Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 362, 2008 г.

С. А. Назаров, М. Шпековиус-Нойгебауер

СИНГУЛЯРНОСТИ В ВЕРШИНЕ ТРЕЩИНЫ НА СТЫКЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Всеволоду Алексеевичу Солонникову посвящается

1. Введение

Теория трещин – один из замечательных примеров прикладных дисциплин, в которых математический аппарат играет главенствующую роль, причем не только предоставляет строгое обоснование практическим методикам и табличным формулам, но и предопределяет новые постановки задач и предсказывает новые направления развития инженерной теории. Так, например, общие результаты о поведении решений эллиптических краевых задач вблизи гладких ребер границы (см. [1–5] и др.) позволили создать адекватные модели развития трещин-поверхностей в трехмерных телах на основе критериев разрушения разнообразной физической природы (см. [6–9]) и опровергнуть долго бытовавшее среди механиков мнение о том, что, "поскольку непредсказуемо, какую форму выберет ... трещина, точная формулировка критерия разрушения Гриффитса оказывается невозможной " (см. [10]).

В данной работе рассматриваются двумерные задачи, в которых трещина интерпретируется как отрезок или луч, а ее концы представляют собой вершины углов раствором 2π, т.е. результаты получаются на основе теории эллиптических краевых задач в областях с коническими (угловыми) особенностями границы (см. ключевые работы [11–14] и, например, монографии [15, 16]). Количество публикаций по двумерным задачам механики трещин огромно, и авторы воздерживаются от указания какого-либо списка, так как он заведомо будет неполным и наверняка предвзятым. Оправданием этому служит предмет работы – пьезоэлектрическая задача, мало изученная в литературе, существенно отличающаяся по своим свойствам и характеристикам от чисто упругих и электростатических задач и потому требующая существенной модификации устоявшихся определений и стандартных схем рассуждений и вычислений.

Несмотря на то, что пьезоэлектрические материалы встречаются на каждом шагу – начиная от простейшей зажигалки и кончая сложнейшими сенсорами в современной диагностической аппаратуре – и их эксплуатация заранее подразумевает процессы повреждения, к настоящему времени имеются лишь разрозненные результаты по сугубо конкретным пьезоэлектрическим телам, и нет сколь-нибудь общей теории, опирающийся на современный математический аппарат. Последнее обстоятельство объясняет появление неправильных формул и ошибочных выводов (один из примеров таких недоразумений обсуждается в заключительном абзаце п. 6).

Природа пьезоэлектрического эффекта способствует в большой степени свободному преобразованию упругой энергии в электрическую и наоборот, что и придает математической формулировке пьезоэлектрической задачи отличительные особенности. Она допускает две эквивалентные постановки, однако в первой краевая задача не является формально самосопряженной, а во второй – у соответствующей квадратичной формы отсутствует положительная определенность. Одна из постановок связана с введением мнимого электрического потенциала (см. [14, пример 1.13]) и обеспечивает разрешимость задачи, так как соответствующая полуторалинейная форма обладает свойствами, позволяющими применить лемму Лакса–Мильграма. Поскольку в данной статье основным предметом анализа служит модельная задача в угле (плоскости с полубесконечным разрезом), для которой с самого начала имеется однозначная разрешимость в весовых классах Кондратьева [11], далее используется вторая постановка (см. п. 2), приводящая к квадратичной форме, которая не является полуограниченной, и поэтому не допускающая применения вариационных методов, однако вполне пригодная для изучения методами теории краевых задач в областях с кусочно гладкими границами.

Для того чтобы облегчить понимание статьи читателю с механическим образованием, описание математических объектов по возможности дублируется в терминах, привычных в механике разрушения.

2. Постановка задачи. Рассмотрим плоское составное пьезоэлектрическое тело $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ с краевой трещиной Λ на прямой границе $\Upsilon = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ раздела сред (рис. 1). Тензоры упругих деформаций ε^{M} и напряжений σ^{M} и векторы электрической напряженности $\varepsilon^{\mathsf{E}} = E$ и индукции $\sigma^{\mathsf{E}} = D$ связаны определяющими соотношениями [17–19]

$$\sigma^{\mathsf{M}} = A^{\mathsf{M}M}\varepsilon^{\mathsf{M}} - A^{\mathsf{ME}}\varepsilon^{\mathsf{E}}, \quad \sigma^{\mathsf{E}} = A^{\mathsf{EM}}\varepsilon^{\mathsf{M}} + A^{\mathsf{EE}}\varepsilon^{\mathsf{E}}. \tag{1}$$

Здесь A^{MM} и A^{EE} – соответственно четырех- и двухвалентный тензоры упругих модулей и диэлектрических проницаемостей, которые подчинены обычным условиям симметричности и положительности

$$A^{\mathsf{MM}}_{jk,pq} = A^{\mathsf{MM}}_{kj,pq} = A^{\mathsf{MM}}_{pq,jk}, \quad A^{\mathsf{EE}}_{j,k} = A^{\mathsf{EE}}_{k,j}, \quad j,k,p,q = 1,2,3,$$

$$\sum_{j,k,p,q=1}^{3} \xi_{jk} A^{\mathsf{MM}}_{jk,pq} \xi_{pq} \ge c^{\mathsf{M}} \sum_{j,k=1}^{3} |\xi_{jk}|^2,$$

$$\sum_{j,k=1}^{3} \eta_j A^{\mathsf{EE}}_{j,k} \eta_k \ge c^{\mathsf{E}} \sum_{j=1}^{3} \eta_j^2, \quad c^{\mathsf{M}}, c^{\mathsf{E}} > 0,$$

