Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 364, 2009 г.

А. И. Назаров, Р. С. Пусев

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ В L_2–НОРМЕ С ВЕСОМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. Введение

Теория малых уклонений для норм гауссовских процессов интенсивно развивается в последние годы (см., например, обзоры [1–2]). Наиболее разработанным здесь является случай L_2-нормы. Пусть $X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, – гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $G(t,s) = \mathrm{E}\,X(t)X(s)$, $t,s \in [a,b]$, и пусть ψ – неотрицательная функция на $[a,b]$. Положим

$$\|X\|_\psi = \left(\int\limits_a^b X^2(t)\psi(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Нас интересует точная асимптотика при $\varepsilon \to 0$ величины $\mathrm{P}\{\|X\|_\psi \leqslant \varepsilon\}$. Неявное решение задачи было получено в [3]. Затем многие авторы, начиная с [4–6], занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях.

В силу разложения Кархунена–Лоэва имеет место равенство по распределению

$$\|X\|_\psi^2 = \int\limits_a^b X^2(t)\psi(t)\,dt = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \xi_k^2, \tag{1.1}$$

где ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, независимые стандартные гауссовские с.в., а $\lambda_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_k \lambda_k < \infty$, являются собственными значениями интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int\limits_a^b G(t,s)\sqrt{\psi(t)\psi(s)}f(s)\,ds, \quad t \in [a,b]. \tag{1.2}$$

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00159.

Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения при $\varepsilon \to 0$ вероятности $\mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\right\}$. Основная трудность заключается в том, что явные формулы для собственных значений известны лишь для немногих процессов (см. [7–9]). Если же известна достаточно точная асимптотика λ_n, то асимптотика вероятности малых уклонений с точностью до константы может быть получена с помощью теорем сравнения, установленных в [7].

В статьях [10–12] был разработан новый подход, позволяющий получать асимптотику малых уклонений в L_2-норме для гауссовских процессов, ковариация которых является функцией Грина самосопряженного дифференциального оператора из довольно широкого класса. Настоящая работа обобщает этот результат на случай взвешенных процессов.

Мы весьма признательны Я. Ю. Никитину за внимание и стимулирующие к работе беседы.

Напомним некоторые обозначения. Функция $G(t,s)$ называется функцией Грина краевой задачи для дифференциального оператора L, если она удовлетворяет граничным условиям и уравнению $LG = \delta(t-s)$.

Пространство $W_p^m(0,1)$ – это банахово пространство $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций y, у которых $y^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,1]$ и $y^{(m)} \in L_p(0,1)$.

2. Асимптотика с точностью до константы для взвешенных процессов

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор L порядка 2ℓ, определенный на пространстве $\mathcal{D}(L)$ функций, удовлетворяющих 2ℓ граничным условиям.

Лемма 2.1. *Пусть функция $\psi \in W_\infty^\ell(0,1)$ и $\psi > 0$ на $(0,1)$. Пусть $G(t,s)$ — функция Грина краевой задачи*

$$Lv = \mu v \quad \text{на} \quad [0,1], \quad v \in \mathcal{D}(L).$$

Тогда функция

$$\mathcal{G}(t,s) = \sqrt{\psi(t)\psi(s)}\,G(t,s) \tag{2.1}$$

является функцией Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}v \equiv \psi^{-1/2} L(\psi^{-1/2} v) = \mu v \quad \text{на} \quad [0,1], \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), \tag{2.2}$$

где пространство $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ состоит из функций v, удовлетворяющих условию

$$\psi^{-1/2}v \in \mathcal{D}(L). \tag{2.3}$$

Доказательство. Согласно равенству (2.1)

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(t)}}\mathcal{G}(t,s) = \sqrt{\psi(s)}G(t,s),$$

значит,

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}}\mathcal{G}(\cdot,s) \in \mathcal{D}(L).$$

Из определения оператора $\mathcal{L}$ следует

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(t,s) = \frac{\sqrt{\psi(s)}}{\sqrt{\psi(t)}}LG(t,s).$$

Вспоминая, что $LG(t,s) = \delta(t-s)$, получаем

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(t,s) = \delta(t-s).$$

Лемма доказана. □

Замечание 1. Задача (2.2)–(2.3) с помощью замены $y = \psi^{-1/2}v$ переписывается так:

$$Ly = \mu\psi y \quad \text{на} \quad [0,1], \quad y \in \mathcal{D}(L).$$

Теорема 2.2. *Пусть ковариационная функция $G_X(t,s)$ гауссовского процесса с нулевым средним $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, является функцией Грина самосопряженного оператора L порядка 2ℓ*

$$Lv \equiv (-1)^\ell v^{(2\ell)} + \Big(p_{\ell-1}v^{(\ell-1)}\Big)^{(\ell-1)} + \ldots + p_0 v; \tag{2.4}$$

$$p_m \in L_1(0,1), \quad m = 0,\ldots,\ell-2; \quad p_{\ell-1} \in L_\infty(0,1);$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} U_j^0(v) &\equiv v^{(k_j)}(0) + \sum_{k<k_j} \alpha_{jk}^0 v^{(k)}(0) = 0,\\ U_j^1(v) &\equiv v^{(k_j')}(1) + \sum_{k<k_j'} \alpha_{jk}^1 v^{(k)}(1) = 0, \end{aligned}\right\} \quad j = 1,\ldots,\ell, \tag{2.5}$$

где α^i_{jk} *– некоторые постоянные,*

$$0 \leqslant k_1 < \ldots < k_\ell \leqslant 2\ell - 1, \quad 0 \leqslant k'_1 < \ldots < k'_\ell \leqslant 2\ell - 1.$$

Предположим, что

$$\varkappa \equiv \sum_{j=1}^{\ell} (k_j + k'_j) < 2\ell^2.$$

Пусть функция $\psi \in W^\ell_\infty(0,1)$ *и* $\psi(x) > 0$, $x \in [0,1]$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}(\|X\|_\psi \leqslant \varepsilon) \sim \mathcal{C}\, \varepsilon^\gamma \exp\left(-\frac{2\ell - 1}{2} \left(\frac{\vartheta_\ell}{2\ell \sin \frac{\pi}{2\ell}} \right)^{\frac{2\ell}{2\ell-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{2\ell-1}} \right), \qquad (2.6)$$

где

$$\gamma = -\ell + \frac{\varkappa + 1}{2\ell - 1}, \quad \vartheta_\ell = \int_0^1 \psi^{1/(2\ell)}(x)\, dx,$$

$$\mathcal{C} = C_{\mathrm{dist}} \frac{(2\pi)^{\ell/2} (\pi/\vartheta_\ell)^{\ell\gamma} (\sin \frac{\pi}{2\ell})^{\frac{1+\gamma}{2}}}{(2\ell - 1)^{1/2} (\frac{\pi}{2\ell})^{1+\frac{\gamma}{2}} \Gamma^\ell(\ell - \frac{\varkappa}{2\ell})}. \qquad (2.7)$$

В (2.7) константа "расхождения" C_{dist} *задается формулой*

$$C_{\mathrm{dist}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{1/2}}{\left(\pi/\vartheta_\ell \cdot \left[n + \ell - 1 - \frac{\varkappa}{2\ell}\right]\right)^\ell},$$

где μ_n *– собственные значения краевой задачи*

$$Ly = \mu\psi y, \quad U^0_j(y) = 0, \quad U^1_j(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, числа λ_n в разложении (1.1) равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n – собственные числа краевой задачи

$$\mathcal{L}v \equiv \psi^{-1/2} L(\psi^{-1/2} v) = \mu v,$$

$$U^0_j(\psi^{-1/2} v) = 0, \quad U^1_j(\psi^{-1/2} v) = 0, \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Выражение для $\mathcal{L}v$ можно переписать так:

$$\mathcal{L}v = (-1)^\ell \left(\psi^{-1}v^{(\ell)}\right)^{(\ell)} + \left(q_{\ell-1}v^{(\ell-1)}\right)^{(\ell-1)} + \ldots + q_0 v,$$

причем $q_k \in L_1(0,1)$, $k = 0, \ldots, \ell-2$, $q_{\ell-1} \in L_\infty(0,1)$, $\psi^{-1} \in W_\infty^\ell(0,1)$, $\psi^{-1} > 0$ в силу условий на функцию ψ и функции p_k, $k = 0, \ldots, \ell-1$. Значит, мы вправе применить Предложение 7.2 [10], которое дает (2.6). □

Хотя мы написали "явное" выражение для C_{dist}, в общем случае вычисление этой константы представляет собой непростую задачу. Однако, если собственные функции ковариации случайного процесса могут быть выражены через элементарные или специальные функции, явные формулы для константы "расхождения" могут быть получены методом, разработанным в [11] (см. также [13]). В следующих разделах приводятся примеры таких процессов. В разделе 3 мы рассмотрим процессы, для которых собственные функции выражаются через тригонометрические функции. В разделах 4 и 5 исследуются процессы, собственные функции ковариации которых выражаются через функции Бесселя.

3. Процессы, связанные с тригонометрическими функциями

Пусть $u \leqslant 1$. Рассмотрим процесс $W_{(u)}(t) \equiv W(t) - utW(1)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $G_{W_{(u)}}(t,s) = s \wedge t - (2u-u^2)st$, то есть при $u \in (0,1]$ процесс $W_{(u)}$ совпадает по распределению с рассматриваемым на отрезке $[0,1]$ броуновским мостом из нуля в нуль длины $(2u-u^2)^{-1}$ (см., например, [14], 4.4.20). При $u = 1$ этот процесс совпадает со стандартным броуновским мостом, а при $u = 0$ – со стандартным винеровским процессом.

