Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 364, 2009 г.

А. Н. Бородин

О МОМЕНТЕ ПЕРВОГО ВЫХОДА ИЗ ИНТЕРВАЛА ДЛЯ ДИФФУЗИЙ СО СКАЧКАМИ

1. Диффузия со скачками. В работе рассматривается достаточно широкий класс диффузий со скачками, определенный в [1]. Основная задача состоит в том, чтобы получить результаты, позволяющие вычислять распределения фунционалов от диффузий со скачками, остановленных в момент выхода из интервала.

Для скачкообразных диффузий момент выхода может происходить либо посредством пересечения границы, либо посредством перескока. В связи с этим, можно выделить три типа результатов. Первый относится к случаю, когда мы не различаем, как происходит момент первого выхода скачкообразной диффузии из интервала. В этом случае для скачкообразных диффузий, осуществляющих скачки в соответствии с процессом Пуассона, в работе [2] был получен результат, позволяющий вычислять распределения фунционалов от диффузий, остановленных в момент выхода из интервала.

Второй тип результатов касается случая, когда момент выхода происходит посредством пересечения границы. И третий тип результатов связан со случаем, когда момент выхода происходит посредством перескока границы. При этом нужно принимать во внимание величину перескока.

Момент выхода процесса за границу области рассматривался многими авторами. Для диффузионных процессов, остановленных в момент выхода из области, результат, позволяющий вычислять распределения интегральных функционалов был получен Р. З. Хасьминским [3]. Для процессов с независимыми приращениями момент первого превышения заданного уровня изучался в работах Д. Бакстера и М. Донскера [4], В. М. Золотарева [5], в монографии А. В. Скорохода [6] и в работе Э. Мордецкого [7].

В настоящей работе приведены примеры применения полученных результатов. Для броуновского движения с экспоненциально распределенными скачками, происходящими в пуассоновские моменты времени, получены явные формулы для преобразования Лапласа совместного распределения момента выхода и величины перескока. Для случая, когда нет различия как происходит момент первого выхода, такой пример был рассмотрен в работе [2].

Перейдем к описанию класса скачкообразных диффузий.

Пусть $N(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс Пуассона с параметром 1. Процесс $N(t)$ может быть представлен в следующем виде

$$N(t) = \max\Big\{l : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\},$$

где τ_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром 1 случайные величины, $\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-t}$.

Пусть Y_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от процесса N. Предположим, что броуновское движение W не зависит от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим однородную диффузию X. Такая диффузия является решением стохастического дифференциального уравнения: с вероятностью единица для $x \in \mathbf{R}$ и любого $0 \leqslant t \leqslant T$

$$X(t) = x + \int_0^t \mu(X(u))\,du + \int_0^t \sigma(X(u))\,dW(u), \tag{1.1}$$

где функции $\mu(y)$, $\sigma(y)$ удовлетворяют условию Липшица, $\sigma(y) \neq 0$ для всех $y \in \mathbf{R}$.

Для неотрицательной кусочно непрерывной функции h момент

$$\varkappa_1 := \min\Big\{s : \int_0^s h(X(v))\,dv > \tau_1\Big\}$$

является моментом обратным к интегральному функционалу от диффузии X.

Обобщенная скачкообразная диффузия, обозначим ее J, определяется рекуррентно следующим образом. Пусть $\rho(x, y)$ – некоторая измеримая функция. Для $0 \leqslant t \leqslant \varkappa_1$ полагаем $J(t) = X(t)$, где X – решение уравнения (1.1). Для $l = 1, 2, \dots$ процесс J является решением стохастического дифференциального уравнения

$$J(t) = \rho\big(J(\varkappa_l-), Y_l\big) + \int_{\varkappa_l}^t \mu(J(u))\,du + \int_{\varkappa_l}^t \sigma(J(u))\,dW(u) \tag{1.2}$$

на промежутке времени $\varkappa_l \leqslant t < \varkappa_{l+1}$, где

$$\varkappa_{l+1} := \min\Big\{s \geqslant \varkappa_l : \int\limits_{\varkappa_l}^{s} h(J(v))\,dv > \tau_{l+1}\Big\}. \qquad (1.3)$$

Заметим, что $\varkappa_l = \sum\limits_{k=1}^{l} \tau_k$ при $h \equiv 1$.

В каждый момент $\varkappa_l$ скачкообразная диффузия J начинается заново как обычная диффузия X из точки $\rho\big(J(\varkappa_l-), Y_l\big)$.

Таким образом, обобщенная скачкообразная диффузия J характеризуется следующими параметрами: коэффициентом диффузии $\sigma(x)$ и сноса $\mu(x)$, функцией скачка $\rho(x,y)$, и случайными величинами Y_k, $k = 1, 2, \dots$, определяющими величины скачков, а также функцией $h(x)$, задающей меру времени между скачками.

Отметим, что выбрав $h(x) \equiv \lambda_1$, мы получаем диффузию, имеющую скачки через моменты $\widetilde{\tau}_k$, $k = 1, 2, \dots$, которые являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром λ_1.