причем $\{\xi_{jk}\}$ – симметричная вещественная (3×3)-матрица и $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$. На пьезоэлектрические модули $A^{\mathsf{ME}}_{jk,p} = A^{\mathsf{EM}}_{p,kj}$ каких-либо ограничений накладывать не надо. Модули $A^{\mathsf{MM}}_{jk,pq}$, $A^{\mathsf{EE}}_{j,g}$ и $A^{\mathsf{ME}}_{jk,p}$ кусочно постоянны, и сужения полей на однородные части $\Omega^\pm$ составного тела Ω обозначаем $\sigma^{\mathsf{M}\pm}$, $\sigma^{\mathsf{E}\pm}$ и т.п. Иными словами, $A^{\mathsf{MM}\pm}_{jk,pq}$, $A^{\mathsf{EE}\pm}_{j,g}$ и $A^{\mathsf{ME}\pm}_{jk,p}$ – постоянные.

Если $u^{\mathsf{M}} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор смещений и $u^{\mathsf{E}} = \varphi$ – электрический потенциал, зависящие от двух переменных $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, то $u = (u^{\mathsf{M}}, u^{\mathsf{E}})$ – обобщенный вектор смещений, и выполнены соотношения

$$\varepsilon^{\mathsf{M}}_{jk} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big), \quad \varepsilon^{\mathsf{M}}_{3j} = \varepsilon^{\mathsf{M}}_{3j} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_j}, \quad \varepsilon^{\mathsf{M}}_{33} = 0, \quad j,k = 1,2,$$
$$\varepsilon^{\mathsf{E}}_p = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}, \quad \varepsilon^{\mathsf{E}}_3 = 0, \quad p = 1,2. \tag{2}$$

Уравнения равновесия и уравнение электростатики имеют вид

$$-\sum_{j,q=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} A^{\mathsf{MM}\,\pm}_{jk,pq} \frac{\partial u_p^\pm}{\partial x_q} - \sum_{j,q=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} A^{\mathsf{ME}\,\pm}_{jk,q} \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial x_q} = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{3}$$

$$-\sum_{j,q=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} A^{\mathsf{EM}\,\pm}_{j,pq} \frac{\partial u_p^\pm}{\partial x_q} + \sum_{j,q=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} A^{\mathsf{EE}\,\pm}_{j,q} \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial x_q} = 0. \tag{4}$$

Обращаем внимание на знак плюс при втором слагаемом в левой части (4), происходящий от знаков минус в формулах (1) и (2).

Далее рассматриваются различные варианты краевых условий и условий контакта:

$$\sum_{j=1}^{2} n_j \sigma_{jk}^{\mathsf{M}} = g_k^{\mathsf{M}} \quad \text{на} \quad \Sigma^{\mathsf{M}}, \quad u_k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^{\mathsf{M}}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{2} n_j \sigma_j^{\mathsf{E}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{\mathsf{E}}, \quad \varphi = G^{\mathsf{E}} \quad \text{на} \quad \Gamma^{\mathsf{E}}; \tag{6}$$

$$\sigma_{2k}^{\mathsf{M}\,+} = \sigma_{2k}^{\mathsf{M}\,-}, \quad u^+ = u_k^- \quad \text{на} \quad \Upsilon^{\mathsf{M}}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{7}$$

$$\sigma_2^{\mathsf{E}\,+} = \sigma_2^{\mathsf{E}\,-}, \quad \varphi^+ = \varphi^- \quad \text{на} \quad \Upsilon^{\mathsf{E}}. \tag{8}$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, причем $n = (0, 1)$ на отрезке Υ. Во всех случаях исключается механический контакт берегов $\Lambda^{\pm}$ трещины Λ и на них отсутствуют внешние нагрузки, т.е. $\Lambda^{\pm} \subset \Sigma^{\mathsf{M}}$ и $g^{\mathsf{M}} = 0$ на $\Lambda^{\pm}$. На множестве $\Upsilon \setminus \Lambda \subset \Upsilon^{\mathsf{M}} \cap \Upsilon^{\mathsf{E}}$ выполнены условия идеального контакта (7), (8). На трещине электрические поля удовлетворяют одному из следующих типов условий:

i) электрического контакта берегов нет и они свободны от электрических зарядов, т.е. $\Lambda^{\pm} \subset \Sigma^{\mathsf{E}}$;

ii) берега трещины заземлены, т.е. $\Lambda^{\pm} \subset \Gamma^{\mathsf{E}}$ и $G^{\mathsf{E}} = 0$ на $\Lambda^{\pm}$;

iii) берега трещины находятся в электрическом контакте, т.е. $\Lambda^{\pm} \subset \Upsilon^{\mathsf{E}}$;

iv) один берег заземлен, а на другом отсутствуют электрические заряды, например, $\Lambda^{+} \subset \Gamma^{\mathsf{E}}$ и $\Lambda^{-} \subset \Sigma^{\mathsf{E}}$.

В статье основное внимание уделяем ситуациям i) и ii), а для ситуаций iii) и iv) приводим краткие комментарии в п. 5 и конце п. 7.

Для многих целей достаточно изучить однородную ($g^{\mathsf{M}} = 0$, $g^{\mathsf{E}} = 0$ и $G = 0$) модельную задачу о составной плоскости с полубесконечной трещиной (рис. 2):

$$\begin{gathered} \Omega^{\pm} = \mathbb{R}^2_{\pm} = \{x : \pm x_2 > 0\}, \quad \Upsilon = \{x : x_2 = 0\}, \\ \Lambda = \{x : x_1 < 0, x_2 = 0\}. \end{gathered} \tag{9}$$

На берегах трещины ставим условия, соответствующие ситуациям i)–iv), а на ее продолжении $\Upsilon \setminus \Lambda$ – условия идеального контакта (7), (8). Такую модельную задачу обозначаем (3)–(9).