Теорема 3.1. *Пусть $a > 0$.*

(1) *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)} = B$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 \frac{B^2(t)}{(a^2+t^2)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}(1+a^2)^{1/4}(\operatorname{arcctg} a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\operatorname{arcctg} a)^2}{8a^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

(2) *Пусть* $u < 1$. *Тогда для "удлиненного" броуновского моста* $W_{(u)}$ *при* $\varepsilon \to 0$ *имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 \frac{W_{(u)}^2(t)}{(a^2+t^2)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\}$$
$$\sim \frac{4a^{1/2}(1+a^2)^{1/4}}{(1-u)\pi^{1/2}\operatorname{arcctg} a}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{(\operatorname{arcctg} a)^2}{8a^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Доказательство. Согласно Предложению 1.9 [11] и Лемме 2.1, числа λ_k в разложении (1.1) равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \frac{\mu y}{(a^2+t^2)^2} & \text{на } [0,1],\\ y(0)=y(1)=0, & \text{если } \ u=1,\\ y(0)=(y'+\tau y)(1)=0, & \text{если } \ u<1,\end{cases}$$

где $\tau = (1-u)^{-2}-1$. Из [15, 2.377], учитывая условие $y(0)=0$, получаем

$$y(t) = c\sqrt{t^2+a^2}\,\sin\left(\frac{\sqrt{\mu+a^2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right).$$

Второе граничное условие дает уравнение на собственные значения, из которого следует, что

$$\mu_k = \begin{cases} \left(\frac{ak\pi}{\operatorname{arcctg} a}\right)^2 - a^2, & \text{если } \ u=1,\\ \left(\frac{ax_k}{\operatorname{arcctg} a}\right)^2 - a^2, & \text{если } \ u<1,\end{cases}$$

где $x_1 < x_2 < \dots$ – положительные корни уравнения

$$\zeta\cos(\zeta) + \left[1+\tau(1+a^2)\right]\frac{\operatorname{arcctg} a}{a}\sin(\zeta) = 0.$$

Пользуясь Теоремой 1 [16], получаем утверждение теоремы при $u = 1$. В случае $u < 1$, с учетом Теоремы 2.2, достаточно показать, что

$$C_{\mathrm{dist}}^2 \equiv \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{ax_k}{\operatorname{arcctg} a}\right)^2 - a^2}{\left(\frac{a\pi}{\operatorname{arcctg} a}\left(k-\frac12\right)\right)^2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1-u)^2 a}. \tag{3.1}$$

Положим

$$F(\zeta) = \cos(\zeta) + \frac{\operatorname{arcctg} a}{a}\left[1 + \tau(1+a^2)\right]\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}.$$

По теореме Адамара о разложении на множители (см. [17, §8.2.4])

$$F(\zeta) \equiv F(0)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta^2}{x_k^2}\right).$$

Значит,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^2 - (\operatorname{arcctg} a)^2}{x_k^2} = \frac{F(\operatorname{arcctg} a)}{F(0)} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a(1-u)^2F(0)}. \tag{3.2}$$

Для вычисления бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^2}{\left(\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$ применим к функциям $F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta) = \cos(\zeta)$ теорему Иенсена (см. [17, §3.6.1]). При $|\zeta| = \pi k$ и $k \to \infty$

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightrightarrows 1. \tag{3.3}$$

При больших k в круге $|\zeta| < \pi k$ существует ровно $2k$ корней $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}, \dots, \pm\frac{(2k-1)\pi}{2}$ функции $\Psi(\zeta)$ и ровно $2k$ корней $\pm z_j$, $j = 1\dots,k$, функции $F(\zeta)$. Значит, с учетом (3.3),

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^2}{\left(\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|} = |F(0)|. \tag{3.4}$$

Из формул (3.2) и (3.4) получаем (3.1). □

Доказательство трех следующих теорем аналогично доказательству теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $a > 1$.

(1) *Для стандартного броуновского моста* $W_{(1)} = B$ *при* $\varepsilon \to 0$ *имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 \frac{B^2(t)}{(a^2-t^2)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\}$$
$$\sim \frac{4}{\pi^{1/2}(a^2-1)^{1/4}\left(\ln\frac{a+1}{a-1}\right)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a-1}\right)^2}{32a^2}\varepsilon^{-2}\right).$$

(2) Пусть $u < 1$. Тогда для “удлиненного” броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 \frac{W_{(u)}^2(t)}{(a^2-t^2)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{8(a^2-1)^{1/4}a^{1/2}}{(1-u)\pi^{1/2}\ln\frac{a+1}{a-1}}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a-1}\right)^2}{32a^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 3.3. *Пусть $a > 0$.*

(1) *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)} = B$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 \frac{B^2(t)}{(t+a)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{(a+1)^{1/4}a^{1/4}\pi^{1/2}\left(\ln\frac{a+1}{a}\right)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a}\right)^2}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

(2) *Пусть $u < 1$. Тогда для “удлиненного” броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 \frac{W_{(u)}^2(t)}{(t+a)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4(a+1)^{1/4}}{(1-u)a^{1/4}\pi^{1/2}\ln\frac{a+1}{a}}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a}\right)^2}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 3.4. *Пусть $a > 0$.*

(1) *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)} = B$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 \frac{B^2(t)}{(t+a)^4}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{(a(a+1))^{-2}}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

(2) *Пусть $u < 1$. Тогда для “удлиненного” броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 \frac{W_{(u)}^2(t)}{(t+a)^4}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4a^{1/2}(a+1)^{3/2}}{(1-u)\pi^{1/2}} \cdot \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{(a(a+1))^{-2}}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

4. Процессы второго порядка, связанные с функциями Бесселя

Необходимые сведения о функциях Бесселя, используемые в §§4–5, можно найти, например, в [18, глава 8].

Теорема 4.1. *Пусть $a > 0$ и $\beta \neq 0$.*

(1) *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)} = B$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 (t+a)^{2\beta-2}B^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim (a(a+1))^{(\beta-1)/4} \cdot \left(\frac{\beta}{(a+1)^\beta - a^\beta}\right)^{1/2} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\left((a+1)^\beta - a^\beta\right)^2}{8\beta^2}\,\varepsilon^{-2}\right). \quad (4.1)$$

(2) *Пусть $u < 1$. Тогда для “удлиненного” броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 (t+a)^{2\beta-2}W_{(u)}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{(a(a+1)^{-1})^{(\beta-1)/4}\beta}{(1-u)\left((a+1)^\beta - a^\beta\right)} \cdot \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\left((a+1)^\beta - a^\beta\right)^2}{8\beta^2}\,\varepsilon^{-2}\right). \quad (4.2)$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, числа λ_k в разложении (1.1) равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \mu(t+a)^{2\beta-2}y & \text{на } [0,1], \\ y(0) = y(1) = 0, & \text{если } u = 1, \\ y(0) = (y' + \tau y)(1) = 0, & \text{если } u < 1, \end{cases}$$

где $\tau = (1-u)^{-2} - 1$.

Общее решение этого уравнения ([18, 8.491.11])

$$y(t) = c_1\sqrt{t+a}J_{\frac{1}{2|\beta|}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}(t+a)^{\beta}\right) + c_2\sqrt{t+a}N_{\frac{1}{2|\beta|}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}(t+a)^{\beta}\right),$$

где J_ν и N_ν – функции Бесселя порядка ν первого и второго рода соответственно.

Далее доказательство будет проведено для случая $u<1$, случай $u=1$ рассматривается аналогично и проще. Подставляя $y(t)$ в граничные условия, получаем уравнение на собственные значения, из которого следует, что $\mu_k = x_k^2$, где $x_1 < x_2 < \ldots$ – положительные корни функции

$$F(\zeta) = \det\begin{bmatrix} J_\nu\left(\frac{a^\beta\zeta}{\beta}\right) & \zeta J_\nu'\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right) + \frac{\tau(a+1)+\frac{1}{2}}{(a+1)^\beta}J_\nu\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right) \\ N_\nu\left(\frac{a^\beta\zeta}{\beta}\right) & \zeta N_\nu'\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right) + \frac{\tau(a+1)+\frac{1}{2}}{(a+1)^\beta}N_\nu\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right)\end{bmatrix},$$

где $\nu = \frac{1}{2|\beta|}$. Введем обозначение $\vartheta = \frac{(a+1)^\beta - a^\beta}{\beta}$. С учетом Теоремы 2.2, нам достаточно показать, что

$$C_{\text{dist}}^2 \equiv \prod_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^2\vartheta^2}{\left(\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = (1+\tau)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{(\beta-1)/2}. \tag{4.3}$$

Положим $\Psi(\zeta) = \cos(\vartheta\zeta)$. Тогда, учитывая, что при $\nu>0$ и $\zeta\to 0$

$$J_\nu(\zeta) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\nu}, \quad N_\nu(\zeta) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\nu}, \tag{4.4}$$

получаем

$$\frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|} = \frac{2\beta(1+\tau)(a+1)^{1/2}}{\pi a^{1/2}(a+1)^\beta}.$$

Заметим, что $F(-\zeta) = F(\zeta)$. Поскольку при $\Re(\zeta) \geqslant 0$ и $|\zeta|\to\infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} J_\nu(\zeta) =& \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\cos\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)(1+O(|\zeta|^{-1})), \\ N_\nu(\zeta) =& \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)(1+O(|\zeta|^{-1})), \end{aligned} \tag{4.5}$$

при $|\zeta| = \pi k/\vartheta$ и $k \to \infty$ прямым вычислением получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2\beta}{a^{\beta/2}(a+1)^{\beta/2}\pi}.$$

Применяя теорему Иенсена к функциям $F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, получаем (4.3). Теорема доказана. □

Замечание 2. Полагая в соотношениях (4.1)–(4.2) $\beta = -1$, получаем утверждение Теоремы 3.4, а переходя к пределу при $\beta \to 0$ – утверждение Теоремы 3.3. Отметим, что получить асимптотику малых уклонений в L_2-норме для процессов $t^\theta W_{(u)}(t)$ (см. [11, Теорема 3.3]) формальным переходом к пределу при $a \to 0$ не удается.

