коммутативного кольца имеет место равенство

$$(\mathrm{GL}_m \otimes \mathrm{GL}_n)(R) = \{(g_{pq}^{ij}) \in \mathrm{GL}(mn, R) \mid g_{pq}^{ij} g_{rs}^{kl} = g_{rs}^{ij} g_{pq}^{kl}\}.$$

Обозначим множество в правой части этого равенства через $G(R)$.

Теорема 1. *Имеет место равенство* $\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n=G$ *аффинных схем над* $\mathbb{Z}$.

Как известно, для совпадения двух аффинных групповых схем достаточно проверить совпадение их групп точек над любым локальным кольцом. Поэтому теорема 1 вытекает из следующего более точного результата.

Предложение 1. *Для локального кольца* R *имеют место равенства*

$$(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R)=\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)=G(R).$$

В силу несюръективности эпиморфизмов алгебраических групп на точках в общем случае группа $G(R)$, как правило, *строго больше*, чем $\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)$. Матрицы из $G(R)$ по-прежнему представляются в виде тензорных произведений двух матриц степеней m и n, однако коэффициенты этих матриц не обязаны лежать в кольце R, а могут браться в каком-то его расширении S, расщепляющем соответствующий элемент группы Пикара. Приведем теперь более прозаическую переформулировку теоремы 1.

Теорема 2. *Для любого коммутативного кольца* R *множество* $G(R)$ *является группой, причем*

$$\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)\trianglelefteq G(R).$$

Каждый элемент $g\in G(R)$ *представляется в виде* $g=x\otimes y$ *для некоторых* $x\in\mathrm{GL}(m,S)$, $y\in\mathrm{GL}(n,S)$, *где* S *– какое-то расширение кольца* R.

Все утверждения этой теоремы, кроме нормальности $\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)$ в $G(R)$, сразу вытекают из теоремы 1. Нормальность же вытекает из следующего более сильного результата, утверждающего, что не только тензорное произведение, а уже оба фактора нормальны в $G(R)$.

Предложение 2. *Для любого коммутативного кольца* R *имеем*

$$\mathrm{GL}(m,R)\otimes e,\ e\otimes\mathrm{GL}(n,R)\trianglelefteq G(R).$$

Доказательство этого результата опирается на возможность представить любой элемент $g\in(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R)$ в виде $g=x\otimes y$, для некоторого расширения S кольца R и некоторых $x\in\mathrm{GL}(m,S)$, $y\in\mathrm{GL}(n,S)$. Кроме того, при этом используется вычисление нормализатора $\mathrm{GL}(n,R)$ в $\mathrm{GL}(n,S)$, см., например, [35], [36].

§6. Группа $E(m,R)\otimes E(n,R)$

Группа $E(m,R)\otimes E(n,R)$ порождается следующими двумя типами больших трансвекций:

$$T^{ij}(\xi)=t_{ij}(\xi)\otimes e,\quad 1\leqslant i\neq j\leqslant m,\quad \xi\in R,$$

и, соответственно,

$$T_{pq}(\xi)=e\otimes t_{pq}(\xi),\quad 1\leqslant p\neq q\leqslant n,\quad \xi\in R.$$

В следующем параграфе мы вычислим нормализатор группы $E(m,R)\otimes E(n,R)$ в $\mathrm{GL}(mn,R)$. Важным шагом в доказательстве этого результата является проверка нормальности $E(m,R)\otimes E(n,R)$ в $(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R)$.

Следующая характеризация элементарной подгруппы играет ключевую роль во всех наших вычислениях. Она вытекает из результатов Энтони Бака [26], см. также работу Хазрата–Вавилова [29] по поводу более простого доказательства более общего факта. Нам не известно *никакого* элементарного доказательства этого факта, которое не опиралось бы на всю мощь локализационных методов. Формально в [26, 29] нужный нам результат так не формулировался, но сразу вытекает из существования построенной в этих работах нильпотентной фильтрации $\mathrm{GL}(n,R)$.

Лемма 1. *Пусть R – произвольное коммутативное кольцо, $m,n\geqslant 3$. Тогда группа $E(m,R)\otimes E(n,R)$ является наибольшей совершенной подгруппой в $\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)$.*

Отсюда моментально вытекает такое важное следствие.