Пусть

$$C(t) = \max\big\{l : \varkappa_l \leqslant t\big\}. \qquad (1.4)$$

Отметим, что процесс $C(t)$, $t \geqslant 0$, подобно процессу Пуассона, считает число скачков к моменту времени t, совершенных диффузией J, и $dC(t)$ равняется единице или нулю в зависимости от того принадлежит $\varkappa_l$ интервалу $[t, t+dt)$ для некоторого $l = 1, 2, \dots$ или нет.

Несложно убедиться, что $C(t) = N(A(t))$, где $A(t) := \int\limits_0^t h(J(v))\,dv$.

Диффузия J является решением уравнения

$$\begin{aligned} dJ(t) &= \mu(J(t))\,dt + \sigma(J(t))\,dW(t) + \\ &\quad + \big(\rho\big(J(t-), Y_{C(t)}\big) - J(t-)\big)dC(t), \qquad J(0) = x. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Пусть $G(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Справедливо следующее обобщение формулы Ито

$$\begin{aligned} dG(J(t)) = G'(J(t))(\mu(J(t))\,dt + \sigma(J(t))\,dW(t)) + \frac{\sigma^2(J(t))}{2} G''(J(t))\,dt + \\ + \big(G(\rho\big(J(t-), Y_{C(t)}\big)) - G(J(t-))\big)\,dC(t). \end{aligned} \qquad (1.6)$$

2. Момент первого выхода. Важное значение для различных приложений имеет момент $H_{a,b} := \min\{s : J(s) \notin (a,b)\}$, который является *моментом первого выхода* скачкообразного диффузионного процесса из интервала (a,b). Если начальное значение $x \notin (a,b)$, полагаем $H_{a,b} = 0$.

Рассмотрим задачу о вычислении распределений интегральных функционалов от скачкообразного диффузионного процесса, остановленного в момент времени $H_{a,b}$.

2.1. Начнем со случая, когда мы не различаем способ выхода через границу, т.е. выход осуществляется перескоком или пересечением. Следующий результат касается, по сути, преобразования Лапласа распределения неотрицательного интегрального функционала от скачкообразной диффузии, остановленной в момент выхода из интервала, т. е. функционала $\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds$. Для того, чтобы получить само распределение нужно применить этот результат для произведения $\gamma f(x)$, $\gamma > 0$, вместо $f(x)$, вычислить функцию $R(x)$, и затем обратить преобразование Лапласа по параметру γ.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессу J при условии $J(0) = x$. В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{I}_A\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, а Φ ограничена. Тогда функция*

$$R(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big);\, J(H_{a,b}) \geqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R(x) = \Phi(b)M_b(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \Phi(x)\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\mathbf{E}R(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{2.1}$$

где $M_b(x)$ является единственным решением задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M''(x) + \mu(x)M'(x) - (h(x) + f(x))M(x) = 0, \quad x \in (a,b), \tag{2.2}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1, \tag{2.3}$$

а $G_z(x)$ *является единственным непрерывным решением задачи*

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} G''(x) + \mu(x) G'(x) - (h(x) + f(x)) G(x) = 0, \quad x \in (a,b) \setminus \{z\}, \tag{2.4}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2h(z)/\sigma^2(z), \tag{2.5}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0, \tag{2.6}$$

и $G_z(x) = 0$ *при* $x, z \notin (a,b)$.

Доказательство. Положим

$$M_b(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int_0^{H_{a,b}} (h(X(s))) + f(X(s)))\, ds \Big); X(H_{a,b}) = b \Big\}.$$

Тогда $M_b(x)$ при $x \in (a,b)$ является (см. [3]) решением задачи (2.2), (2.3).

Положим

$$G_z(x) := \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} f(X(s))\, ds \Big);$$
$$a \leqslant \inf_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s), \sup_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s) \leqslant b, X(\varkappa_1) < z \Big\}.$$

Тогда G_z является решением задачи (2.4)–(2.6) (для броуновского движения см., например, [8], теорема 5.1).

Важно, что

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, dz \leqslant \sup_{x \in (a,b)} \mathbf{P}_x \Big(a \leqslant \inf_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s), \sup_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s) \leqslant b \Big) < 1.$$

Отсюда следует, что уравнение (2.1) имеет (см. [1]) единственное ограниченное решение.

Математическое ожидание, определяющее функцию $R(x)$, разобьем в сумму двух математических ожиданий: по множеству $\{H_{a,b} <$

$\varkappa_1\}$ и по его дополнению $\{H_{a,b} \geqslant \varkappa_1\}$. Имеем

$$R(x)=\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(X(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(X(s))\,ds\Big); X(H_{a,b})=b, H_{a,b}<\varkappa_1\Big\}+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(X(s))\,ds-\int\limits_{\varkappa_1}^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big);$$

$$a\leqslant\inf_{0\le s\le\varkappa_1}X(s),\ \sup_{0\le s\le\varkappa_1}X(s)\leqslant b, J(H_{a,b})\geqslant b, X(\varkappa_1)\in dz\Big\}.$$

Принимая во внимание эквивалентность событий $\{H_{a,b}<\varkappa_1\}$ и $\Big\{\int\limits_0^{H_{a,b}} h(X(v))\,dv\leqslant\tau_1\Big\}$ и то, что момент τ_1 не зависит от процесса X, получаем, что первое слагаемое в правой части вышеприведенного соотношения равно $\varPhi(b)M_b(x)$.