Обозначим $\overset{\circ}{U}_{(\alpha)}(t)$ процесс Орнштейна-Уленбека, выходящий из нуля, то есть гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $G_{\overset{\circ}{U}_{(\alpha)}}(t,s) = (e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)})/(2\alpha)$.

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $q \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 e^{2qt}\overset{\circ}{U}{}^2_{(\alpha)}(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}\,\frac{4q}{\sqrt{\pi}(e^q-1)}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{(e^q-1)^2}{8q^2}\,\varepsilon^{-2}\right). \tag{4.6}$$

Теорема 4.2 доказывается аналогично теореме 4.1.

Замечание 3. Полагая в соотношении (4.6) $\alpha = 0$, получаем утверждение Теоремы 3.5 [11], а переходя к пределу при $q \to 0$, получаем утверждение Следствия 3 [13].

Обозначим $U_{(\alpha)}(t)$ стационарный процесс Орнштейна-Уленбека, то есть гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $G_{U_{(\alpha)}}(t,s) = e^{-\alpha|t-s|}/(2\alpha)$.

Теорема 4.3. *Пусть $\alpha > 0$ и $q \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 e^{2qt}U^2_{(\alpha)}(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim 8\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}\left(\frac{q}{e^q-1}\right)^{3/2}\cdot\varepsilon^2\cdot\exp\left(-\frac{(e^q-1)^2}{8q^2}\,\varepsilon^{-2}\right). \tag{4.7}$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, числа λ_k в разложении (1.1) равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} y'' - (\alpha^2 - \mu e^{2qt})y = 0 & \text{на } [0,1], \\ (y' - \alpha y)(0) = (y' + \alpha y)(1) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Поскольку в этом случае $\varkappa = 2\ell^2$, общая формула (2.6) не применима. Рассмотрим приближенную последовательность собственных значений $\tilde{\mu}_1 = \vartheta^{-2}$, $\tilde{\mu}_k = \vartheta^{-2}(\pi(k-1))^2$, $k \geqslant 2$ (параметр ϑ выберем позже). Тогда по теореме сравнения Ли [7] при малых ε

$$\mathrm{P}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-1}\xi_j^2 \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \vartheta\mu_1^{1/2} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\vartheta\mu_k^{1/2}}{\pi(k-1)}\, \mathrm{P}\left\{\xi_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{\pi^2 j^2} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^2\right\}, \tag{4.9}$$

(при условии, что бесконечное произведение сходится), где ξ_0 – стандартная нормальная с.в., не зависящая от $\{\xi_k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

В [10, Предложение 6.4] было получено, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathrm{P}\left\{\xi_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{\pi^2 j^2} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^2\right\} \sim \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^{-2}\right).$$

Остается вычислить константу “расхождения”

$$\widetilde{C}_{\mathrm{dist}} \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^{1/2}}{\tilde{\mu}_k^{1/2}} = \vartheta\mu_1^{1/2} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{\vartheta\mu_k^{1/2}}{\pi(k-1)}.$$

Общее решение уравнения (4.8) (см. [15, 2.162 (12a)])

$$y(t) = c_1 J_\nu\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q} e^{qt}\right) + c_2 N_\nu\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q} e^{qt}\right),$$

где $\nu = \frac{\alpha}{|q|}$. Используя граничные условия, получаем, что $\sqrt{\mu_k}$ – положительные корни функции

$$F(\zeta) = \det\begin{bmatrix} \zeta J_\nu'\left(\frac{1}{q}\zeta\right) - \alpha J_\nu\left(\frac{1}{q}\zeta\right) & e^q\zeta J_\nu'\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) + \alpha J_\nu\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) \\ \zeta N_\nu'\left(\frac{1}{q}\zeta\right) - \alpha N_\nu\left(\frac{1}{q}\zeta\right) & e^q\zeta N_\nu'\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) + \alpha N_\nu\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) \end{bmatrix}.$$

В свою очередь, числа $\sqrt{\tilde{\mu}_k}$ являются положительными корнями функции

$$\Psi(\zeta) = \big((\vartheta\zeta)^2 - 1\big)\,\frac{\sin(\vartheta\zeta)}{\zeta}.$$

Из соотношений (4.5) следует, что при $\vartheta = (e^q - 1)/q$, $|\zeta| = \pi(k - \frac{1}{2})/\vartheta$ и $k \to \infty$

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2|q|e^{q/2}}{\pi\vartheta^2}.$$

Кроме того,

$$\frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|} = \frac{4\alpha e^{\alpha}|q|}{\pi\vartheta}.$$

Применяя теорему Иенсена к функциям $F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, с учетом двух последних соотношений, получаем

$$\widetilde{C}_{\mathrm{dist}} = \frac{\sqrt{2\alpha\vartheta}e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 4. Соотношение (4.7) обобщает асимптотику вероятностей малых уклонений для процесса Орнштейна-Уленбека ([11, Предложение 2.1] и [13, Следствие 3]), которая получается из него предельным переходом при $q \to 0$.

Теорема 4.4. *Пусть* $q > 0$.

(1) *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^\infty \overset{\circ}{U}{}^2_{(\alpha)}(t)e^{-2qt}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{|\alpha|}{q}\right)}\cdot(2q\varepsilon)^{\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{q}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{8}(q\varepsilon)^{-2}\right). \tag{4.10}$$

(2) *Пусть* $\alpha > 0$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^\infty U^2_{(\alpha)}(t)e^{-2qt}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\alpha}{q}\right)}\cdot(2q\varepsilon)^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{q}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{8}(q\varepsilon)^{-2}\right). \tag{4.11}$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, λ_k в разложении (1.1) равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} y'' - (\alpha^2 - \mu e^{-2qt})y = 0 & \text{на } [0,\infty), \\ y(0) = 0,\ |y(+\infty)| < \infty & \text{для } \overset{\circ}{U}_{(\alpha)}, \\ (y' - \alpha y)(0) = 0,\ |y(+\infty)| < \infty & \text{для } U_{(\alpha)}. \end{cases}$$

Учитывая условие $|y(+\infty)| < \infty$, из [15, 2.162 (12a)] получаем

$$y(t) = cJ_{\frac{|\alpha|}{q}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q}e^{-qt}\right).$$

Из условия $y(0) = 0$ следует, что $\mu_k = (qx_k)^2$, где x_k обозначает k-й положительный корень функции Бесселя $J_{\frac{|\alpha|}{q}}(\zeta)$.

Из условия $(y' - \alpha y)(0) = 0$ следует, что $\mu_n = (q\check{x}_k)^2$, где $\check{x}_k$ обозначает k-й положительный корень уравнения

$$\zeta J'_{\frac{\alpha}{q}}(\zeta) + \frac{\alpha}{q}J_{\frac{\alpha}{q}}(\zeta) = 0.$$

Применяя Лемму 3.2 [11], получаем утверждение теоремы. □

Замечание 5. Полагая в соотношении (4.10) $\alpha = 0$, получаем утверждение Теоремы 3.4 [11].

Рассмотрим процесс $\widehat{W}(t) \equiv W(t) - t^{-1}\int_0^t W(s)\,ds$. Этот гауссовский процесс с нулевым средним был введен в [19], его ковариационная функция $G_{\widehat{W}}(t,s) = s^2/(3t) \wedge t^2/(3s)$.