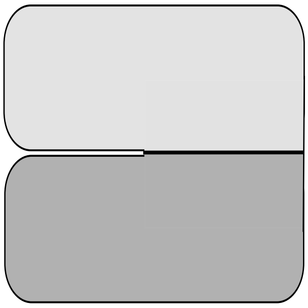

Рис. 1. Композитное пьезоэлектрическое тело с трещиной.

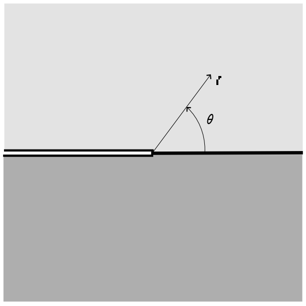

Рис. 2. Трещина на стыке пьезоэлектрических полуплоскостей.

В механике разрушения требуется как можно более детальная информация о нетривиальных *степенно-логарифмических решениях* модельной задачи

$$U(x) = r^{\lambda}\Xi(\theta, \ln r). \tag{10}$$

Здесь U – обобщенный вектор смещений, включающий электрический потенциал как четвертую компоненту, (r, θ) – система полярных координат, $r = |x|$ и $\theta \in (-\pi, \pi)$, показатель $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексное число, а "угловая часть" Ξ – векторный полином переменной $\ln r$ с гладкими коэффициентами относительно переменной θ на интервалах $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$ вплоть до концевых точек (при $\theta = 0$ могут быть скачки). Если зависимость от логарифма отсутствует, то вектор-функция (10) также называется *степенным решением.* Поскольку матричный дифференциальный оператор второго порядка, отвечающий системе (3), (4), может быть записан в виде $r^{-2}\mathfrak{L}(\theta, \partial/\partial\theta, r\partial/\partial r)$ и аналогичную запись допускают операторы краевых условий (5), (6) и условий контакта (7), (8), вектор $r^\lambda \Xi'(\theta, \ln r)$, где штрих обозначает производную по второму аргументу, остается решением модельной задачи. Следовательно, для каждого нетривиального степенно-логарифмического решения (10) найдется степенное решение с тем же показателем λ. В теории краевых задач в областях с кусочно гладкими границами λ и $\Xi(\theta)$ интерпретируются как собственное число и собственная вектор-функция некоторого полиномиального пучка $\mathbf{A}(\lambda)$, ассоциированного с оператором задачи (3)–(9) (см. [11] и, например, вводные главы книги [15]). Множество показателей λ нетривиальных степенных решений (10), т.е. спектр пучка $\lambda \mapsto \mathbf{A}(\lambda)$, обозначаем S. Поскольку задача (3)–(9) формально самосопряженная и коэффициенты дифференциальных операторов вещественные, множество $S \subset \mathbb{C}$ обладает двумя осевыми симметриями (см. [12, 13] и [15, лемма 3.5.9])

$$\lambda \in S \quad \Rightarrow \quad \overline{\lambda} \in S, \; -\overline{\lambda} \in S. \tag{11}$$

Отметим, что первое и второе включения справа обеспечены записью задачи в декартовых и полярных системах координат соответственно (см. [15, §3.5]).

На основе соотношения (11), других общих свойств спектров пучков и некоторых алгебраических фактов в п. 3–5 будут выяснено возможное строение множества S для типов краевых условий на берегах трещины, соответствующих ситуациям i)–iv). Кроме того, определяется эрмитова матрица M, которая фигурирует в формулах Гриффитса для приращений энергетических функционалов (п. 6) и в соотношениях между базисами степенных решений, адаптированных к критериям разрушения различной физической природы (п. 7). Лишь для одного из возможных функционалов, составленных из внутренней энергии или электрической энтальпии и работы внешних воздействий, скорость изменения в зависимости от длины трещины – квадратичная форма от коэффициентов интенсивности, порожденная матрицей M и вычисляемая при помощи инвариантного J-интеграла (рис. 3). В остальных случаях эта скорость выражается через коэффициенты интенсивности, отвечающие отдельно механическим и электрическим воздействиям и поэтому не являющиеся локальными характеристиками физических полей в устье трещины. В п. 8 вводим понятие поверхностной электрической энтальпии и устанавливаем дополнительные свойства деформационного базиса, выделенного усло-

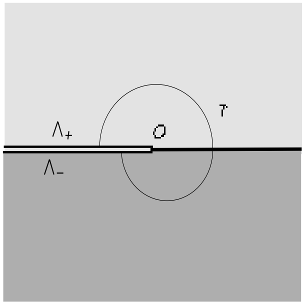

Рис. 3. Путь интегрирования в инвариантном интеграле J.

виями нормировки для скачков обобщенных смещений на берегах трещины.

3. Сингулярности упругих и электрических полей. Поскольку система дифференциальных уравнений (3), (4) обладает полиномиальным свойством (см. [14, пример 1.13]), предложение 6.1.2 [15] устанавливает, что при целом m пересечение множества S с прямой $l(m) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = m\}$ состоит из одной точки $\{m\}$. Показателю $\lambda = m \neq 0$ отвечают четыре линейно независимых степенных решения, и при $m > 0$ декартовы компоненты этих решений – полиномы переменных x_1 и x_2. В ситуации i) имеются четыре степенных решения с показателем $\lambda = 0$, являющихся постоянными, и четыре степенно-логарифмических решения, линейно зависящих от $\ln r$. Постоянный энергетический потенциал не удовлетворяет условию $\varphi = 0$ на $\Lambda^{\pm}$, и в ситуации ii) существуют только три постоянных степенных решения и три степенно-логарифмических решения (10), у которых $\lambda = 0$ и $\deg \Xi = 1$.