Лемма 2. *Пусть R – любое коммутативное кольцо, $m,n\geqslant 3$. Тогда группа $E(m,R)\otimes E(n,R)$ является вполне характеристической подгруппой в $\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)$.*

Таким образом, в частности,

$$E(m,R)\otimes E(n,R)\trianglelefteq \mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R)$$

при $m,n\geqslant 3$. Конечно, это следует уже из теоремы нормальности Суслина [23].

В свою очередь, отсюда и из теоремы 2 сразу вытекает следующий более точный результат, утверждающий нормальность этой элементарной подгруппы в соответствующей алгебраической группе.

Теорема 3. *Пусть R – любое коммутативное кольцо, $m,n\geqslant 3$. Тогда*

$$E(m,R)\otimes E(n,R)\trianglelefteq(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R).$$

Разумеется, это чрезвычайно частный случай теоремы 1 работы Петрова и Ставровой [21]. Доказательство в этой работе, как в конечном счете и наше доказательство, основано на локализационных методах.

§7. Нормализатор $E(m,R)\otimes E(n,R)$

Мы подошли к одному из основных результатов работы. Он интересен сам по себе и играет ключевую роль в доказательстве нашего основного результата об описании надгрупп. В различных ситуациях аналогичные результаты естественно возникали в работах [6, 8, 10, 11, 15, 34] – а фактически уже в [4], хотя, конечно, никаких возвышенных слов о совпадении нормализатора группы точек с группой точек схемного нормализатора там не произносилось. Чтобы не вводить дополнительные обозначения, ограничимся формулировкой в более простом случае $m\neq n$, нужном для доказательства основной теоремы.

Теорема 4. *Пусть R – любое коммутативное кольцо, $m,n\geqslant 3$, $m\neq n$,*

$$E=E(m,R)\otimes E(n,R),\qquad \Gamma=\mathrm{GL}(m,R)\otimes\mathrm{GL}(n,R),$$

$G=\mathrm{GL}(mn,R)$. Тогда

$$N_G(E)=N_G(\Gamma)=\mathrm{Tran}_G(E,\Gamma)=\mathrm{Tran}_G(E,N_G(E))=(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R).$$

Сделаем несколько замечаний по поводу доказательства этого факта. Очевидно, что $N_G(E),N_G(\Gamma)\leqslant\mathrm{Tran}_G(E,\Gamma)$. С другой стороны, пусть $gEg^{-1}\leqslant\Gamma$ для некоторого $g\in\mathrm{GL}(mn,R)$. Подгруппа gEg^{-1} является совершенной и, следовательно, *содержится* в E. Так как то же самое верно с заменой g на g^{-1}, то $gEg^{-1}=E$. Таким образом, $\mathrm{Tran}_G(E,\Gamma)\leqslant N_G(E)$ и, значит, $N_G(E)=\mathrm{Tran}_G(E,\Gamma)$.

Пусть теперь $g\in N_G(E)$. Тогда для любого $x\in E(m,R)$ имеем

$$g(x\otimes e)g^{-1}=\alpha(x)\otimes\beta(x)$$

для некоторых отображений

$$\alpha:E(m,R)\longrightarrow E(m,R),\quad \beta:E(m,R)\longrightarrow E(n,R).$$

Ясно, что на самом деле α, β являются гомоморфизмами, причем $\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta) = 1$.

Точно так же, для любого $y \in E(n, R)$ имеем

$$g(e \otimes y)g^{-1} = \gamma(y) \otimes \delta(y)$$

для некоторых гомоморфизмов

$$\gamma : E(n, R) \longrightarrow E(m, R), \qquad \delta : E(n, R) \longrightarrow E(n, R)$$

таких, что $\mathrm{Ker}(\gamma) \cap \mathrm{Ker}(\delta) = 1$.