Теорема 4.5. *Пусть $\beta > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 t^{2\beta-2}\widehat{W}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\}$$
$$\sim \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2\beta}\right)}\right)^{1/2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (2\beta\varepsilon)^{3(\beta-1)/(2\beta)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8\beta^2}\varepsilon^{-2}\right).$$

Доказательство. Согласно Предложению 5.3 [20] и Лемме 2.1, числа λ_k в разложении (1.1) равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' + \frac{2y}{t^2} = \mu t^{2\beta-2}y & \text{на } [0,1], \\ y(0) = (y'+y)(1) = 0. \end{cases}$$

Из [18, 8.491.12] с учетом условия $y(0) = 0$, следует

$$y(t) = c\sqrt{t}J_{\frac{3}{2\beta}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}t^{\beta}\right).$$

Используя второе граничное условие, получим $\mu_k = \beta^2 x_k^2$, где $x_1 < x_2 < \dots$ – положительные корни уравнения

$$\zeta J'_{\frac{3}{2\beta}}(\zeta) + \frac{3}{2\beta}J_{\frac{3}{2\beta}}(\zeta) = 0.$$

Применяя Лемму 3.2 [11], получаем утверждение теоремы. □

Замечание 6. Согласно Теореме 2.2, в случае, когда вес отделен от нуля, и его производные до некоторого порядка ограничены, показатель γ в асимптотике малых уклонений, имеющей вид

$$\mathcal{C}\varepsilon^{\gamma}\exp(-D\varepsilon^{-d}), \tag{4.12}$$

зависит только от порядка соответствующего дифференциального оператора и порядка граничных условий. В случае же, когда вес хотя бы в одной точке отрезка вырождается (обращается в нуль либо неограниченно возрастает), это, вообще говоря, не так. В [11, Теорема 3.3] была вычислена асимптотика малых уклонений в L_2-норме на $[0,1]$ для процессов $t^{\theta}B(t)$ и $t^{\theta}W(t)$ (частичные результаты были получены также в [21]). Как следует из [11] и Теоремы 4.5, асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом t^{θ} для процессов $B(t)$, $W(t)$ и $\widehat{W}(t)$ имеет вид (4.12), однако, в отличие от случая регулярного веса, показатель γ в ней зависит от параметра θ веса. Аналогичный эффект возникает и при неограниченном промежутке интегрирования (см. Теорему 4.4).

5. Интегрированные процессы, связанные с функциями Бесселя

Пусть $X(t)$, $t \in [0,1]$, – гауссовский процесс с нулевым средним. Пусть β_j, $j = 1,\dots,m$, равны 0 или 1. Обозначим через $X_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)$ m раз проинтегрированный процесс

$$X_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t) = (-1)^{\beta_1+\dots+\beta_m}\int\limits_{\beta_m}^{t}\dots\int\limits_{\beta_1}^{t_1} X(s)\,ds\,dt_1\dots dt_{m-1}.$$

Первые два примера связаны с процессом $\widehat{W}$.

Теорема 5.1. *При* $\varepsilon \to 0$ *имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 t^2\left(\widehat{W}_1^{[1]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4\cdot 2^{\frac14}}{3^{\frac12}}\exp\left(-\frac{2^{\frac13}}{4\cdot 3^{\frac13}}\varepsilon^{-\frac23}\right).$$

Доказательство. Согласно Теореме 2.1 [10] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases} y^{IV} - \left(\frac{2y'}{t^2}\right)' = \mu t^2 y \quad \text{на} \quad [0,1], \\ y(1) = 0, \ y'(0) = 0, \\ (y'' + y')(1) = 0, \\ \left(y''' - \frac{2y'}{t^2}\right)(0) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения (см. [15, 4.37])

$$y(t) = c_1 J_0(u) + c_2 N_0(u) + c_3 J_0(iu) + c_4 N_0(iu), \tag{5.1}$$

где $u = \frac23 \mu^{1/4} t^{3/2}$. Граничные условия дают уравнение на собственные значения, из которого следует, что $\mu_k = \left(\frac{3x_k}{2}\right)^4$, где $x_1 < x_2 < \ldots$ – положительные корни уравнения

$$\det\begin{bmatrix} J_0(\zeta) & N_0(\zeta) & J_0(i\zeta) & N_0(i\zeta) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ J_0(\zeta) & N_0(\zeta) & -J_0(i\zeta) & -N_0(i\zeta) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0,$$

которое при вещественных ζ равносильно уравнению $J_0(\zeta) = 0$. Применяя Лемму 3.2 [11], получаем утверждение теоремы. □

Теорема 5.2. *При* $\varepsilon \to 0$ *имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 t^2\left(\widehat{W}_1^{[0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2^{43/12}3^{1/6}}{\pi^{1/2}}\cdot\varepsilon^{\frac13}\cdot\exp\left(-\frac{2^{\frac13}}{4\cdot 3^{\frac13}}\varepsilon^{-\frac23}\right). \tag{5.2}$$

Доказательство. Согласно Теореме 2.1 [10] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases} y^{IV} - \left(\frac{2y'}{t^2}\right)' = \mu t^2 y \quad \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 0, \\ (y'' + y')(1) = 0, \\ (y''' - 2y')\,(1) = 0. \end{cases}$$

Подставляя формулу (5.1) в граничные условия, получим $\mu_k = \left(\frac{3x_k}{2}\right)^4$, где $x_1 < x_2 < \ldots$ – положительные корни уравнения

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ J_0(\zeta) & N_0(\zeta) & -J_0(i\zeta) & -N_0(i\zeta) \\ J_1(\zeta) & N_1(\zeta) & -iJ_1(i\zeta) & -iN_1(i\zeta) \end{bmatrix} = 0. \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) равносильно уравнению

$$F(\zeta) \equiv \det \begin{bmatrix} J_0(\zeta) + J_0(i\zeta) & N_0(\zeta) + N_0(i\zeta) + iJ_0(\zeta) \\ J_1(\zeta) + iJ_1(i\zeta) & N_1(\zeta) + iN_1(i\zeta) + iJ_1(\zeta) \end{bmatrix} = 0.$$

Перепишем выражение для $F(\zeta)$:

$$F(\zeta) = \begin{vmatrix} J_0(i\zeta) & N_0(\zeta) + iJ_0(\zeta) \\ iJ_1(i\zeta) & N_1(\zeta) + iJ_1(\zeta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_0(\zeta) & N_0(i\zeta) \\ J_1(\zeta) & iN_1(i\zeta) \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} J_0(i\zeta) & N_0(i\zeta) \\ iJ_1(i\zeta) & iN_1(i\zeta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_0(\zeta) & N_0(\zeta) + iJ_0(\zeta) \\ J_1(\zeta) & N_1(\zeta) + iJ_1(\zeta) \end{vmatrix}.$$

Положим $\Psi(\zeta) = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}(\zeta)\cos(\zeta)$. Из соотношений (4.5) следует, что при $|\zeta| = \pi k$ и $k \to \infty$

$$\frac{|\pi\zeta F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightrightarrows 1.$$

Применение теоремы Иенсена к функциям $\pi\zeta F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ дает

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^4}{\left(\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)\right)^4} = \left| \frac{(\pi\zeta F(\zeta))|_{\zeta=0}}{\Psi(0)} \right| = 2^{5/2}.$$

Используя теорему сравнения [7], получаем

$$\mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-1}\xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim 2^{5/4}\cdot \mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3\pi}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)^{-4}\xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\right\}.$$

Теорема 6.2 [10] дает (5.2). □

Среди дифференциальных уравнений высокого порядка в обширном справочнике [15] нам удалось обнаружить только одно уравнение 5.9, порождаемое различными проинтегрированными гауссовскими процессами с весом t^{-n}. Мы приведем пять примеров вычисления точных асимптотик, хотя их число легко можно было бы увеличить.

Обозначим $\mathfrak{V}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ матрицу Вандермонда

$$\mathfrak{V}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Положим, следуя [11],

$$\varepsilon_n = \left(\varepsilon\sqrt{n\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad \mathcal{D}_n = \frac{2n-1}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Теорема 5.3. *Пусть $u<1$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(W_{(u),n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\}$$
$$\sim \frac{2^{n/2}\cdot\pi^{(n-2)/4}\cdot n^{(n+2)/4}}{(0!1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det\mathfrak{V}(1,z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}}$$
$$\cdot\frac{\varepsilon_n^{1-\frac{n^2}{2}}}{(1-u)\sqrt{\mathcal{D}_n}}\cdot\exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{\varepsilon_n^2}\right). \quad (5.4)$$

Доказательство. Пусть сначала $u=0$. Согласно Теореме 2.1 [10] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_k=\mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases} (-1)^n y^{(2n)} = \mu t^{-n} y \quad \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \\ y^{(n)}(1) = y^{(n+1)}(1) = \dots = y^{(2n-1)}(1) = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Общее решение уравнения (см. [15, 5.9])

$$y(t) = t^{n/2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k H_n^{(1)}(2z^k \zeta t^{1/2}) + t^{n/2} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n+k} H_n^{(2)}(2z^k \zeta t^{1/2}), \qquad (5.6)$$

где $H_n^{(1,2)}$ – функции Ханкеля порядка n, $z = \exp(i\pi/n)$ и $\zeta = \mu^{1/(2n)}$. Подставляя $y(t)$ в граничные условия и учитывая разложение функций Бесселя в окрестности нуля [18, 8.402–8.403], получим $\mu_k = x_k^{2n}$, где $x_1 < x_2 < \dots$ – положительные корни уравнения

$$F(\zeta) \equiv \det \begin{bmatrix} \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) & -\mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) \\ A_1(\zeta) & A_2(\zeta) \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь

$$A_1(\zeta) = \begin{bmatrix} H_0^{(1)}(2\zeta) & H_0^{(1)}(2z\zeta) & \dots & H_0^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_1^{(1)}(2\zeta) & zH_1^{(1)}(2z\zeta) & \dots & z^{n-1}H_1^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n-1}^{(1)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix},$$

$$A_2(\zeta) = \begin{bmatrix} H_0^{(2)}(2\zeta) & H_0^{(2)}(2z\zeta) & \dots & H_0^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_1^{(2)}(2\zeta) & zH_1^{(2)}(2z\zeta) & \dots & z^{n-1}H_1^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n-1}^{(2)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix}.$$