На множестве $\{\varkappa_1\leqslant H_{a,b}\}$, которое эквивалентно событию

$$\Big\{a\leqslant\inf_{0\le s\le\varkappa_1}X(s),\ \sup_{0\le s\le\varkappa_1}X(s)\leqslant b\Big\},$$

рассмотрим процесс $J_1(s):=J(s+\varkappa_1)$, $s\geqslant 0$. Тогда

$$H_{a,b}-\varkappa_1=\widetilde{H}_{a,b}:=\min\{s: J_1(s)\notin(a,b)\}.$$

В силу определения (1.2), (1.3), процесс J_1 при условии $X(\varkappa_1)=z$ начинается заново из точки $\rho(z,Y_1)$ и не зависит от процесса X до момента $\varkappa_1$. В результате, имеем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(X(s))\,ds-\int\limits_{\varkappa_1}^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big);$$

$$a\leqslant\inf_{0\le s\le\varkappa_1}X(s),\ \sup_{0\le s\le\varkappa_1}X(s)\leqslant b, J(H_{a,b})\geqslant b, X(\varkappa_1)\in dz\Big\}=$$

$$=\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(X(s))\,ds}; a\leqslant\inf_{0\le s\le\varkappa_1}X(s),\ \sup_{0\le s\le\varkappa_1}X(s)\leqslant b, X(\varkappa_1)\in dz\Big\}\times$$

$$\times\mathbf{E}\Big\{\varPhi(J_1(\widetilde{H}_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{H}_{a,b}} f(J_1(s))\,ds\Big); J_1(\widetilde{H}_{a,b})\geqslant b\Big| X(\varkappa_1)=z\Big\}.$$

Последнее математическое ожидание преобразуется к виду

$$\mathbf{E}\mathbf{E}_{\rho(z,Y_1)}\Big\{\varPhi(J_1(\widetilde{H}_{a,b}))\, e^{-\int\limits_0^{\widetilde{H}_{a,b}} f(J_1(s))\,ds}; J_1(\widetilde{H}_{a,b})\geqslant b\Big\}=\mathbf{E}R(\rho(z,Y_1)).$$

В результате, при $x\in(a,b)$ получаем

$$R(x)=\varPhi(b)M_b(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}R(\rho(z,Y_1))\,dz.$$

При $x>b$ очевидно $R(x)=\varPhi(x)$, поскольку $H_{a,b}=0$. Уравнение (2.1) доказано. $\square$

2.2. Рассмотрим случай, когда выход из интервала происходит посредством пересечения границы. В этом случае справедлив следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть $f(x)$, $x\in[a,b]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция. Тогда функция*

$$R^\circ(x):=\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b})=b\Big\}\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R^\circ(x)=M_b(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\mathbf{E}R^\circ(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{2.7}$$

где $M_b(x)$ является единственным решением задачи (2.2), (2.3). Функция $G_z(x)$ при $x\in(a,b)\setminus\{z\}$ является единственным непрерывным решением задачи (2.4)–(2.6), и $G_z(x)=0$ при $x,z\notin(a,b)$.

Доказательство. Вывод этого результата в значительной степени аналогичен предыдущему. Используя свойство, что процесс $J_1(s)=J(s+\varkappa_1)$, $s\geqslant 0$, при условии $X(\varkappa_1)=z$ распределен как процесс $J(s)$, $s \geqslant 0$, при условии $X(0) = \rho(z, Y_1)$, получаем

$$R^{\circ}(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(X(s))\,ds\Big); X(H_{a,b}) = b, H_{a,b} < \varkappa_1\Big\} +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(X(s))\,ds - \int\limits_{\varkappa_1}^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); a \leqslant \inf_{0\le s\le\varkappa_1} X(s),$$

$$\sup_{0\le s\le\varkappa_1} X(s) \leqslant b, J(H_{a,b}) = b, X(\varkappa_1) \in dz\Big\} = M_b(x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x) +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(X(s))\,ds\Big); a \leqslant \inf_{0\le s\le\varkappa_1} X(s), \sup_{0\le s\le\varkappa_1} X(s) \leqslant b,$$

$$X(\varkappa_1) \in dz\Big\}\mathbf{E}\Big\{\mathbb{1}_{\{a\leqslant\rho(z,Y_1)\leqslant b\}}\mathbf{E}_{\rho(z,Y_1)}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\widetilde{H}_{a,b}} f(J_1(s))ds\Big);$$

$$J_1(\widetilde{H}_{a,b}) = b\Big\}\Big\} = M_b(x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}R^{\circ}(\rho(z, Y_1))\,dz.$$

□

2.3. Рассмотрим случай, когда выход из интервала происходит посредством перескока границы. В этом случае справедлив следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть $\Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$, $x \in [a, b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, а Φ ограничена. Тогда функция*

$$R^{(1)}(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) > b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R^{(1)}(x) = \Phi(x)\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\mathbf{E}R^{(1)}(\rho(z, Y_1))\,dz, \tag{2.8}$$

где $G_z(x)$ при $x \in (a,b) \setminus \{z\}$ является единственным непрерывным решением задачи (2.4)–(2.6), *и* $G_z(x) = 0$ *при* $x, z \notin (a,b)$.