Ясно, что

$$E(m, R) \otimes E(n, R) = g(E(m, R) \otimes e)g^{-1} \circ g(e \otimes E(n, R))g^{-1}.$$

В частности,

$$\alpha(E(m, R)), \gamma(E(n, R)) \trianglelefteq E(m, R), \quad \beta(E(m, R)), \delta(E(n, R)) \trianglelefteq E(n, R),$$

и, значит, имеют место следующие разложения в центральные произведения

$$E(m, R) = \alpha(E(m, R)) \circ \gamma(E(n, R)), \quad E(n, R) = \beta(E(m, R)) \circ \delta(E(n, R)).$$

Доказательство опирается на следующий результат, который, в свою очередь, является несложным следствием теоремы Уилсона–Голубчика о нормальном строении группы $\mathrm{GL}(n, R)$.

Лемма 3. *Пусть R коммутативно, а $n \geqslant 3$. Предположим, что $\mathrm{GL}(n, R)$ раскладывается в центральное произведение $\mathrm{GL}(n, R) = F \circ H$. Тогда кольцо R раскладывается в прямую сумму идеалов $R = A \oplus B$, причем*

$$E(n, R, A) \leqslant F \leqslant C(n, R, A), \qquad E(n, R, B) \leqslant H \leqslant C(n, R, B).$$

Рассмотрим, скажем, первое из них, второе рассматривается совершенно аналогично. Из леммы 5 мы знаем, что

$$E(m, R, A) \leqslant \alpha(E(m, R)) \leqslant C(m, R, A) \cap E(m, R),$$

для некоторого идеала $A \trianglelefteq R$, причем такого, который выделяется в R прямым слагаемым.

Случай $m \neq n$ сводится к описанию изоморфизмов между группами $E(m, A)$ и $E(n, B)$ где $A, B \trianglelefteq R$ – идеалы в R, выделяющиеся прямыми слагаемыми. Как хорошо известно, никаких таких изоморфизмов вообще нет, см. в частности, [18, 19, 42, 43].

Лемма 4. *Пусть $E(m,A)\cong E(n,B)$ для некоторых коммутативных колец A и B и $m,n\geqslant 3$. Тогда $m=n$.*

Замечание. Если, кроме того, $m\geqslant 4$ или $2\in A^*$, то автоматически $A\cong B$. Однако, какие-то оговорки такого рода необходимы, так как Петечук, Ли Фуань и Ли Дзунсянь построили изоморфизм $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\cong\mathrm{SL}(3,\mathbb{F}_2[d])$, где $\mathbb{F}_2[d]$ – кольцо двойных чисел над $\mathbb{F}_2$, $d^2=0$.

Это значит, что при $m\neq n$ для любого $g\in N_G(E)$ автоматически

$$g(E(m,R)\otimes e)g^{-1}=E(m,R)\otimes e,\quad g(e\otimes E(n,R))g^{-1}=e\otimes E(n,R),$$

как и утверждалось.

§8. Группа $E(m,n,R,A,B,C)$

Наши обозначения для элементарных трансвекций в $\mathrm{GL}(mn,R)$ соответствуют введенной в §4 поблочной индексации. Иными словами, при $(i,p)\neq(j,q)$ мы пишем $t^{ij}_{pq}(\xi)$ вместо

$$t_{(i-1)n+p,(j-1)n+q}(\xi)=e+\xi e_{ij}\otimes e_{pq}.$$

Сформулируем несколько важных технических утверждений, которые проверяются непосредственным вычислением. Как всегда, мы предполагаем, что $m,n\geqslant 3$.

Лемма 5. *Для идеала $A\trianglelefteq R$ имеет место равенство*

$$E(mn,R,A)=E(mn,A)^{E(m,R)\otimes E(n,R)}.$$

Пусть H – подгруппа в $\mathrm{GL}(mn,R)$, содержащая $E(m,R)\otimes E(n,R)$. Для $(i,p)\neq(j,q)$ положим

$$A^{ij}_{pq}=\{\xi\in R\mid t^{ij}_{pq}(\xi)\in H\}.$$

Очевидно, что все A^{ij}_{pq} являются аддитивными подгруппами. Покажем, что в действительности они являются идеалами. Чтобы не делать в дальнейшем оговорки $(i,p)\neq(j,q)$, положим $A^{ii}_{pp}=R$.