Поскольку при $|\arg \zeta| < \frac{\pi}{2n}$ и $|\zeta| \to \infty$ имеют место соотношения

$$H_l^{(1,2)}(2z^k\zeta) = \sqrt{\frac{1}{\pi z^k \zeta}} \exp\left(\pm i \left[2z^k\zeta - \frac{\pi l}{2} - \frac{\pi}{4}\right]\right)\left(1 + O(|\zeta|^{-1})\right), \qquad (5.7)$$

действуя, как в [22, §4, Теорема 2], получаем

$$F(\zeta) = \frac{\exp(-2iz\zeta - 2iz^2\zeta - \dots - 2iz^{n-1}\zeta)}{\pi^{n/2} z^{n(n-1)/4} \zeta^{n/2}} \cdot \left(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})\right),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \det \begin{bmatrix} \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) & -\mathfrak{V}(0, 0, \dots, 0) \\ \Phi_1(\zeta) & \Phi_2(\zeta) \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1(\zeta) = \begin{bmatrix} e^{2i\zeta-\frac{i\pi}{4}} & 0 & \dots & 0 \\ e^{2i\zeta-\frac{i\pi}{2}-\frac{i\pi}{4}} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{2i\zeta-\frac{i\pi(n-1)}{2}-\frac{i\pi}{4}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_2(\zeta) = \begin{bmatrix} e^{-2i\zeta+\frac{i\pi}{4}} & e^{\frac{i\pi}{4}} & \dots & e^{\frac{i\pi}{4}} \\ e^{-2i\zeta+\frac{i\pi}{2}+\frac{i\pi}{4}} & ze^{\frac{i\pi}{2}+\frac{i\pi}{4}} & \dots & z^{n-1}e^{\frac{i\pi}{2}+\frac{i\pi}{4}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-2i\zeta+\frac{i\pi(n-1)}{2}+\frac{i\pi}{4}} & z^{n-1}e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}+\frac{i\pi}{4}} & \dots & (z^{n-1})^{n-1}e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}+\frac{i\pi}{4}} \end{bmatrix}.$$

Прямым вычислением получаем

$$|\Phi(\zeta)| = 2|\det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)})| \cdot |\det \mathfrak{V}(1, z, \dots, z^{n-1})| \cdot \left|\cos\left(2\zeta - \frac{\pi n}{4}\right)\right|.$$

Заметим, что (см., например, [11, Приложение])

$$|\det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)})| = n^{\frac{n}{2}}. \tag{5.8}$$

Положим $\delta = \frac{n-2}{4}$ и рассмотрим функцию (см. [11])

$$\Psi_\delta(\zeta) = \psi_\delta(2\zeta)\psi_\delta(2z\zeta)\dots\psi_\delta(2z^{n-1}\zeta),$$

где

$$\psi_\delta(\zeta) = \frac{\Gamma^2(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta+\frac{\zeta}{\pi})\Gamma(1+\delta-\frac{\zeta}{\pi})} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta^2}{(\pi(k+\delta))^2}\right).$$

Как было показано в [11, Лемма 1.3], при $|\zeta| = \frac{\pi}{2}(k+\delta+\frac{1}{2})$ и $k \to \infty$ равномерно по ζ, таким, что $|\arg\zeta| \leqslant \phi_0 < \pi$, выполнено соотношение

$$\psi_\delta(2\zeta) \sim \Gamma^2(1+\delta)\pi^{2\delta}(2\zeta)^{-2\delta-1}\cos(2\zeta - \pi(\delta+1/2)).$$

Учитывая также, что $|F(\zeta)| = |F(z\zeta)|$, при $|\zeta| = \frac{\pi}{2}(k+\delta+\frac{1}{2})$ и $k \to \infty$ получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\zeta|^{n(n-1)/2}|\Psi_\delta(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2^{n(n+2)/2}\cdot n^{n/2}\cdot|\det\mathfrak{V}(1, z, \dots, z^{n-1})|}{\Gamma^{2n}(1+\delta)\pi^{n(n-1)/2}}. \tag{5.9}$$

Поэтому, согласно теореме Иенсена,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^{2n}}{(\frac{\pi}{2}(k+\delta))^{2n}} = \frac{\Gamma^{2n}(1+\delta)\pi^{n(n-1)/2}|\tilde{F}(0)|}{2^{n(n+2)/2} \cdot n^{n/2} \cdot |\det \mathfrak{V}(1, z, \dots, z^{n-1})|},$$

где $\tilde{F}(\zeta) = F(\zeta)/\zeta^{n(n-1)/2}$.

Вычислим значение $\tilde{F}(\zeta)$ в нуле. Прибавляя левую половину матрицы, определяющей $F(\zeta)$, к правой, получаем

$$\tilde{F}(\zeta) = \det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) \cdot 2^n \cdot \\ \cdot \det \begin{bmatrix} J_0(2\zeta) & J_0(2z\zeta) & \dots & J_0(2z^{n-1}\zeta) \\ \frac{J_1(2\zeta)}{\zeta} & \frac{zJ_1(2z\zeta)}{\zeta} & \dots & \frac{z^{n-1}J_1(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{J_{n-1}(2\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \frac{z^{n-1}J_{n-1}(2z\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \dots & \frac{(z^{n-1})^{n-1}J_{n-1}(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta^{n-1}} \end{bmatrix}.$$

С учетом (4.4) и (5.8) получаем

$$|\tilde{F}(0)| = \frac{2^n|\det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)})|^2}{0!1!2!\dots(n-1)!} = \frac{(2n)^n}{0!1!2!\dots(n-1)!}.$$

По теореме сравнения [7]

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(W_{n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \\ \sim \frac{\Gamma^n(1+\delta)\cdot \pi^{(n^2-n)/4}\cdot n^{n/4}\cdot 2^{-n^2/4}}{(0!1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det \mathfrak{V}(1, z, \dots, z^{n-1})|)^{1/2}} \cdot \\ \cdot \mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}(k+\delta)\right)^{-2n}\xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\right\}.$$

Из [10, Теорема 6.2] получаем (5.4) при $u = 0$.

При $u \neq 0$, аналогично Предложению 1.9 [11], следует заменить в (5.5) граничное условие $u^{(n)}(1) = 0$ на $(u^{(n)} + \tau u^{(n-1)})(1) = 0$ (напомним, что $\tau = (1-u)^{-2} - 1$).

Соответственно, в матрицах $A_1(\zeta)$ и $A_2(\zeta)$ первые строки заменятся на

$$\left[H_0^{(1,2)}(2\zeta)+\tau\frac{H_1^{(1,2)}(2\zeta)}{\zeta}\quad H_0^{(1,2)}(2z\zeta)+\tau\frac{H_1^{(1,2)}(2z\zeta)}{z\zeta}\dots\right.$$
$$\left.H_0^{(1,2)}(2z^{n-1}\zeta)+\tau\frac{H_1^{(1,2)}(2z^{n-1}\zeta)}{z^{n-1}\zeta}\right]$$

Такая замена не влияет на соотношение (5.9), в то время как $|\tilde{F}(0)|$ умножается на $1+\tau=(1-u)^{-2}$. Это дает (5.4) в общем случае. $\square$

Замечание. Полагая в (5.4) $n=1$, получаем утверждение Теоремы 3.3(2) [11] в частном случае $\vartheta=-1$.

Теорема 5.4. *При $\varepsilon\to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(B_{n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt\leqslant\varepsilon^2\right\}$$
$$\sim\frac{2^{n/2}\cdot\pi^{(n-2)/4}\cdot n^{(n+2)/4}}{(1!1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det\mathfrak{V}(z^{-1},z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}}$$
$$\cdot\frac{\varepsilon_n^{-\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{\mathcal{D}_n}}\exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{\varepsilon_n^2}\right).\qquad(5.10)$$

Доказательство. Согласно [10, п. 5.2] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_k=\mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases}(-1)^n y^{(2n)}=\mu t^{-n}y\quad\text{на}\quad[0,1],\\ y(0)=y'(0)=\dots=y^{(n-2)}(0)=0,\\ y^{(n-1)}(0)=y^{(n-1)}(1)=0,\\ y^{(n+1)}(1)=y^{(n+2)}(1)=\dots=y^{(2n-1)}(1)=0.\end{cases}$$

Подставляя формулу (5.6) в граничные условия, аналогично Теореме 5.3 получим $\mu_k=x_k^{2n}$, где $x_1<x_2<\dots$ – положительные корни уравнения

$$F(\zeta)\equiv\det\begin{bmatrix}\mathfrak{V}(1,z^2,\dots,z^{2(n-1)}) & -\mathfrak{V}(1,z^2,\dots,z^{2(n-1)})\\ A_1(\zeta) & A_2(\zeta)\end{bmatrix}=0.$$