В ситуации i) степенные решение $U(x)$, отвечающие показателю $\lambda = 1$, имеют вид

$$U^{\pm}(x) = (b_1 x_1 + 2c_1^{\pm} x_2, 2b_2 x_1 + c_2^{\pm} x_2, 2b_3 x_1 + 2c_3^{\pm} x_2, b_4 x_1 + c_4^{\pm} x_2). \quad (12)$$

При этом коэффициенты $b_1, \dots, b_4$ произвольны, а $c_1^{\pm}, \dots, c_4^{\pm}$ находятся из системы восьми алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^{3} A_{2k,2p}^{\mathsf{MM}\,\pm} c_p^{\pm} + A_{2k,2}^{\mathsf{ME}\,\pm} c_4^{\pm} = -\sum_{p=1}^{3} A_{2k,1p}^{\mathsf{MM}\,\pm} b_p - A_{2k,1}^{\mathsf{AE}\,\pm} b_4, \quad k = 1, 2, 3, \quad (13)$$

$$\sum_{p=1}^{3} A^{\mathsf{EM}\,\pm}_{2,2p} c^{\pm}_p - A^{\mathsf{EE}\,\pm}_{2,2} c^{\pm}_4 = -\sum_{p=1}^{3} A^{\mathsf{EM}\,\pm}_{2,1p} b_p + A^{\mathsf{EE}\,\pm}_{2,1} b_4, \tag{14}$$

которая однозначно разрешима благодаря свойствам тензоров физических констант и обеспечивает выполнение краевых условий $\sigma^{\mathsf{M}\pm} = 0$, $\sigma^{\mathsf{E}\pm} = 0$ на $\Lambda^{\pm}$ и условий сопряжения на $\Upsilon \setminus \Lambda$. В ситуации ii) положим $b_4 = 0$ в выражении (12), возьмем b_1, b_2, b_3 и c^{+}_4 произвольными и определим $c^{\pm}_1, c^{\pm}_2, c^{\pm}_3$ и c^{-}_4 из системы семи алгебраических уравнений (13) и

$$\sum_{p=1}^{3} A^{\mathsf{EM}+}_{2,1p} b_p + \sum_{p=1}^{3} A^{\mathsf{EM}+}_{2,2p} c^{+}_p - A^{\mathsf{EE}+}_{2,2} c^{+}_4 = \sum_{p=1}^{3} A^{\mathsf{EM}-}_{2,1p} b_p + \sum_{p=1}^{3} A^{\mathsf{EM}-}_{2,2p} c^{-}_p - A^{\mathsf{EE}-}_{2,2} c^{-}_4 .$$

Производная вдоль трещины

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(x) = r^{\lambda-1}\Theta(\theta, \ln r) \tag{15}$$

нетривиального решения (10) модельной задачи остается степенно-логарифмическим решением и обращается в нуль тождественно лишь тогда, когда U – функция только одной переменной x_2. В ситуации ii) решение (12) при $b_p = b_4 = 0$ и $c^{+}_4 = 1$ зависит лишь от переменной x_2 и уничтожается дифференцированием $\partial/\partial x_1$ – именно поэтому показателю $\lambda = 0$ отвечают три, а не четыре (как в ситуации i)) линейно независимых степенных решения.

Упомянутое свойство производной (15) и соотношение (11) показывают, что множество $S \ni 0$ инвариантно относительно сдвига на расстояния ± 1 вдоль вещественной оси

$$\lambda \in S \quad \Rightarrow \quad \lambda \pm 1 \in S. \tag{16}$$

Таким образом, S – периодическое множество, и достаточно изучить строение S внутри полосы Π_{+}, где $\Pi_{\pm} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Re} \lambda \in (0,1)\}$ (напоминаем, что структура спектра на сторонах полос описана в начале пункта). Непрерывным изменением тензоров $A^{\mathsf{MM}\,\pm}$, $A^{\mathsf{EE}\,\pm}$ и $A^{\mathsf{EM}\,\pm}$ модельную задачу о составной анизотропной плоскости можно свести к задаче об однородной плоскости с изотропными упругими и электрическими свойствами. При этом механические и электрические поля перестают взаимодействовать и система дифференциальных уравнений (3), (4) распадается на двумерную систему Ламе для вектора (u_1, u_2) и два уравнения Лапласа для скаляров u_3 и φ. В обеих ситуациях i) и ii) изотропная модельная задача имеет четыре линейно независимых степенных решения с показателем $\lambda = 1/2$. Других степенно-логарифмических решений с показателями $\lambda \in \Pi_+$ нет.

Собственные числа $\lambda \in \Pi_+$ полиномиального пучка $\mathbf{A}(\lambda)$, порожденного модельной задачей (3)–(9), непрерывно зависят [20] от тензоров физических констант. Они не могут выходить на границу полосы Π_+, так как согласно приведенным выше результатам, в частности, формулам (12)–(14), геометрические и алгебраические кратности собственных чисел $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ на прямых $l(0)$ и $l(1)$ одинаковы при всех $A^{\mathsf{MM}\,\pm}$, $A^{\mathsf{EE}\,\pm}$ и $A^{\mathsf{EM}\,\pm}$ (другие собственные числа попасть на эти прямые не могут). Следовательно, по теореме о сохранении полной кратности спектра [20] модельная задача для составной анизотропной плоскости также имеет в точности четыре линейно независимых степенно-логарифмических решения (10) с показателями $\lambda \in \Pi_+$. При учете свойств симметрии (11) и инвариантности (16) множества S возможны четыре способа расположения собственных чисел в полосе Π_+, изображенные на рис. 4 (a–d). Разумеется, не исключается случай, когда пары λ, $\overline{\lambda}$ или λ, $1 - \overline{\lambda}$ “слипаются”, образуя кратное собственное число. Если пьезоэлектрическая плоскость однородна, то геометрическая кратность собственного числа $\lambda = 1/2$ равна четырем (см. [21]), т.е. все степенные решения с показателями $\lambda \in \Pi_+$ характеризуются корневыми особенностями тензора напряжений и вектора электрической индукции. Конкретные расчеты в [22, 23] показывают, что в ситуациях i) и ii) возникают геометрические картины a и b соответственно. Угловые части решений (10) с нецелыми показателями не зависят от логарифмов, так как построены [22, 23] четыре линейно независимых степенных решения с показателями $\lambda \in \Pi_+$.