Лемма 6. *Для любых i,j,p,q подгруппа $A^{ij}_{pq}\trianglelefteq R$ является идеалом.*

Лемма 7. *Идеал A^{ij}_{pq} зависит не от самих i, j, p, q, а только от выполнения равенств $i = j$ и $p = q$.*

Так как равенства $i = j$ и $p = q$ не могут выполняться одновременно, из этой леммы сразу вытекают следующие утверждения.

• Все идеалы A^{ij}_{pq} при $i \neq j$ и $p \neq q$ равны между собой. Обозначим их общее значение через A.

• Все идеалы A^{ii}_{pq} при $p \neq q$ равны между собой. Обозначим их общее значение через B.

• Все идеалы A^{ij}_{pp} при $i \neq j$ равны между собой. Обозначим их общее значение через C.

Лемма 8. *Идеалы A, B, C связаны между собой следующим образом:*

$$mA, A^2 \leqslant B \leqslant A, \quad nA, A^2 \leqslant C \leqslant A.$$

Тройка идеалов (A, B, C), для которой выполняются сформулированные в лемме включения, будет называться **допустимой**.

С каждой допустимой тройкой можно связать соответствующую элементарную группу $\mathrm{EE}(m, n, R, A, B, C)$, содержащую $E(m, R) \otimes E(n, R)$. Она определяется как подгруппа, порожденная $E(m, R) \otimes E(n, R)$ и всеми элементарными трансвекциями $t^{ij}_{pq}(\xi)$, где $\xi \in A$ или $\xi \in B$ или $\xi \in C$, в зависимости от выполнения обоих неравенств $i \neq j$ и $p \neq q$, или одного из них:

$$\begin{aligned}&\mathrm{EE}(m, n, R, A, B, C)\\ &\qquad = \big(E(m, R) \otimes E(n, R)\big) \cdot \Big\langle t^{ij}_{pq}(\xi),\ (i, p) \neq (j, q), \xi \in A^{ij}_{pq}\Big\rangle.\end{aligned}$$

В соответствии с леммой 5 в случае $A = B = C$ эта группа совпадает с

$$\mathrm{EE}(m, n, R, A) = \big(E(m, R) \otimes E(n, R)\big) \cdot E(mn, R, A).$$

Так определенная группа $\mathrm{EE}(m, n, R, A, B, C)$ совершенна.

Предложение 3. *Пусть $m, n \geqslant 3$. Тогда для любой допустимой тройки (A, B, C) идеалов группа $\mathrm{EE}(m, n, R, A, B, C)$ совершенна.*

Одним из несложных, но важных шагов в доказательстве нашей основной теоремы является построение [нижнего] уровня подгруппы $H \geqslant E(m, R) \otimes E(n, R)$.

Теорема 5. *Пусть R – коммутативное кольцо, $m,n\geqslant 3$, а H – подгруппа в $\mathrm{GL}(mn,R)$, содержащая $E(m,R)\otimes E(n,R)$. Тогда существует наибольшая допустимая тройка (A,B,C) такая, что*

$$\mathrm{EE}(m,n,R,A,B,C)\leqslant H.$$

При этом, если $t_{pq}^{ij}(\xi)\in H$ для некоторых $(i,p)\neq(j,q)$, то имеет место включение $\xi\in A$ при $i\neq j$, $p\neq q$, $\xi\in B$, если $p\neq q$, и, наконец, $\xi\in C$, если $i\neq j$.

§9. Группа $C(m,n,R,A,B,C)$

В предыдущем параграфе мы определили левые части фигурирующих в нашей основной теореме включений

$$E(m,n,R,A,B,C)\leqslant H\leqslant C(m,n,R,A,B,C).$$

Нам нужно еще определить их правые части.

Для ключевого случая $A=B=C$ сделать это совсем просто. А именно, рассмотрим гомоморфизм редукции

$$\rho_A:\mathrm{GL}(mn,R)\longrightarrow\mathrm{GL}(mn,R/A)$$

и обозначим через $C(m,n,R,A)$ полный прообраз $(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R)$ относительно ρ_A.