Замечание 2.1. Заметим, что из теорем 2.2 и 2.3 вытекает теорема 2.1. Действительно, $R(x) = \Phi(b)R^{\circ}(x) + R^{(1)}(x)$, и сумма уравнений (2.8) и (2.7), домноженного на $\Phi(b)$, дает уравнение (2.1).

Доказательство теоремы 2.3. Доказательство проходит в том же ключе, что и доказательство теоремы 2.1. Используя свойство, что процесс $J_1(s) = J(s + \varkappa_1)$, $s \geqslant 0$, при условии $X(\varkappa_1) = z$ распределен как процесс $J(s)$, $s \geqslant 0$, при условии $X(0) = \rho(z, Y_1)$, и тот факт, что событие $\{J(H_{a,b}) > b, H_{a,b} < \varkappa_1\}$ реализуется лишь, когда $H_{a,b} = 0$ и $x > b$, получаем

$$R^{(1)}(x) = \Phi(x)\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x \Big\{ \Phi(J(H_{a,b})) \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} f(X(s))\, ds - \int_{\varkappa_1}^{H_{a,b}} f(J(s))\, ds \Big);$$
$$a \leqslant \inf_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s), \sup_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s) \leqslant b, J(H_{a,b}) > b, X(\varkappa_1) \in dz \Big\} =$$
$$= \Phi(x)\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x \Big\{ \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} f(X(s))\, ds \Big); a \leqslant \inf_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s), \sup_{0 \le s \le \varkappa_1} X(s) \leqslant b,$$
$$X(\varkappa_1) \in dz \Big\} \mathbf{E} \Big\{ \mathbf{E}_{\rho(z,Y_1)} \Big\{ \Phi(J_1(\widetilde{H}_{a,b})) \exp\Big(- \int_0^{\widetilde{H}_{a,b}} f(J_1(s)) ds \Big);$$
$$J_1(\widetilde{H}_{a,b}) > b \Big\} \Big\} = \Phi(x)\mathbb{1}_{(b,\infty)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\, \mathbf{E} R^{(1)}(\rho(z, Y_1))\, dz.$$

Теорема доказана. □

3. Примеры. Пусть $X(t) = \sigma W(t)$, $t \geqslant 0$, – броуновское движение с дисперсией σ^2, $Z(t) := \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(\lambda_1 t)} Y_k$ – броуновское движение со скачками, осуществляемыми в соответствии с процессом Пуассона с интенсивностью λ_1. Пусть $H_{a,b} := \min\{s : Z(s) \notin (a,b)\}$.

Рассмотрим величину

$$\mathbf{E}_x\big\{e^{-\gamma(Z(H_{a,b})-b)}e^{-\lambda H_{a,b}};Z(H_{a,b})\geqslant b\big\},\quad \gamma>0,\quad \lambda>0. \tag{3.1}$$

Пусть плотность распределения величин Y_k, $k=1,2,\dots$, имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y_1<y)=\frac{1}{2}\eta e^{-\eta|y|},\qquad \eta>0.$$

В этом случае $Z(t)$ является симметричным случайным процессом ($-Z(t)$ распределен так же как $Z(t)$).

3.1. Для вычисления (3.1), можно воспользуемся теоремой 2.1 при $\sigma(x)\equiv\sigma$, $\mu(x)\equiv 0$, $\varPhi(x)=e^{-\gamma(x-b)}$, $h(x)\equiv\lambda_1$, $f(x)\equiv\lambda$, $\rho(x,y)=x+y$. Аналог этой теоремы для скачкообразных диффузий, осуществляющих скачки в соответствии с процессом Пуассона, был получен в [2]. Там же был рассмотрен пример вычисления выражения (3.1) без ограничения на способ выхода процесса через границу. Приведем, с некоторыми изменениями, полученное в [2] выражение.

Уравнение

$$\frac{\sigma^2\rho^2}{2}+\frac{\lambda_1\rho^2}{\eta^2-\rho^2}=\lambda \tag{3.2}$$

имеет следующие положительные корни:

$$\rho_1=\sqrt{\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}-\left(\left(\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}\right)^2-\frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}},$$

$$\rho_2=\sqrt{\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}+\left(\left(\frac{\lambda+\lambda_1}{\sigma^2}+\frac{\eta^2}{2}\right)^2-\frac{2\lambda\eta^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}}.$$

При этом $\rho_1<\eta<\rho_2$.