Здесь

$$A_1(\zeta) = \begin{bmatrix} H_1^{(1)}(2\zeta) & z^{-1}H_1^{(1)}(2z\zeta) & \dots & z^{-(n-1)}H_1^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_1^{(1)}(2\zeta) & zH_1^{(1)}(2z\zeta) & \dots & z^{n-1}H_1^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n-1}^{(1)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix},$$

$$A_2(\zeta) = \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(2\zeta) & z^{-1}H_1^{(2)}(2z\zeta) & \dots & z^{-(n-1)}H_1^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_1^{(2)}(2\zeta) & zH_1^{(2)}(2z\zeta) & \dots & z^{n-1}H_1^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n-1}^{(2)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, матрицы $A_1(\zeta)$ и $A_2(\zeta)$ лишь первой строкой отличаются от аналогичных матриц в предыдущей теореме. Так же, как в доказательстве Теоремы 5.3, при $|\arg\zeta| < \frac{\pi}{2n}$ и $|\zeta| \to \infty$ имеем

$$|F(\zeta)| = \frac{|\exp(-2iz\zeta - 2iz^2\zeta - \ldots - 2iz^{n-1}\zeta)|}{\pi^{n/2}|\zeta|^{n/2}}$$
$$\times\Big(2n^{n/2}\cdot|\det\mathfrak{V}(z^{-1}, z, \dots, z^{n-1})|\cdot\Big|\cos\Big(2\zeta - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{2n}\Big)\Big| + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

и потому при $\delta = \frac{n-2}{4} + \frac{1}{2n}$, $|\zeta| = \frac{\pi}{2}(k + \delta + \frac{1}{2})$ и $k \to \infty$ получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\zeta|^{1+n(n-1)/2}|\Psi_\delta(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2^{1+n(n+2)/2}n^{n/2}\cdot|\det\mathfrak{V}(z^{-1}, z, \dots, z^{n-1})|}{\Gamma^{2n}(1+\delta)\pi^{1+n(n-1)/2}}.$$

Вычислим значение $\tilde{F}(\zeta) = F(\zeta)/\zeta^{1+n(n-1)/2}$ в нуле:

$$\tilde{F}(\zeta) = \det\mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)})\cdot 2^n\cdot$$
$$\cdot\det\begin{bmatrix} \frac{J_1(2\zeta)}{\zeta} & \frac{J_1(2z\zeta)}{z\zeta} & \dots & \frac{J_1(2z^{n-1}\zeta)}{z^{n-1}\zeta} \\ \frac{J_1(2\zeta)}{\zeta} & \frac{zJ_1(2z\zeta)}{\zeta} & \dots & \frac{z^{n-1}J_1(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{J_{n-1}(2\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \frac{z^{n-1}J_{n-1}(2z\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \dots & \frac{(z^{n-1})^{n-1}J_{n-1}(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta^{n-1}} \end{bmatrix},$$

поэтому с учетом (4.4) и (5.8) получаем

$$|\tilde{F}(0)| = \frac{(2n)^n}{1!1!2!\dots(n-1)!}.$$

По теореме сравнения Ли и теореме Иенсена

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(B_{n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim \frac{\Gamma^n(1+\delta)\cdot \pi^{(n^2-n+2)/4}\cdot n^{n/4}\cdot 2^{-(n^2+2)/4}}{(1!1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det\mathfrak{V}(1,z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}(k+\delta)\right)^{-2n}\xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\right\}.$$

Применение Теоремы 6.2 [10] заканчивает доказательство. □

Замечание 8. Полагая в (5.10) $n = 1$, получаем утверждение Теоремы 3.3(1) [11] при $\vartheta = -1$.

Обозначим $\mathbb{B}_m$ "условный" проинтегрированный винеровский процесс, введенный в [23]:

$$\mathbb{B}_m(t) = (W_m^{[0,0,\dots,0]}(t)\Big|\; W_j^{[0,0,\dots,0]}(1) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m).$$

Теорема 5.5. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(\mathbb{B}_{n-1}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim \frac{2^{n/2}\cdot\pi^{(n-2)/4}\cdot n^{(n+2)/4}}{(n!(n+1)!\dots(2n-1)!\cdot|\det\mathfrak{V}(1,z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}}\cdot$$
$$\cdot\,\frac{\varepsilon_n^{1-\frac{3n^2}{2}}}{\sqrt{\mathcal{D}_n}}\exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{\varepsilon_n^2}\right),$$

Доказательство. Согласно [10, п. 5.3] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases}(-1)^n y^{(2n)} = \mu t^{-n} y \quad \text{на} \quad [0,1],\\ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0,\\ y(1) = y'(1) = \ldots = y^{(n-1)}(1) = 0.\end{cases}$$

Подставляя формулу (5.6) в граничные условия, аналогично Теореме 5.3 получим $\mu_k = x_k^{2n}$, где $x_1 < x_2 < \dots$ – положительные корни уравнения

$$F(\zeta) \equiv \det \begin{bmatrix} \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) & -\mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) \\ A_1(\zeta) & A_2(\zeta) \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь

$$A_1(\zeta) = \begin{bmatrix} H_1^{(1)}(2\zeta) & z^{-1}H_1^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-1})^{n-1}H_1^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_2^{(1)}(2\zeta) & z^{-2}H_2^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-2})^{n-1}H_2^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n^{(1)}(2\zeta) & z^{-n}H_n^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-n})^{n-1}H_n^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix},$$

$$A_2(\zeta) = \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(2\zeta) & z^{-1}H_1^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-1})^{n-1}H_1^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_2^{(2)}(2\zeta) & z^{-2}H_2^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-2})^{n-1}H_2^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n^{(2)}(2\zeta) & z^{-n}H_n^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-n})^{n-1}H_n^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix}.$$

Аналогично доказательству Теоремы 5.3, при $|\arg\zeta| < \frac{\pi}{2n}$ и $|\zeta| \to \infty$ имеем

$$|F(\zeta)| = \frac{|\exp(-2iz\zeta - 2iz^2\zeta - \dots - 2iz^{n-1}\zeta)|}{\pi^{n/2}|\zeta|^{n/2}} \times$$
$$\times\left(2n^{n/2} \cdot |\det \mathfrak{V}(z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-n})| \cdot \left|\cos\left(2\zeta - \frac{3\pi n}{4}\right)\right| + O(|\zeta|^{-1})\right).$$

Поскольку $|\det \mathfrak{V}(z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-n})| = |\det \mathfrak{V}(1, z, \dots, z^{n-1})|$, при $\delta = \frac{3n-2}{4}$, $|\zeta| = \frac{\pi}{2}(k + \delta + \frac{1}{2})$ и $k \to \infty$ получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\zeta|^{n^2+n(n-1)/2}|\Psi_\delta(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2^{(3n^2+2n)/2}n^{n/2} \cdot |\det \mathfrak{V}(1, z, \dots, z^{n-1})|}{\Gamma^{2n}(1+\delta)\pi^{(3n^2-n)/2}}.$$

Вычислим значение $\tilde{F}(\zeta) = F(\zeta)/\zeta^{n^2+n(n-1)/2}$ в нуле:

$$\tilde{F}(\zeta) = \det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) \cdot 2^n \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\zeta^{n(n-1)}} \cdot \det \begin{bmatrix} \frac{J_1(2\zeta)}{\zeta} & \frac{J_1(2z\zeta)}{z\zeta} & \dots & \frac{J_1(2z^{n-1}\zeta)}{z^{n-1}\zeta} \\ \frac{J_2(2\zeta)}{\zeta^2} & \frac{J_2(2z\zeta)}{(z\zeta)^2} & \dots & \frac{J_2(2z^{n-1}\zeta)}{(z^{n-1}\zeta)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{J_n(2\zeta)}{\zeta^n} & \frac{J_n(2z\zeta)}{(z\zeta)^n} & \dots & \frac{J_n(2z^{n-1}\zeta)}{(z^{n-1}\zeta)^n} \end{bmatrix}.$$

Предел этого отношения при $\zeta \to 0$ вычислен в Приложении. Окончательно получаем

$$|\tilde{F}(0)| = \frac{(2n)^n}{n!(n+1)!\dots(2n-1)!}.$$

По теореме сравнения Ли и теореме Иенсена

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 t^{-n}\left(\mathbb{B}_{n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim \frac{\Gamma^n(1+\delta)\cdot\pi^{(3n^2-n)/4}\cdot n^{n/4}\cdot 2^{-3n^2/4}}{(n!(n+1)!\dots(2n-1)!\cdot|\det\mathfrak{V}(1,z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}(k+\delta)\right)^{-2n}\xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\right\}.$$

Применяя Теорему 6.2 [10], получаем утверждение теоремы. □

Теорема 5.6. *Пусть $u < 1$ и $n \geqslant 2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 t^{-n}\left(W_{(u),n-1}^{[1,1,\dots,1]}(1-t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim \frac{2^{n/2}\cdot\pi^{n/4}\cdot n^{(n+2)/4}\cdot\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}}}{(1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det\mathfrak{V}(z^{-1},z,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}}\cdot$$
$$\cdot\,\frac{\varepsilon_n^{2-\frac{n^2}{2}}}{(1-u)\sqrt{\mathcal{D}_n}}\exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{\varepsilon_n^2}\right). \quad (5.11)$$