Иными словами, для любого коммутативного кольца имеет место равенство

$$C(m,n,R,A)=\Big\{(g_{pq}^{ij})\in\mathrm{GL}(mn,R)\mid g_{pq}^{ij}g_{rs}^{kl}\equiv g_{rs}^{ij}g_{pq}^{kl}\pmod{A}\Big\}.$$

Для краткости мы полагаем $G=\mathrm{GL}(mn,R)$.

Теорема 6. *Для любого идеала $A\trianglelefteq R$ и любых $m,n\geqslant 3$, $m\neq n$, имеет место равенство*

$$N_G(E(m,n,R,A))=C(m,n,R,A).$$

Однако в случае, когда $B<A$ или $C<A$, нужны дополнительные довольно хитрые сравнения.

Пусть, например, $C < A$. В этом случае для произвольного упорядоченного семейства из n пар индексов

$$\Omega = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_n, j_n)\}, \quad 1 \leqslant i_k, j_k \leqslant m,$$

и матрицы $g \in M(mn, R) = M(m, M(n, R))$ рассмотрим

$$\operatorname{dett}(g, \Omega) = \det(\sum_{p=1}^{n} e_{pp} g^{i_p j_p}).$$

На упорядоченном наборе из n элементов естественным образом действует длинный цикл $\sigma = (1\,2\,\ldots\,n)$. Определим

$$\operatorname{req}(g, \Omega) = n \operatorname{dett}(g, \Omega) - \sum_{p=1}^{n} \operatorname{dett}(g, \sigma^p \Omega)$$

Ясно, что для матрицы $a \in C(m, n, R, A)$ выполнено включение $\operatorname{req}(g, \Omega) \in A$ для всех Ω. Однако для матриц нормализующих $E(m, n, R, A, B, C)$ выполнено более точное сравнение.

Лемма 9. *Пусть $g \in C(m, n, R, A)$ такова, что $\operatorname{req}(g, \Omega) \in C$ для всех возможных Ω. Тогда это верно и для любого*

$$h \in \Big\langle g, \operatorname{EE}(m, n, R, A, B, C) \Big\rangle.$$

By the same token, в случае $B < A$ нужно дополнительно постулировать сравнения $\operatorname{req}(g, \Sigma) \in B$ для функций $\operatorname{req}(g, \Sigma)$, определенных аналогичным образом в терминах семейств

$$\Sigma = \{(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots, (p_m, q_m)\}, \quad 1 \leqslant p_h, q_h \leqslant n,$$

с заменой верхних индексов на нижние.

Группа $C(m, n, R, A, B, C)$ определяется теперь следующим образом:

$$C(m, n, R, A, B, C) = \Big\{ g \in C(m, n, R, A) \mid \operatorname{req}(g, \Sigma) \in B,\ \operatorname{req}(g, \Omega) \in C \Big\},$$

с выполнением сравнений для всех семейств Σ и Ω.

§10. Стабилизация столбца

Воспроизведем из работы Алексея Степанова и второго автора [37, с. 127–129] трюк, связанный с одновременной стабилизацией m столбцов матрицы степени $n \geqslant m+2$. В работе [8] упоминается, как упростить и обобщить это вычисление с использованием грассмановых координат.

Пусть $x \in M(n,m,R)$, $J \subseteq \underline{m} = \{1,\dots,m\}$ и $I \subseteq \underline{n} = \{1,\dots,n\}$. Если $|I| = |J| = l$, обозначим через $\Delta_I^J(x)$ минор порядка l матрицы x, стоящий на пересечении строк с номерами из I и столбцов с номерами из J. Иными словами,

$$\Delta_I^J(x) = \det\left(x_{ij}\right)_{i\in I, j\in J}.$$

Зафиксируем теперь матрицу $x \in M(n,m,R)$. Зафиксируем, кроме того, $(m+1)$-элементное подмножество L. В дальнейшем нам нужно будет, кроме того, требовать, чтобы L не содержало фиксированный индекс r, именно поэтому мы вынуждены накладывать требование $n \geqslant m+2$. Следующее утверждение, которое сразу следует из теоремы Лапласа, представляет собой лемму 9 работы [37].