Положим

$$D_+:=\frac{\frac{\rho_2\,\mathrm{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}+\frac{1}{\gamma+\eta}}{\frac{\rho_1\,\mathrm{th}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2}+\frac{\rho_2\,\mathrm{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}, \tag{3.3}$$

$$D_-:=\frac{\frac{\rho_2\,\mathrm{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}+\frac{1}{\gamma+\eta}}{\frac{\rho_1\,\mathrm{cth}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2}+\frac{\rho_2\,\mathrm{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}. \tag{3.4}$$

Тогда при $x \in (a,b)$ выражение для (3.1) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x\{e^{-\gamma(Z(H_{a,b})-b)}e^{-\lambda H_{a,b}}; Z(H_{a,b}) \geqslant b\} = \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}+\\
&\quad+\frac{D_+ - D_-}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big)+\\
&\quad+\frac{D_- + D_+}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big) = \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}+\\
&\quad+\frac{D_+}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big)-\\
&\quad-\frac{D_-}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Заметим, что при фиксированных $0<\mu<\eta$ функции $\dfrac{\operatorname{ch}(\mu t)}{\operatorname{ch}(\eta t)}$ и $\dfrac{\operatorname{sh}(\mu t)}{\operatorname{sh}(\eta t)}$ по переменной t убывают. В этом можно убедиться проверив, что производная по t будет отрицательной.

Используя свойство симметрии процесса Z, при $x \in (a,b)$, имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x\{e^{-\gamma(a-Z(H_{a,b}))}e^{-\lambda H_{a,b}}; Z(H_{a,b}) \leqslant a\} = \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}+\\
&\quad+\frac{D_+}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big)+\\
&\quad+\frac{D_-}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)} + \frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

В этих формулах легко обращается преобразование Лапласа по γ, и не ясно как обращать преобразование Лапласа по λ.

Если в (3.5) устремить a к $-\infty$, то получится формула для момента первого превышения уровня b. Обозначим его $H_b := \min\{s : Z(s) \geqslant b\}$. Тогда при $x < b$

$$\mathbf{E}_x e^{-\gamma(Z(H_b)-b)-\lambda H_b} = \frac{(\eta-\rho_1)(\gamma+\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)(\gamma+\eta)}e^{-(b-x)\rho_1} + \frac{(\rho_2-\eta)(\gamma+\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)(\gamma+\eta)}e^{-(b-x)\rho_2}.$$

При $\gamma = 0$ этот результат согласуется с результатом Е. Мордецкого [7].

3.2. Применим теорему 2.2 для вычисления выражения (3.1) с ограничением, что выход процесса через границу происходит без перескока.

Решение уравнения (2.7) будем искать в следующем виде

$$R^\circ(x) = \sum_{k=1}^{4} A_k \frac{\operatorname{sh}((x-\Delta_k)q_k)}{\operatorname{sh}((b-a)q_k)} \mathbb{I}_{[a,b]}(x), \tag{3.7}$$

где $\Delta_1 = \Delta_3 = b$, $\Delta_2 = \Delta_4 = a$, а A_k и q_k – некоторые постоянные, $q_k > 0$.

Функция M_b является единственным решением задачи

$$\frac{\sigma^2}{2} M''(x) - (\lambda + \lambda_1) M(x) = 0, \qquad x \in (a,b), \tag{3.8}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1. \tag{3.9}$$

Обозначим $\Upsilon := \sqrt{2\lambda + 2\lambda_1}/\sigma$, тогда решение M_b имеет вид

$$M_b(x) = \frac{\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}.$$

При этих условиях $G_z(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{\sigma^2}{2} G''(x) - (\lambda + \lambda_1) G(x) = 0, \qquad x \in (a,b) \setminus \{z\}, \tag{3.10}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda_1/\sigma^2, \tag{3.11}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{3.12}$$

Тогда при $x \in (a,b)$, $z \in (a,b)$

$$G_z(x) = \frac{\lambda_1 \big(\operatorname{ch}((b-a-|z-x|)\Upsilon) - \operatorname{ch}((b+a-z-x)\Upsilon)\big)}{\Upsilon \operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}.$$

При $x \notin (a,b)$ или $z \notin (a,b)$ полагаем $G_z(x) = 0$. Для $a \leqslant x \leqslant b$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_z(x) e^{\rho z}\, dz = \frac{2\lambda_1}{2\lambda + 2\lambda_1 - \rho^2\sigma^2} \Big(e^{\rho x} - \frac{e^{\rho a} \operatorname{sh}((b-x)\Upsilon) + e^{\rho b} \operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)} \Big). \tag{3.13}$$

Справедливость (3.13) может быть проверена следующим образом. Очевидно, $G_z(x)$ является функцией Грина, т.е. при $x \in [a,b]$, для любой функции $\Psi(x)$, функция

$$U(x) := \int_{-\infty}^{\infty} G_z(x) \Psi(z)\, dz$$

является единственным решением задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{2}U''(x)-(\lambda+\lambda_1)U(x)=-\lambda_1\Psi(x),\quad x\in(a,b),\\&U(a)=0,\qquad U(b)=0.\end{aligned}$$

Решая эту задачу при $\Psi(x)=e^{\rho x}$, получаем (3.13).