Доказательство. Пусть сначала $u = 0$. Согласно Теореме 2.1 [10] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases} (-1)^n y^{(2n)} = \mu t^{-n} y \quad \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, \\ y^{(n)}(0) = y^{(n-1)}(1) = 0, \\ y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \ldots = y^{(2n-1)}(1) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Подставляя формулу (5.6) в граничные условия и учитывая разложение функций Ханкеля в окрестности нуля, получим $\mu_k = x_k^{2n}$, где $x_1 < x_2 < \dots$ – положительные корни уравнения

$$F(\zeta) \equiv \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}(\zeta) & A_{22}(\zeta) \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & z^{2(n-1)} \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & z^{2(n-2)} & z^{4(n-2)} & \dots & z^{2(n-2)(n-1)} \\ 1 & 1-\frac{2}{n} & 1-\frac{4}{n} & \dots & 1-\frac{2(n-1)}{n} \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -z^2 & -z^4 & \dots & -z^{2(n-1)} \\ \hdotsfor{5} \\ -1 & -z^{2(n-2)} & -z^{4(n-2)} & \dots & -z^{2(n-2)(n-1)} \\ 1 & 1+\frac{2}{n} & 1+\frac{4}{n} & \dots & 1+\frac{2(n-1)}{n} \end{bmatrix},$$

$$A_{21}(\zeta) = \begin{bmatrix} H_1^{(1)}(2\zeta) & z^{-1}H_1^{(1)}(2z\zeta) & \dots & z^{-(n-1)}H_1^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_1^{(1)}(2\zeta) & zH_1^{(1)}(2z\zeta) & \dots & z^{n-1}H_1^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \hdotsfor{4} \\ H_{n-1}^{(1)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix},$$

$$A_{22}(\zeta) = \begin{bmatrix} H_1^{(2)}(2\zeta) & z^{-1}H_1^{(2)}(2z\zeta) & \dots & z^{-(n-1)}H_1^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ H_1^{(2)}(2\zeta) & zH_1^{(2)}(2z\zeta) & \dots & z^{n-1}H_1^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \\ \hdotsfor{4} \\ H_{n-1}^{(2)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z^{n-1}\zeta) \end{bmatrix}.$$

Аналогично доказательству Теоремы 5.3, при $|\arg\zeta| < \frac{\pi}{2n}$ и $|\zeta| \to \infty$ имеем

$$|F(\zeta)| = \frac{|\exp(-2iz\zeta - 2iz^2\zeta - \dots - 2iz^{n-1}\zeta)|}{|1-z^2|\pi^{n/2}|\zeta|^{n/2}}$$
$$\times\Big(4n^{n/2}\cdot|\det\mathfrak{V}(z^{-1},z,\dots,z^{n-1})|\cdot\Big|\cos\Big(2\zeta - \frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{2n}\Big)\Big| + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

и потому при $\delta = \frac{n-2}{4} - \frac{1}{2n}$, $|\zeta| = \frac{\pi}{2}(k+\delta+\frac{1}{2})$ и $k\to\infty$ получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\zeta|^{-1+n(n-1)/2}|\Psi_\delta(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2^{n(n+2)/2}n^{n/2}\cdot|\det\mathfrak{V}(z^{-1},z,\dots,z^{n-1})|}{|1-z^2|\Gamma^{2n}(1+\delta)\pi^{-1+n(n-1)/2}}. \tag{5.13}$$

Вычислим значение $\tilde{F}(\zeta) = F(\zeta)/\zeta^{-1+n(n-1)/2}$ в нуле. Прибавляя левую половину матрицы, определяющей $F(\zeta)$, к правой, меняя местами две средние строки и учитывая разложение функций Ханкеля в окрестности нуля, при $\zeta \to 0$ получаем

$$\tilde{F}(\zeta) = \det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)}) \cdot \frac{2^n i}{\pi} \times$$
$$\times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{J_1(2\zeta)}{\zeta} & \frac{zJ_1(2z\zeta)}{\zeta} & \dots & \frac{z^{n-1}J_1(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{J_{n-1}(2\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \frac{z^{n-1}J_{n-1}(2z\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \dots & \frac{(z^{n-1})^{n-1}J_{n-1}(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta^{n-1}} \end{bmatrix} + o(1),$$

поэтому с учетом (4.4) и (5.8) получаем

$$|\tilde{F}(0)| = \frac{(2n)^n}{\pi \cdot 1!2!\dots(n-1)!}.$$

По теореме сравнения Ли и теореме Иенсена

$$\mathrm{P}\left\{ \int_0^1 t^{-n} \left(W_{n-1}^{[1,1,\dots,1]}(1-t) \right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2 \right\} \sim$$
$$\sim \frac{|1-z^2|^{1/2} \Gamma^n(1+\delta) \cdot \pi^{(n^2-n)/4} \cdot n^{n/4} \cdot 2^{-n^2/4}}{(1!2!\dots(n-1)! \cdot |\det \mathfrak{V}(z^{-1}, z, \dots, z^{n-1})|)^{1/2}} \cdot$$
$$\cdot \mathrm{P}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}(k+\delta) \right)^{-2n} \xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2 \right\}.$$

Из [10, Теорема 6.2] получаем (5.11) при $u = 0$.

При $u \neq 0$, аналогично Предложению 1.9 [11], следует заменить в (5.12) граничное условие $u^{(n)}(0) = 0$ на $(u^{(n)} - \tau u^{(n-1)})(0) = 0$. Соответствующая замена последних строк в матрицах A_{11} и A_{12} не влияет на соотношение (5.13), в то время как $|\tilde{F}(0)|$ умножается на $1 + \tau = (1-u)^{-2}$. Это дает (5.11) в общем случае. $\square$

Обозначим $\overline{W}(t) \equiv W(t) - \int_0^1 W(s)\, ds$ центрированный винеровский процесс.

Теорема 5.7. *Пусть $n \geqslant 2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 t^{-n}\left(\overline{W}_{n-1}^{[0,0,\dots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\}$$
$$\sim \frac{2^{(n+2)/2}\cdot\pi^{(n-4)/4}\cdot n^{(n+2)/4}\cdot\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}}}{(1!2!\dots(n-1)!\cdot|\det\mathfrak{V}(1,z^{-2},z^2,\dots,z^{n-1})|)^{1/2}}$$
$$\cdot\frac{\varepsilon_n^{-\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{\mathcal{D}_n}}\exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{\varepsilon_n^2}\right),$$

Доказательство. Согласно [10, п. 5.4] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k — собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases}(-1)^n y^{(2n)} = \mu t^{-n} y \quad \text{на} \quad [0,1],\\ y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-3)}(0)=0,\\ y^{(n-2)}(0)=y^{(n-2)}(1)=0,\\ y^{(n)}(0)=y^{(n)}(1)=0,\\ y^{(n+2)}(1)=\ldots=y^{(2n-1)}(1)=0.\end{cases}$$

Подставляя формулу (5.6) в граничные условия, аналогично Теореме 5.6 получим $\mu_k = x_k^{2n}$, где $x_1 < x_2 < \ldots$ – положительные корни уравнения

$$F(\zeta)\equiv\det\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21}(\zeta) & A_{22}(\zeta)\end{bmatrix}=0.$$

Здесь матрицы A_{11} и A_{12} введены в доказательстве Теоремы 5.6,

$$A_{21}(\zeta)=\begin{bmatrix}H_2^{(1)}(2\zeta) & z^{-2}H_2^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-2})^{n-1}H_2^{(1)}(2z^{n-1}\zeta)\\ H_0^{(1)}(2\zeta) & H_0^{(1)}(2z\zeta) & \dots & H_0^{(1)}(2z^{n-1}\zeta)\\ H_2^{(1)}(2\zeta) & z^2H_2^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^2)^{n-1}H_2^{(1)}(2z^{n-1}\zeta)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ H_{n-1}^{(1)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(1)}(2z^{n-1}\zeta)\end{bmatrix},$$

$$A_{22}(\zeta)=\begin{bmatrix}H_2^{(2)}(2\zeta) & z^{-2}H_2^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{-2})^{n-1}H_2^{(2)}(2z^{n-1}\zeta)\\ H_0^{(2)}(2\zeta) & H_0^{(2)}(2z\zeta) & \dots & H_0^{(2)}(2z^{n-1}\zeta)\\ H_2^{(2)}(2\zeta) & z^2H_2^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^2)^{n-1}H_2^{(2)}(2z^{n-1}\zeta)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ H_{n-1}^{(2)}(2\zeta) & z^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z\zeta) & \dots & (z^{n-1})^{n-1}H_{n-1}^{(2)}(2z^{n-1}\zeta)\end{bmatrix}.$$

Аналогично доказательству Теоремы 5.3, при $|\arg\zeta| < \frac{\pi}{2n}$ и $|\zeta| \to \infty$ имеем

$$|F(\zeta)| = \frac{|\exp(-2iz\zeta - 2iz^2\zeta - \ldots - 2iz^{n-1}\zeta)|}{|1-z^2|\pi^{n/2}|\zeta|^{n/2}} \times \\ \times \Big(4n^{n/2} \cdot |\det \mathfrak{V}(1, z^{-2}, z^2, \ldots, z^{n-1})| \cdot \\ \cdot \left|\cos\left(2\zeta - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{2n}\right)\right| + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

и потому при $\delta = \frac{n-2}{4} + \frac{1}{2n}$, $|\zeta| = \frac{\pi}{2}(k + \delta + \frac{1}{2})$ и $k \to \infty$ получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\zeta|^{1+n(n-1)/2}|\Psi_\delta(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2^{2+n(n+2)/2}n^{n/2} \cdot |\det \mathfrak{V}(1, z^{-2}, z^2, \ldots, z^{n-1})|}{|1-z^2| \cdot \Gamma^{2n}(1+\delta)\pi^{1+n(n-1)/2}}.$$