Лемма 10. *Столбец $w = (w_s)$, компоненты которого определяются формулой*

$$w_s = \begin{cases} (-1)^{\rho(L,h)}\Delta_{L\setminus\{s\}}^{\underline{m}}(x), & s \in L, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

ортогонален ко всем столбцам (x_{*j}), $1 \leqslant j \leqslant m$.

Изготовим теперь из фиксированного столбца g_{*q}^{*j}, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant q \leqslant n$, матрицы $g \in \mathrm{GL}(mn,R)$ матрицу $x = x(j,q) \in M(n,m,R)$ по следующему правилу:

$$x_{pi} = g_{pq}^{ij}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Расмотрим теперь матрицу

$$\prod T_{qs}\Big((-1)^{\rho(L,h)}\Delta_{L\setminus\{s\}}^{\underline{m}}(x)\Big)g,$$

где произведение берется по какому-то $m+1$ элементному подмножеству множества $\underline{n} = \{1,\dots,n\}$, не содержащему q. Согласно лемме 9

при этом происходит одновременная стабилизация всех столбцов матрицы x или, что то же самое, столбец g^{*j}_{*q} матрицы g не меняется. Это значит, что q-й столбец в j-полосе в матрице

$$g^{-1}\prod T_{rs}((-1)^{\rho(L,h)}\Delta^{m}_{L\setminus\{s\}}(x))g,$$

совпадает с соответствующим столбцом единичной матрицы степени mn.

§11. План доказательства основной теоремы

Общий план доказательства в целом аналогичен тому, который используется в [4, 9–11, 16, 34]. Дополнительный нюанс состоит в том, что (как и в [7, 12, 27]) обычная редукция уровня позволяет доказать лишь *слабую* форму включений, которую потом приходится уточнять непосредственным вычислением.

А именно, ключевым шагом в доказательстве нашей основной теоремы является следующая ее слабая форма.

Теорема 7. *Пусть R – коммутативное кольцо, а $m, n \geqslant 3$, причем $n \geqslant m+2$. Тогда для любой промежуточной подгруппы H,*

$$E(m,R)\otimes E(n,R)\leqslant H\leqslant \mathrm{GL}(mn,R),$$

существует единственная допустимая тройка (A,B,C) идеалов кольца R такая, что

$$E(m,n,R,A,B,C)\leqslant H\leqslant C(m,n,R,A).$$

В свою очередь, стандартными рассуждениями (редукция уровня) доказательство теоремы 7 сводится к доказательству следующего результата.

Основная лемма. *Пусть R – коммутативное кольцо, а $m, n \geqslant 3$, причем $n \geqslant m+2$. Предположим, что промежуточная подгруппа H,*

$$E(m,R)\otimes E(n,R)\leqslant H\leqslant \mathrm{GL}(mn,R),$$

не содержится в $(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R)$. Тогда группа H содержит нетривиальную трансвекцию.

С другой стороны, доказательство основной леммы начинается с многократного применения описанной в предыдущем параграфе стабилизации столбцов. А именно, мы можем продолжить описанную там

процедуру и стабилизировать *одноименные* столбцы в других вертикальных полосах, а именно, столбцов g^{*h}_{*q}, $1 \leqslant h \leqslant m$. Это можно сделать потому, что при стабилизации столбца с номером q в какой-то вертикальной полосе в тех из столбцов с номером q в других вертикальных полосах, которые уже совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы, вообще никаких нетривиальных прибавлений не происходит.

Завершая этот процесс, мы получим матрицу, в которой столбцы с номером q во *всех* вертикальных полосах совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы. Иными словами, после перестановки столбцов и строк от разбиения на $m\times m$ блоков размера $n\times n$ к разбиению на $n\times n$ блоков размера $m\times m$ такая матрица будет (при $j=1$) иметь вид

$$z=\begin{pmatrix} e & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

То, что из матриц такого вида извлекаются все трансвекции, известно, см., например, лемму работы [14].