4. Квадратичные формы и инвариантный интеграл. При $G^{\mathsf{E}} = 0$ решение $u = (u^{\mathsf{M}}, u^{\mathsf{E}})$ задачи (3)–(8) об ограниченном пьезоэлектрическом теле Ω – стационарная точка функционала $\mathcal{F} = \mathcal{W} - \mathcal{R}^{\mathsf{M}} - \mathcal{R}^{\mathsf{E}}$, где $\mathcal{W}$ – электрическая энтальпия, а $\mathcal{R}^{\mathsf{M}}$ и $\mathcal{R}^{\mathsf{E}}$ – работы внешних механических и электрических воздействий

$$\mathcal{W}(u;\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \left(\sigma^{\mathsf{M}}_{jk}(u)\varepsilon^{\mathsf{M}}_{jk}(u^{\mathsf{M}}) - \sigma^{\mathsf{E}}_{j}(u)\varepsilon^{\mathsf{E}}_{j}(u^{\mathsf{E}})\right)\, dx, \qquad (17)$$

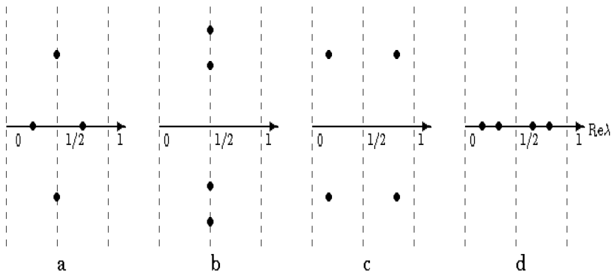

Рис. 4. Возможное распределение показателей λ в полосе Π_+.

$$\mathcal{R}^{\mathsf{M}} = \sum_{k,j=1}^{3} \int\limits_{\Sigma^{\mathsf{M}}} g_j^{\mathsf{M}} u_j \, ds_x, \quad \mathcal{R}^{\mathsf{E}} = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Gamma^{\mathsf{E}}} n_j \sigma_j^{\mathsf{E}}(u) G^{\mathsf{E}} \, ds_x. \tag{18}$$

Функционал (17) не является положительным, но задача (3)–(8) однозначно разрешима в случае $\Gamma^{\mathsf{M}}, \Gamma^{\mathsf{E}} \neq \varnothing$ (см. [14, пример 1.13]). В силу соотношений (2) и (3) верна симметричная формула Грина

$$\sum_{k,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \left(\overline{v_k^{\mathsf{M}}} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{kj}^{\mathsf{M}}(u) + \overline{v^{\mathsf{E}}} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_j^{\mathsf{E}}(u) - u_k^{\mathsf{M}} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\sigma_{kj}^{\mathsf{M}}(v)} - u^{\mathsf{E}} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\sigma_j^{\mathsf{E}}(v)} \right) dx$$
$$= q(u, v; \partial\Omega) := \sum_{k,j=1}^{3} \int\limits_{\partial\Omega} n_j \left(\sigma_{kj}^{\mathsf{M}}(u) \overline{v_k^{\mathsf{M}}} + \sigma_j^{\mathsf{E}}(u) \overline{v^{\mathsf{E}}} - \overline{\sigma_{kj}^{\mathsf{M}}(v)} u_k^{\mathsf{M}} - \overline{\sigma_j^{\mathsf{E}}(v)} u^{\mathsf{E}} \right) ds_x. \tag{19}$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение – степенно-логарифмические решения (10) могут быть комплексными.

Пусть путь T начинается на одном береге, оканчивается на другом и охватывает вершину трещины (см. рис. 3). Решениям U и V однородной модельной задачи (3)–(9) отвечает инвариантный интеграл $q(U, V; T)$, причем по понятным причинам

$$q(U, V; T) = -\overline{q(V, U; T)}. \tag{20}$$

В статьях [24, 25] установлена формула, напоминающая правило интегрирования по частям

$$q\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, V; T\right) = -q\left(U, \frac{\partial V}{\partial x_1}; T\right). \tag{21}$$

Подчеркнем, что здесь U и V – произвольные степенно-логарифмические решения, а интегрирование производится по дуге, изображенной на рис. 3.

Согласно общим результатам [12] (см. также [15, гл. 3]) для любого нетривиального степенно-логарифмического решения (4) найдется степенно-логарифмическое решение V с показателем $-\overline{\lambda}$, для которого выполняется равенство $q(U,V;T)=1$. Пусть $X^1,\dots,X^4$ – линейно независимые степенно-логарифмических решения с показателями $\lambda_j\in\Pi_+$, а $Y^1,\dots,Y^4$ – парные степенно-логарифмических решения с показателями $-\overline{\lambda_j}\in\Pi_-$, подчиненные условиям биортогональности

$$q(X^j,Y^k;T)=\delta_{j,k},\quad j,k=1,\dots,4. \tag{22}$$

Линейные комбинации степенно-логарифмических решений $X^1,\dots,$ X^4 или $Y^1,\dots,Y^4$ образуют четырехмерные пространства $\mathcal{X}$ или $\mathcal{Y}$ соответственно. Далее такие линейные комбинации по-прежнему называем степенно-логарифмическими решениями, а также степенными решениями, если они не зависят от логарифмов.