Из (3.13) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_z(x)\,\mathrm{sh}((z-\Delta)\rho)\,dz=\frac{2\lambda_1}{2\lambda+2\lambda_1-\rho^2\sigma^2}\Big(\mathrm{sh}((x-\Delta)\rho)-$$

$$-\frac{\mathrm{sh}((a-\Delta)\rho)\,\mathrm{sh}((b-x)\Upsilon)+\mathrm{sh}((b-\Delta)\rho)\,\mathrm{sh}((x-a)\Upsilon)}{\mathrm{sh}((b-a)\Upsilon)}\Big). \tag{3.14}$$

При $a\leqslant x\leqslant b$ и $\rho(x,y)=x+y$ имеем

$$\mathbf{E}R^\circ(x+Y_1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{4}A_k\mathbf{E}\Big\{\frac{\mathrm{sh}((x+Y_1-\Delta_k)q_k)\,\mathbb{1}_{[a-x,b-x]}(Y_1)}{\mathrm{sh}((b-a)q_k)}\Big\}=\sum_{k=1}^{4}\frac{A_k\eta^2}{(\eta^2-q_k^2)}\frac{\mathrm{sh}((x-\Delta_k)q_k)}{\mathrm{sh}((b-a)q_k)}-$$

$$-\frac{\eta}{2}e^{-\eta(x-a)}\sum_{k=1}^{4}\frac{A_k(\eta\,\mathrm{sh}((a-\Delta_k)q_k)-q_k\,\mathrm{ch}((a-\Delta_k)q_k))}{\mathrm{sh}((b-a)q_k)(\eta^2-q_k^2)}-$$

$$-\frac{\eta}{2}e^{-\eta(b-x)}\sum_{k=1}^{4}\frac{A_k(\eta\,\mathrm{sh}((b-\Delta_k)q_k)+q_k\,\mathrm{ch}((b-\Delta_k)q_k))}{\mathrm{sh}((b-a)q_k)(\eta^2-q_k^2)}.$$

Подставляя в (2.7) выражения для $R^\circ(x)$, $M_b(x)$, $\mathbf{E}R^\circ(x+Y_1)$ и применяя формулы (3.13), (3.14), получаем

$$\sum_{k=1}^{4}A_k\frac{\mathrm{sh}((x-\Delta_k)q_k)}{\mathrm{sh}((b-a)q_k)}=\frac{\mathrm{sh}((x-a)\Upsilon)}{\mathrm{sh}((b-a)\Upsilon)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{4}\frac{A_k\eta^2}{(\eta^2-q_k^2)\,\mathrm{sh}((b-a)q_k)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-q_k^2\sigma^2)}\Big(\mathrm{sh}((x-\Delta_k)q_k)-$$

$$-\frac{\mathrm{sh}((a-\Delta_k)q_k)\,\mathrm{sh}((b-x)\Upsilon)+\mathrm{sh}((b-\Delta_k)q_k)\,\mathrm{sh}((x-a)\Upsilon)}{\mathrm{sh}((b-a)\Upsilon)}\Big)-$$

$$-\frac{\eta}{2}\sum_{k=1}^{4} A_k \frac{(\eta \operatorname{sh}((a-\Delta_k)q_k) - q_k \operatorname{ch}((a-\Delta_k)q_k))}{(\eta^2 - q_k^2)\operatorname{sh}((b-a)q_k)} \frac{2\lambda_1 e^{\eta a}}{(2\lambda + 2\lambda_1 - \eta^2\sigma^2)}\Big(e^{-\eta x} -$$

$$-\frac{e^{-\eta a}\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon) + e^{-\eta b}\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}\Big) -$$

$$-\frac{\eta}{2}\sum_{k=1}^{4} A_k \frac{(\eta \operatorname{sh}((b-\Delta_k)q_k) + q_k \operatorname{ch}((b-\Delta_k)q_k))}{(\eta^2 - q_k^2)\operatorname{sh}((b-a)q_k)} \frac{2\lambda_1 e^{-\eta b}}{(2\lambda + 2\lambda_1 - \eta^2\sigma^2)}\Big(e^{\eta x} -$$

$$-\frac{e^{\eta a}\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon) + e^{\eta b}\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}\Big). \qquad (3.15)$$

Приравнивая коэффициенты при $\operatorname{sh}((x-\Delta_k)q_k)$, получаем

$$A_k = A_k \frac{\eta^2}{(\eta^2 - q_k^2)} \frac{2\lambda_1}{(2\lambda + 2\lambda_1 - q_k^2\sigma^2)},$$

а это влечет, что $q_1 = q_2 =: \rho_1$ и $q_3 = q_4 =: \rho_2$ являются решениями уравнения (3.2).