После этого начинается самая технически трудная часть работы, собственно доказательство *основной леммы*. Пусть $g\in H$, где H – некоторая подгруппа в $\mathrm{GL}(mn,R)$, содержащая $E(m,R)\otimes E(n,R)$, причем $g\notin(\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n)(R)$. Проблема заключается в том, чтобы понять, почему не может случиться, что *все* матрицы z указанного выше вида, получающиеся стабилизацией одноименных столбцов во всех полосах, являются одновременно единичными? Оказывается, однако, что если это так, то уже сама матрица g лежит в подходящей параболической подгруппе и из нее самой извлекаются трансвекции. Доказательство этого основано на многоступенчатых упражнениях, связанных с заменой в описанных выше вычислениях матрицы g на большие трансвекции $gT^{hk}(1)g^{-1}$ и $gT_{rs}(1)g^{-1}$, варьированием в них j и q и т.д. Каждый раз предположение, что получающаяся при стабилизации столбцов матрица z единичная, накладывает новые ограничения на исходную матрицу g. В конце концов оказывается, что этих ограничений достаточно, чтобы гарантировать, что в самой матрице g встречается достаточное количество нулевых элементов.

Доказательство сформулированных в теореме 7 включений завершается теперь при помощи обычной редукции уровня. В свою очередь, основная теорема выводится отсюда примерно так же, как сильная структурная теорема из слабой в работах [7, 12, 27]. А именно, если матрица $g \in C(m,n,R,A)$ не содержится в $C(m,n,R,A,B,C)$ – иными словами, не удовлетворяет сформулированным в §9 дополнительным сравнениям – то из леммы 9 можно вывести, что уровень группы $\langle g, E(m,n,R,A,B,C)\rangle$ строго больше, чем (A,B,C).

В заключение авторы благодарят Ли Шанчжы, Александра Лузгарева, Виктора Петрова, Алексея Степанова и Ю Хона за многочисленные чрезвычайно полезные обсуждения.

Литература

1. А. С. Ананьевский, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *О надгруппах* $E(m,R) \otimes E(n,R)$. I. *Уровни и нормализаторы* (в печати).
2. А. С. Ананьевский, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *О надгруппах* $E(m,R) \otimes E(n,R)$. II. *Случай* $n \geqslant m+2$ (в печати).
3. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом.* — Докл. АН СССР **267**, No. 4 (1982), 777–778.
4. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
5. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* — Докт. Дисс., Ленингр. Гос. Ун-т (1987), 1–334.
6. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и Анализ **19**, No. 5 (2007), 35–62.
7. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для группы Шевалле типа* F_4. — Алгебра и Анализ **20**, No. 4 (2008), 27–62.
8. Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман, *Поливекторное представление* GL_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 69–97.
9. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(2l,R)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
10. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l,R)$. — Алгебра и Анализ **15**, No. 3 (2003), 72–114.
11. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n,R)$. — Алгебра и Анализ **19**, No. 2 (2007), 10–51.
12. Н. А. Вавилов, А. К. Ставрова, *Основные редукции в задаче описания нормальных подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 30–52.
13. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер. No. 3 (2008), 51–95.
14. А. И. Короткевич, *Подгруппы полной линейной группы, содержащие элементарную группу в приводимом представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 227–233.