Производные (15) решений X^j имеют показатели $\lambda_j-1\in\Pi_-$ и, следовательно, раскладываются по базису $\{Y^1,\dots,Y^k\}$ в линеале $\mathcal{Y}$:

$$\frac{\partial X^j}{\partial x_1}(x)=-\sum_{k=1}^{4}M_{jk}Y^k(x). \tag{23}$$

Поскольку степенно-логарифмическое решение с нецелым показателем λ не может зависеть только от одной переменной x_2, производные $\partial X^1/\partial x_1,\dots,\partial X^4/\partial x_1$ сохраняют линейную независимость. Таким образом, матрица $M=(M_{jk})$ размером 4×4 неособенная. При помощи формул (20)–(22) получаем, что M – эрмитова матрица:

$$\begin{aligned}M_{jp}&=q\Big(X^p,\sum_{k=1}^{4}M_{jk}Y^k;T\Big)=-q\Big(X^p,\frac{\partial X^j}{\partial x_1};T\Big)\\&=q\Big(\frac{\partial X^p}{\partial x_1},X^j;T\Big)=-\overline{q\Big(X^j,\frac{\partial X^p}{\partial x_1};T\Big)}=\overline{M_{pj}}.\end{aligned}$$

Рассмотрим полуторалинейную форму $\mathcal{M}(C,C)=\overline{C}^\top MC$, заданную на комплексных столбцах $C=(C_1,\dots,C_4)^\top\in\mathbb{C}^4$; здесь $\top$ – знак транспонирования. Форма $\mathcal{M}$ может быть диагонализована, а именно, существует неособенная (4×4)-матрица[1] Q, для которой верны соотношения

$$\begin{aligned}&K=(K_1,\dots K_4)^\top=Q^{-1}C,\quad \overline{Q}^\top MQ=\operatorname{diag}\{m_1\dots,m_4\},\\ &\mathcal{M}(C,C)=\sum_{j,k=1}^4\overline{C}_jM_{jk}C_k=\sum_{j=1}^4 m_j|K_j|^2.\end{aligned}\tag{24}$$

При этом матрица Q и вещественные числа $m_1,\dots,m_4$ определены не единственным образом, однако согласно теореме Сильвестра *индекс положительности*, т.е. количество положительных чисел в наборе $\{m_1,\dots,m_4\}$, – инвариант формы $\mathcal{M}$. Благодаря невырожденности матрицы M числа $m_1,\dots,m_4$ отличны от нуля, а индекс положительности сохраняется при непрерывном изменении тензоров $A^{\mathsf{MM}\pm}$, $A^{\mathsf{EE}\pm}$ и $A^{\mathsf{EM}\pm}$, в частности, при переходе от составной анизотропной плоскости к однородной изотропной.

Для изотропной модельной задачи степенные решения X^j и Y^k, подчиненные соотношениям (22), известны (см., например, [26]). В ситуации i) ненулевые компоненты этих векторов составляют список

$$\begin{aligned}X_r^1(r,\theta)&=\frac{1}{t_1}r^{1/2}\Big(-\cos\frac{3}{2}\theta+(5-8\nu)\cos\frac{\theta}{2}\Big),\\ X_\theta^1(r,\theta)&=\frac{1}{t_1}r^{1/2}\Big(\sin\frac{3\theta}{2}-(7-8\nu)\sin\frac{\theta}{2}\Big);\\ X_r^2(r\theta)&=\frac{1}{t_2}r^{1/2}\Big(3\sin\frac{3}{2}\theta-(5-8\nu)\sin\frac{\theta}{2}\Big),\\ X_\theta^2(r,\theta)&=\frac{1}{t_2}r^{1/2}\Big(3\cos\frac{3}{2}\theta-(7-8\nu)\cos\frac{\theta}{2}\Big);\\ Y_r^1(r,\theta)&=\frac{1}{T_1}r^{-1/2}\Big(3\cos\frac{\theta}{2}-(7-8\nu)\cos\frac{3}{2}\theta\Big),\\ Y_\theta^1(r,\theta)&=\frac{1}{T_1}r^{-1/2}\Big(-3\sin\frac{\theta}{2}+(5-8\nu)\sin\frac{3}{2}\theta\Big);\\ Y_r^2(r,\theta)&=\frac{1}{T_2}r^{-1/2}\Big(-\sin\frac{\theta}{2}+(7-8\nu)\sin\frac{3}{2}\theta\Big),\\ Y_\theta^2(r,\theta)&=\frac{1}{T_2}r^{-1/2}\Big(-\cos\frac{\theta}{2}+(5-8\nu)\cos\frac{3}{2}\theta\Big);\end{aligned}\tag{25}$$

[1] Матрица Q может быть выбрана унитарной, и в этом случае m_j – собственные числа матрицы M.

$$X_3^3(r,\theta)=\frac{1}{t_3}\,r^{1/2}\,\sin\frac{\theta}{2},\qquad Y_3^3(r,\theta)=\frac{1}{T_3}\,r^{-1/2}\,\sin\frac{\theta}{2},$$
$$X_4^4(r,\theta)=-\frac{1}{t_4}\,r^{1/2}\,\sin\frac{\theta}{2},\qquad Y_4^4(r,\theta)=\frac{1}{T_4}\,r^{-1/2}\,\sin\frac{\theta}{2}. \tag{26}$$