Вычислим значение $\tilde{F}(\zeta) = F(\zeta)/\zeta^{1+n(n-1)/2}$ в нуле. Прибавляя левую половину матрицы, определяющей $F(\zeta)$, к правой, меняя местами две средние строки и учитывая разложение функций Ханкеля в окрестности нуля, при $\zeta \to 0$ получаем

$$\tilde{F}(\zeta) = \det \mathfrak{V}(1, z^2, \ldots, z^{2(n-1)}) \cdot \frac{2^{n+1}i}{\pi} \times \\ \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{J_0(2\zeta)}{\zeta^2} & \frac{J_0(2z\zeta)}{\zeta^2} & \ldots & \frac{J_0(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta^2} \\ \frac{J_2(2\zeta)}{\zeta^2} & \frac{z^2 J_2(2z\zeta)}{\zeta^2} & \ldots & \frac{(z^2)^{n-1}J_2(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{J_{n-1}(2\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \frac{z^{n-1}J_{n-1}(2z\zeta)}{\zeta^{n-1}} & \ldots & \frac{(z^{n-1})^{n-1}J_{n-1}(2z^{n-1}\zeta)}{\zeta^{n-1}} \end{bmatrix} + o(1),$$

поэтому с учетом (4.4) и (5.8) получаем

$$|\tilde{F}(0)| = \frac{4 \cdot (2n)^n}{\pi \cdot 1!2!\ldots(n-1)!}.$$

По теореме сравнения Ли и теореме Иенсена

$$\mathrm{P}\left\{\int_0^1 t^{-n}\left(\overline{W}_{n-1}^{[0,0,\ldots,0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \\ \sim \frac{|1-z^2|^{1/2} \cdot \Gamma^n(1+\delta) \cdot \pi^{(n^2-n)/4} \cdot n^{n/4} \cdot 2^{-n^2/4}}{(1!2!\ldots(n-1)! \cdot |\det \mathfrak{V}(1, z^{-2}, z^2, \ldots, z^{n-1})|)^{1/2}} \cdot \\ \cdot \mathrm{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}(k+\delta)\right)^{-2n}\xi_k^2 \leqslant \varepsilon^2\right\}.$$

Применение Теоремы 6.2 [10] заканчивает доказательство. □

Приложение

Обозначим $x = \zeta^2$, $f_k(x) = J_k(2\zeta)/\zeta^k$. Тогда для завершения доказательства Теоремы 5.5 требуется вычислить предел

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{n(n-1)}{2}}} \cdot \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_1(z^2x) & \dots & f_1(z^{2n-2}x) \\ f_2(x) & f_2(z^2x) & \dots & f_2(z^{2n-2}x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x) & f_n(z^2x) & \dots & f_n(z^{2n-2}x) \end{bmatrix}.$$

Согласно правилу Лопиталя,

$$A = \frac{1}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!} \cdot \frac{d^{\frac{n(n-1)}{2}}}{dx^{\frac{n(n-1)}{2}}} \det \left[\begin{bmatrix} f_1(x) & f_1(z^2x) & \dots & f_1(z^{2n-2}x) \\ f_2(x) & f_2(z^2x) & \dots & f_2(z^{2n-2}x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(x) & f_n(z^2x) & \dots & f_n(z^{2n-2}x) \end{bmatrix} \right]\Bigg|_{x=0}.$$

Несложно видеть, что при дифференцировании определителя ненулевые слагаемые возникнут, только когда все строчки дифференцируются различное число раз — от нуля до $n-1$. Таким образом, для каждой перестановки σ чисел $1, \dots, n$ возникнет слагаемое, содержащее произведение

$$f_1^{(\sigma_1 - 1)}(0) f_2^{(\sigma_2 - 1)}(0) \dots f_n^{(\sigma_n - 1)}(0). \tag{5.14}$$

С учетом порядка дифференцирования строк число способов получить любую такую комбинацию равно

$$\frac{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!}{0!1!\dots(n-1)!}.$$

После вынесения общих множителей (5.14) из строк остается определитель Вандермонда $\det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)})$ со знаком, определяемым четностью перестановки σ.

Итого получаем

$$A = \frac{\det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)})}{0!1!\dots(n-1)!} \cdot \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{k=1}^{n} f_k^{(\sigma_k - 1)}(0).$$

Последняя сумма, очевидно, представляет собой определитель

$$\det \begin{bmatrix} f_1(0) & f_1'(0) & \dots & f_1^{(n-1)}(0) \\ f_2(0) & f_2'(0) & \dots & f_2^{(n-1)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(0) & f_n'(0) & \dots & f_n^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}.$$

Поскольку $f_k^{(m)}(0) = \frac{(-1)^m}{(k+m)!}$, этот определитель перестановкой столбцов сводится к

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{1!} \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \dots & \frac{1}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \dots & \frac{1}{n!} \end{bmatrix} = \prod_{j=n}^{2n-1} \frac{1}{j!} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & n & n(n-1) & \dots & \frac{n!}{1!} \\ 1 & n+1 & (n+1)n & \dots & \frac{(n+1)!}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2n-1 & (2n-1)(2n-2) & \dots & \frac{(2n-1)!}{n!} \end{bmatrix}$$

Вычитая $(n-1)$-ю строку из n-й, затем $(n-2)$-ю из $(n-1)$-й, и т.д., и затем вынося из определителя $(n-1)!$, мы понижаем его порядок на единицу.

Продолжая этот процесс, получаем

$$A = \frac{\det \mathfrak{V}(1, z^2, \dots, z^{2(n-1)})}{n!(n+1)!\dots(2n-1)!}.$$

Литература

1. W. V. Li and Q. M. Shao, *Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications.* — Handbook Statist. **19** (2001), 533–597.
2. lat M. A. Lifshits, *Asymptotic behavior of small ball probabilities.* — Prob. Theor. Math. Stat. (1999), Proc. VII Int. Vilnius Conference, 453–468.
3. Г. Н. Сытая, *О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве.* — Теория случайных процессов **2** (1974), 93–104.
4. V. M. Zolotarev, *Gaussian measure asymptotics in l_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero.* — 12th Europ. Meeting of Statisticians (1979), P. 254.
5. R. M. Dudley, J. Hoffmann-Jørgensen, and L. A. Shepp, *On the lower tail of Gaussian seminorms.* — Ann. Probab. **7** (1979), 319–342.

6. И. А. Ибрагимов, *О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **85** (1979), 75–93.
7. W. V. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms.* — J. Theor. Probab. **5(1)** (1992), 1–31.
8. T. Dunker, M. A. Lifshits, and W. Linde, *Small deviations of sums of independent variables.* — Progr. Probab. **43** (1998), 59–74.
9. J.-R. Pycke, *Un lien entre le développement de Karhunen-Loève de certains processus gaussiens et le laplacien dans des espaces de Riemann.* — Thèse de doctorat de l'Université Paris 6 (2003).
10. A. I. Nazarov, and Ya. Yu. Nikitin, *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems.* — Prob. Theor. Rel. Fields. **129 (4)** (2004), 469–494.
11. А. И. Назаров, *О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов.* — Проблемы матем. анализа, **26** (2003), 179–214.
12. А. И. Назаров, *Точная асимптотика малых уклонений гауссовских процессов в L_2-норме и спектр краевых задач с нераспадающимися граничными условиями.* — SPbMS El. Prepr. Archive, N 2007–03, 25 c.
13. F. Gao, J. Hannig, T. -Y. Lee, and F. Torcaso, *Laplace transforms via Hadamard factorization with applications to small ball probabilities.* — Electron. J. Probab. **8 (13)** (2003), 1–20.
14. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* — Лань, СПб. (2000).
15. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — 6-е изд., Лань, СПб. (2003).
16. Я. Ю. Никитин, П. А. Харинский, *Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме для одного класса гауссовских процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 214–221.
17. Е. Титчмарш, *Теория функций.* — 2-е изд., Наука, М. (1980).
18. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* — 5-е изд., Наука, М. (1971).
19. M. L. Kleptsyna, and A. Le Breton, *A Cameron-Martin type formula for general Gaussian processes – a filtering approach.* — Stochastics Stochastics Rep. **72(3-4)** (2002), 229–250.
20. A. I. Karol, A. I. Nazarov, and Ya. Yu. Nikitin, *Tensor products of compact operators and logarithmic L_2-small ball asymptotics for Gaussian random fields.* — Università Bocconi, Studi Statistici, N 74 (2003). To appear in Trans. AMS.
21. P. Deheuvels and G. Martynov, *Karhunen-Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions.* — Progr. Probab. **55** (2003), 57–93.
22. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы.* — Изд.2, Наука, М. (1969).
23. A. Lachal, *Bridges of certain Wiener integrals. Prediction properties, relation with polynomial interpolation and differential equations. Application to goodness-of-fit testing.* — In: Bolyai Math. Studies X, Limit Theorems, Balatonlelle (Hungary), 1999. Budapest (2002), 1–51.

Nazarov A. I., Pusev R. S. Exact small deviation asymptotics in L_2-norm for some weighted Gaussian processes.

We find the exact small ball asymptotics under weighted L_2-norm for a wide class of Gaussian processes generating the boundary value problems for ordinary differential equations. Also the sharp constants in the asymptotics are derived for a number of processes connected with special functions.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: an@ AN4751.spb.edu, prs@ fromru.com

Поступило 27 февраля 2008 г.