15. А. Ю. Лузгарев, *О надгруппах* $E(\mathrm{E}_6,R)$ *и* $E(\mathrm{E}_7,R)$ *в минимальных представлениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
16. А. Ю. Лузгарев, *Описание надгрупп* F_4 *в* E_6 *над коммутативным кольцом.* — Алгебра и анализ **20**, No. 6 (2008), 148–185.
17. А. Ю. Лузгарев, *Надгруппы исключительных групп.* — Канд. Дисс., СПб Гос. Ун-т (2008), 1–106.
18. В. М. Петечук, *Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами.* — Мат. Сб. **45** (1983), 527–542.
19. В. М. Петечук, *Гомоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами.* — Мат. заметки **46**, No. 5 (1989), 50–61.
20. В. А. Петров, *Надгруппы классических групп.* — Канд. Дисс., СПб Гос. Ун-т (2005), 1–129.
21. В. А. Петров, А. К. Ставрова, *Элементарные подгруппы изотропных редуктивных групп.* — Алгебра и Анализ **20**, 4 (2008), 160–188.
22. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами.* — Канд. Дисс. ЛГУ (1987), 1–112.
23. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **141**, No. 2 (1977), 235–253.
24. M. Aschbacher, *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* — Invent. Math. **76**, No. 3 (1984), 469–514.
25. A. Bak, *The stable structure of quadratic modules.* — Thesis, Columbia Univ. (1969).
26. A. Bak, *Nonabelian* K*-theory: The nilpotent class of* K_1 *and general stability.* — K-Theory **4** (1991), 363–397.
27. A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* II. *Normal subgroups.* — Algebra Colloquium (2009).
28. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and* K*-theory.* Springer, Berlin et al. (1989).
29. R. Hazrat, N. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
30. Li Shangzhi, *Overgroups in* $\mathrm{GL}(U\otimes W)$ *of certain subgroups of* $\mathrm{GL}(U)\otimes\mathrm{GL}(W)$. I. — J. Algebra **137**, No. 2 (1991), 338–368.
31. Li Shangzhi, *Overgroups in* $\mathrm{GL}(U\otimes W)$ *of certain subgroups of* $\mathrm{GL}(U)\otimes\mathrm{GL}(W)$. II. — Preprint (1997).
32. Li Shangzhi, $\mathrm{SL}(n,K)_L\otimes\mathrm{SL}(m,K)_R$ *over a skewfield* K. — Preprint (1997).
33. Li Shangzhi, *Subgroup structure of classical groups.* Shanghai Scientific & Technical Publ., Shanghai (1998), (in Chinese).
34. V. Petrov, *Overgroups of unitary groups.* — K-theory **29** (2003), 147–174.
35. A. Stepanov, *Nonstandard subgroups between* $E_n(R)$ *and* $\mathrm{GL}_n(A)$. — Algebra Colloquium **10**, No. 3 (2004), 321–334.
36. A. Stepanov, *Subring subgroups in symplectic and odd orthogonal group.* — (2008) (to appear).
37. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-theory **19** (2000), 109–153.
38. F. G. Timmesfeld, *Abstract root subgroups and quadratic actions. With an appendix by A. E. Zalesskii.* — Adv. Math. **142**, No. 1 (1999), 1–150.

39. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Nonassociative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., London et al. (1991), 219–335.
40. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como – 1993), Cambridge Univ. Press (1995), 233–280.
41. W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes.* Springer-Verlag, N.Y. et al. (1979).
42. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$. — Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 347–351.
43. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of quotients of* $\prod \mathrm{GL}(n_i)$. — Pacif. J. Math. **102** (1982), 221–233.
44. W. C. Waterhouse *Automorphisms of* $\det(X_{ij})$*: the group scheme approach.* — Adv. Math. **23**, 3 (1967), 613–620.
45. You Hong, *Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings.* — J. Algebra **282**, No. 1 (2004), 23–32.
46. You Hong, *Overgroups of classical groups over commutative group in linear group.* — Sci China, Ser. A **49**, No. 5 (2006), 626–638.

Ananievskiy A. S., Vavilov N. A., Sinchuk S. S. Overgroups of $E(m,R)\otimes E(n,R)$.

In the present paper we study subgroups $E(m,R)\otimes E(n,R)\leqslant H\leqslant G=\mathrm{GL}(mn,R)$, under assumption that the ring R is commutative, and $m,n\geqslant 3$. We define the group $\mathrm{GL}_m\otimes\mathrm{GL}_n$ by equations, calculate the normaliser of the group $E(m,R)\otimes E(n,R)$ and associate to each intermediate subgroup H a uniquely determined lower level (A,B,C), where A,B,C are ideals in R such that $mA,A^2\leqslant B\leqslant A$ and $nA,A^2\leqslant C\leqslant A$. Lower level specifies the largest elementary subgroup such that $E(m,n,R,A,B,C)\leqslant H$. The standard answer to this problem asserts that H is contained in the normaliser $N_G(E(m,n,R,A,B,C))$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

Поступило 10 июня 2000 г.