При этом коэффициенты t_j и T_j имеют вид

$$t_1=t_2=4(2\pi)^{1/2}\mu,\quad T_1=T_2=8(2\pi)^{1/2}(1-\nu),$$
$$t_3=\frac{1}{2}(2\pi)^{1/2}\mu,\quad t_4=\frac{1}{2}(2\pi)^{1/2}\beta,\quad T_3=T_4=(2\pi)^{1/2}.$$

В формулах (25) и (26) X_r^k, X_θ^k – полярные компоненты двумерного вектора (X_1^k,X_2^k), X_3^3 – депланация, X_4^4 – электрический потенциал, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, а β – диэлектрическая проницаемость. Минус в первой формуле (26) обусловлен равенством $\sigma_2^{\mathsf{E}}(\varphi)=-\beta\partial\varphi/\partial x_2$. Подставляя выражения для X^j и Y^k в соотношение (23), находим, что M – диагональная матрица с элементами

$$M_{11}=M_{22}=\mu^{-1}(1-\nu),\quad M_{33}=\mu^{-1},\quad M_{44}=-\beta^{-1}. \tag{27}$$

Итак, в ситуации i) индекс положительности $\varkappa$ полуторалинейной формы $\mathcal{M}$ равен 3.

В ситуации ii) функция sin заменяется функцией cos в формулах (26) и, таким образом, последнее равенство (27) приобретает вид $M_{44}=\beta^{-1}$. Следовательно, индекс положительности $\varkappa$ формы $\mathcal{M}$ равен 4, а сама матрица M положительно определена.

Пусть степенные решения $X^1,\dots,X^4$ имеют попарно различные показатели $\lambda_1,\dots,\lambda_4$. Поскольку интеграл $q(X^j,\partial X^k/\partial x_1;T)=-M_{jk}$ инвариантный и его подынтегральное выражение составляет $O(r^{\lambda_j+\overline{\lambda_k}-2})$, элементы матрицы M, отвечающие несогласованным показателям $\lambda_j+\overline{\lambda_k}\neq 1$, равны нулю. При четырех способах расположения показателей $\lambda_p\in\Pi_+$ (рис. 4) матрицы M символически изображены на рис. 5, причем жирными точками отмечены ненулевые элементы – их появление на главной диагонали означает, что $\operatorname{Re}\lambda=1/2$ для соответствующего показателя. Внизу указаны индексы положительности $\varkappa$ формы $\mathcal{M}(C,C)$. Таким образом, в ситуации i) возможна только конфигурация **a**, а в ситуации ii) – конфигурация **b** (рис. 4).

5. Краевые условия третьего и четвертого типов. Число n линейно независимых степенно-логарифмических решений с показателями $\lambda\in\Pi_+$ не обязательно совпадает с числом уравнений в системе

$$\begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \circ & \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \circ & \bullet & \circ \end{pmatrix}$$

a) $\varkappa = 3$ или $\varkappa = 1$ **b**) $\varkappa = 4$ или $\varkappa = 0$ **c**), **d**) $\varkappa = 2$

Рис. 5. Изображение матрицы M и ее индекс положительности.

(3), (4), но зависит от типа краевых условий. Так, $n = 3$ в ситуации iii) и $n = 5$ в ситуации iv); возможные расположения показателей указаны на рис. 6. Для соответствующих изотропных модельных задач в первом случае M – диагональная матрица, содержащая первые три числа (27). Во втором случае (5×5)-матрица M имеет ненулевые элементы

$$M_{11} = M_{22} = \mu^{-1}(1-\nu), \quad M_{33} = \mu^{-1}, \quad M_{45} = M_{54} = 2\beta^{-1}.$$

Помимо четырех положительных у такой матрицы есть отрицательное собственное значение $-2\beta^{-1}$. Кроме того, в ситуации iv) вместо пары степенных решений (26) возникают две пары

$$X_4^4(r,\theta) = -\frac{1}{t_4}\, r^{1/4} \sin\frac{1}{4}(\theta-\pi), \quad Y_4^4(r,\theta) = \frac{1}{T_4}\, r^{-1/4} \sin\frac{1}{4}(\theta-\pi),$$

$$X_4^5(r,\theta) = -\frac{1}{t_5}\, r^{3/4} \sin\frac{3}{4}(\theta-\pi), \quad Y_4^5(r,\theta) = \frac{1}{T_5}\, r^{-3/4} \sin\frac{3}{4}(\theta-\pi),$$

а коэффициенты заданы формулами

$$t_4 = \frac{1}{4}\pi^{1/2}\beta, \quad t_5 = \frac{3}{4}\pi^{1/2}\beta, \quad T_4 = T_5 = 2\pi^{1/2}.$$

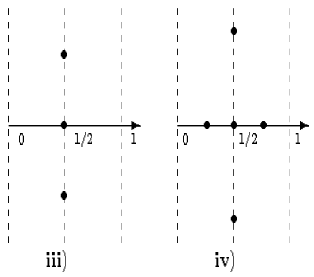

Рис. 6. Возможное распределение показателей λ в полосе Π_+.