Приравнивая коэффициенты при $e^{-\eta x}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{4} A_k \frac{(\eta \operatorname{sh}((a-\Delta_k)q_k) - q_k \operatorname{ch}((a-\Delta_k)q_k))}{(\eta^2 - q_k^2)\operatorname{sh}((b-a)q_k)} = 0, \qquad (3.16)$$

а при $e^{\eta x}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{4} A_k \frac{(\eta \operatorname{sh}((b-\Delta_k)q_k) + q_k \operatorname{ch}((b-\Delta_k)q_k))}{(\eta^2 - q_k^2)\operatorname{sh}((b-a)q_k)} = 0. \qquad (3.17)$$

Приравнивая коэффициенты при $\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)$ и при $\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)$, имеем соответственно

$$1 - \sum_{k=1}^{4} A_k \frac{\operatorname{sh}((b-\Delta_k)q_k)}{\operatorname{sh}((b-a)q_k)} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{4} A_k \frac{\operatorname{sh}((a-\Delta_k)q_k)}{\operatorname{sh}((b-a)q_k)} = 0. \qquad (3.18)$$

Поскольку $\Delta_1 = \Delta_3 = b$, $\Delta_2 = \Delta_4 = a$, то отсюда находим $1 - A_2 - A_4 = 0$, $A_1 + A_3 = 0$. Положим $B^\circ := A_3 = -A_1$, $A^\circ := A_2 = 1 - A_4$. Тогда при $x \in (a,b)$ из (3.7) следует, что

$$R^\circ(x) = \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)} + B^\circ\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big) +$$

$$+ A^\circ\Big(\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big). \qquad (3.19)$$

В таком представлении выполнены условия $R^\circ(a) = 0$ и $R^\circ(b) = 1$, что соответствует определению функции $R^\circ(x)$.

Для полученных констант, равенства (3.16), (3.17) преобразуются к виду

$$\frac{B^\circ(\eta\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_1) + \rho_1\,\mathrm{ch}((b-a)\rho_1))}{(\eta^2-\rho_1^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{A^\circ\rho_1}{(\eta^2-\rho_1^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_1)} + \\ + \frac{B^\circ(\eta\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_2) + \rho_2\,\mathrm{ch}((b-a)\rho_1))}{(\rho_2^2-\eta^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)} + \frac{(1-A^\circ)\rho_2}{(\rho_2^2-\eta^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)} = 0, \qquad (3.20)$$

$$-\frac{B^\circ\rho_1}{(\eta^2-\rho_1^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_1)} + \frac{A^\circ(\eta\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_1) + \rho_1\,\mathrm{ch}((b-a)\rho_1))}{(\eta^2-\rho_1^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_1)} - \\ - \frac{B^\circ\rho_2}{(\rho_2^2-\eta^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)} - \frac{(1-A^\circ)(\eta\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_2) + \rho_2\,\mathrm{ch}((b-a)\rho_1))}{(\rho_2^2-\eta^2)\,\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)} = 0. \qquad (3.21)$$

Складывая (3.20) и (3.21), получаем

$$D_+^\circ := A^\circ + B^\circ = \frac{\frac{\rho_2\,\mathrm{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}{\frac{\rho_1\,\mathrm{th}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2\,\mathrm{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}, \qquad (3.22)$$

Вычитая из (3.21) равенство (3.20), получаем

$$D_-^\circ := A^\circ - B^\circ = \frac{\frac{\rho_2\,\mathrm{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}{\frac{\rho_1\,\mathrm{cth}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2\,\mathrm{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}. \qquad (3.23)$$

Тогда для $R^\circ(x)$ имеем следующее явное выражение

$$\mathbf{E}_x\big\{e^{-\lambda H_{a,b}}; Z(H_{a,b}) = b\big\} = R^\circ(x) = \frac{\mathrm{sh}((x-a)\rho_2)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)} + \\ + \frac{D_+^\circ - D_-^\circ}{2}\Big(\frac{\mathrm{sh}((b-x)\rho_1)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\mathrm{sh}((b-x)\rho_2)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)}\Big) + \\ + \frac{D_-^\circ + D_+^\circ}{2}\Big(\frac{\mathrm{sh}((x-a)\rho_1)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\mathrm{sh}((x-a)\rho_2)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)}\Big) = \frac{\mathrm{sh}((x-a)\rho_2)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_2)} + \\ + \frac{D_+^\circ}{2}\Big(\frac{\mathrm{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\mathrm{ch}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\mathrm{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\mathrm{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big) - \\ - \frac{D_-^\circ}{2}\Big(\frac{\mathrm{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\mathrm{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\mathrm{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big). \qquad (3.24)$$

Это выражение совпадает по структуре с (3.5). Отличие есть лишь в коэффициентах D_-, D_-° и D_+, D_+°.

3.3. Применим теорему 2.3 для вычисления выражения (3.1) с условием, что выход процесса через границу происходит с перескоком.

Решение уравнения (2.8) может быть найдено в следующем виде

$$R^{(1)}(x) = e^{-\gamma(x-b)}\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x) + \sum_{k=1}^{4} A_k \frac{\operatorname{sh}((x-\Delta_k)q_k)}{\operatorname{sh}((b-a)q_k)}\mathbb{I}_{[a,b]}(x), \qquad (3.25)$$

где в отличие от представления (3.7) появляется дополнительное слагаемое $e^{-\gamma(x-b)}\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x)$.

В результате, в выражении для $\mathbf{E}R^{(1)}(x+Y_1)$ появляется дополнительное слагаемое

$$\mathbf{E}\big\{e^{-\gamma(x+Y_1-b)}\mathbb{I}_{(b,\infty)}(x+Y_1)\big\} = \frac{\eta}{2(\gamma+\eta)}e^{-\eta(b-x)}.$$

Следовательно, в выражении для

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\mathbf{E}R^{(1)}(z+Y_1)\,dz,$$

которое является основной составляющей формулы (2.8), появится в силу (3.13) дополнительное слагаемое

$$\frac{\eta e^{-\eta b}}{2(\gamma+\eta)}\frac{2\lambda_1}{(2\lambda+2\lambda_1-\eta^2\sigma^2)}\left(e^{\eta x} - \frac{e^{\eta a}\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon) + e^{\eta b}\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}\right).$$

Тогда, подставляя решение (3.25) в уравнение (2.8), мы получим аналог формулы (3.15) с вышеприведенным слагаемым вместо первого слагаемого $\dfrac{\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)}{\operatorname{sh}((b-a)\Upsilon)}$ в ее правой части.

Приравнивая коэффициенты при $\operatorname{sh}((x-\Delta_k)q_k)$, мы получаем те же значения для величин q_k, что и в предыдущем случае, т. е. они являются решениями уравнения (3.2).

Приравнивая коэффициенты при $e^{-\eta x}$, имеем уравнение (3.16), а приравнивая коэффициенты при $e^{\eta x}$, получаем уравнение (3.17) с заменой в правой части нуля на $\dfrac{1}{\gamma+\eta}$.

Приравнивая коэффициенты при $\operatorname{sh}((x-a)\Upsilon)$ и при $\operatorname{sh}((b-x)\Upsilon)$, получаем, что исчезнит единица в левом из соотношений (3.18). В результате, имеем $A_3 = -A_1 =: B^{(1)}$, $A_2 = A_4 =: A^{(1)}$. Тогда из (3.25) следует, что

$$R^{(1)}(x) = e^{-\gamma(x-b)}\mathrm{1\!I}_{(b,\infty)}(x) + B^{(1)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big) +$$

$$+A^{(1)}\Big(\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big)\mathrm{1\!I}_{[a,b]}(x). \qquad (3.26)$$

Поступая как в предыдущем примере, получаем

$$D_+^{(1)} := A^{(1)} + B^{(1)} = \frac{1/(\gamma+\eta)}{\frac{\rho_1 \operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2 \operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}, \qquad (3.27)$$

$$D_-^{(1)} := A^{(1)} - B^{(1)} = \frac{1/(\gamma+\eta)}{\frac{\rho_1 \operatorname{cth}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2 \operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}. \qquad (3.28)$$

Тогда выражение для $R^{(1)}(x)$ имеет следующий вид

$$\mathbf{E}_x\big\{e^{-\gamma(Z(H_{a,b})-b)}e^{-\lambda H_{a,b}}; Z(H_{a,b}) > b\big\} = R^{(1)}(x) = e^{-\gamma(x-b)}\mathrm{1\!I}_{(b,\infty)}(x) +$$
$$+\frac{D_+^{(1)} - D_-^{(1)}}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big)\mathrm{1\!I}_{[a,b]}(x) +$$
$$+\frac{D_-^{(1)} + D_+^{(1)}}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_1)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1)} - \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\Big)\mathrm{1\!I}_{[a,b]}(x) = e^{-\gamma(x-b)}\mathrm{1\!I}_{(b,\infty)}(x) +$$
$$+\frac{D_+^{(1)}}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big)\mathrm{1\!I}_{[a,b]}(x) -$$
$$-\frac{D_-^{(1)}}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big)\mathrm{1\!I}_{[a,b]}(x). \qquad (3.29)$$

Заметим, что это выражение неотрицательно поскольку $0 > D_+^{(1)} > D_-^{(1)}$ в силу очевидного соотношения $\operatorname{cth} x > \operatorname{th} x$.

Литература

1. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 15–36.
2. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от скачкообразного диффузионного процесса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **328** (2005), 27–41.
3. Р. З. Хасьминский, *Распределение вероятностей для функционалов от траекторий слусайного процесса диффузионного типа.* — Докл. АНСССР **104** no. № 1 (1955), 22–25.

4. G. Baxter, M. D. Donsker, *On distribution of the supremum functionals for processes with stationary independent increments.* — Trans. Amer. Math. Soc. **85** no. № 1 (1957), 73–87.
5. В. М. Золотарев, *Момент первого прохождения уровня и поведение на бесконечности одного класса процессов с независимыми приращениями..* — Теория вероятн. и ее примен. **9** no. № 4 (1964), 724–733.
6. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М., Наука 1964.
7. E. Mordecki, *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Теория вероятн. и ее примен. **48** no. № 1 (2003), 188–194.
8. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный ко времени пребывания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 39–56.

Borodin A. N. On first exit time from an interval for diffusions with jumps.

The paper deals with the methods of computations of distributions of functionals of diffusion with jumps, stopped at the first exit time from an interval. For diffusions with jumps the first exit time can occur aither by means of crossings the boundary or by jumping over it. In this connection it is possible to mention three classes of results. The first concerns to the case, when it is not distinguished the way of the first exit from an interval. The second related to the case when the first exit time occurs by means of crossing the boundary. At last the third type of results concerns the case, when the first exit time occurs by means of jump over the boundary. In this case it is necessary to take into account the value of the jump.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 1 декабря 2007 г.