6. Матрица высвобождения энергии. При помощи преобразования Лежандра (см., например, [27]), получаем из $\mathcal{W}$ и $\mathcal{F}$ функционалы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \left(\sigma_{jk}^{\mathsf{M}}(u)\, \varepsilon_{jk}^{\mathsf{M}}(u^{\mathsf{M}}) + \sigma_{j}^{\mathsf{E}}(u)\, \varepsilon_{j}^{\mathsf{E}}(u^{\mathsf{E}}) \right) \, dx,$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{E} - \mathcal{R}^{\mathsf{M}} + \mathcal{R}^{\mathsf{E}}. \tag{28}$$

При этом $\mathcal{E}$ – внутренняя энергия пьезоэлектрического тела Ω . Применяя формулу интегрирования по частям и используя соотношения (3)–(6) и (18), выводим

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{3} \int\limits_{\partial\Omega} n_j \, \left(\sigma_{jk}^{\mathsf{M}}(u) u_k - \sigma_{j}^{\mathsf{E}}(u) u^{\mathsf{E}} \right) \, ds - \mathcal{R}^{\mathsf{M}} + \mathcal{R}^{\mathsf{E}} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}^{\mathsf{M}} + \frac{1}{2}\mathcal{R}^{\mathsf{E}}. \tag{29}$$

Обозначим u^0 и u^h решения задачи (3)–(8) для тела Ω с трещиной в начальном положении Λ_0 и с подросшей трещиной Λ_h при одинаковых внешних воздействиях. Масштабированием сведем характерный размер области Ω к единичному и сделаем длину $h > 0$ отростка трещины $\Lambda_h \setminus \Lambda_0$ малым безразмерным параметром. В силу формул (28) и (29) приращение функционала (28) при продвижении трещины имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{V} &= \mathcal{V}^h - \mathcal{V}^0 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Sigma^{\mathsf{M}}} g_j \, \left(u_j^h - u_j^0 \right) \, ds + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Gamma^{\mathsf{E}}} n_j \sigma_j^{\mathsf{E}} (u^{\mathsf{E}h} - u^{\mathsf{E}0}) G^{\mathsf{E}} ds. \end{aligned} \tag{30}$$

Для построения асимптотики обобщенного вектора смещений $u^h = (u^{\mathsf{M}h}, u^{\mathsf{E}h})$ применим метод сращиваемых разложений [28, 29]. Общие асимптотические конструкции были адаптированы к задачам механики трещин в работах [26, 25], а нужные оценки асимптотических остатков получаются на основе общих результатов [30, гл. 4, 6].

Вблизи вершины O трещины Λ_0 выполнено представление

$$u^0(x) = u^0(0) + \sum_{j=1}^{4} C_j X^j(x) + O(r), \quad r \to 0. \tag{31}$$

При этом согласно [12] коэффициенты C_j находятся по формулам

$$C_j = \sum_{p=1}^{3} \int\limits_{\Sigma^{\mathsf{M}}} g_p^{\mathsf{M}}(x)\, \overline{\zeta_p^j(x)}\, dx - \sum_{p=1}^{3} \int\limits_{\Gamma^{\mathsf{E}}} n_p \overline{\sigma_p^{\mathsf{E}}(\zeta^j)}\, G^{\mathsf{E}}\, ds_x. \qquad (32)$$

Здесь $\zeta^j = (\zeta^{\mathsf{M}j}, \zeta^{\mathsf{E}j})$ – весовые функции [31, 12], т.е. неэнергетические решения однородной задачи (3)–(8) для тела $\Omega \setminus \Lambda_0$, подчиненные соотношениям

$$\zeta^j(x) = Y^j(x) + O(1), \quad r \to 0. \qquad (33)$$

Отметим, что интегральные представления (32) – следствие условий нормировки (22). Подробное изложение метода весовых функций [12] применительно к задачам механики трещин приведено в статье [25]. Далее для простоты считаем, что степенно-логарифмические решения X^j не зависят от $\ln r$; несложные изменения при переходе от степенных решений к степенно-логарифмическим решениям указаны в работе [25].

Согласно асимптотической формуле (31) внутреннее (вблизи вершины трещины) разложение решения u^h принимает вид

$$u^h(x) = u^0(0) + \sum_{j=1}^{4} C_j h^{\lambda_j} w^j(\xi) + \dots \qquad (34)$$

Здесь $\xi = h^{-1}x$ – растянутые координаты, λ_j – показатель однородности степенных решений X^j, а w^j – решение модельной задачи о составной плоскости с трещиной $\Lambda_1 = \{\xi : \xi_1 \le 1, \xi_2 = 0\}$, допускающее на бесконечности представление

$$w^j(\xi) = X^j(\xi) + O(1), \quad |\xi| \to \infty. \qquad (36)$$

Отметим, что соотношение (35) обеспечивает сращивание [29] разложений (31) и (34), а замена координат $x \mapsto \xi$ переводит вершину O^h трещины Λ_h в вершину O^1 трещины Λ_1. Запишем вектор-функцию w^j в системе декартовых координат $(\xi_1 - 1, \xi_2)$ с центром O^1:

$$w^j(\xi) = X^j(\xi_1 - 1, \xi_2) = |\xi|^{\lambda_j} X^j(|\xi|^{-1}\xi_1 - |\xi|^{-1}, |\xi|^{-1}\xi_2).$$

Учитывая равенства (23) и применяя формулу Тейлора относительно переменной $|\xi|^{-1} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}$, имеем

$$w^j(\xi) = |\xi|^{\lambda_j} \left(X^j \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) - \frac{1}{|\xi|} \frac{\partial X^j}{\partial \xi_1} \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right) + O\left(\frac{1}{|\xi|^2} \right) \right)$$
$$= X^j(\xi) - \frac{\partial X^j}{\partial \xi_1}(\xi) + O(|\xi|^{\lambda_j - 2}) = X^j(\xi) + \sum_{k=1}^{4} M_{jk} Y^k(\xi) + O(|\xi|^{\lambda_j - 2}). \quad (36)$$

Соотношение (36), во-первых, подтверждает представление (35) и, во-вторых, показывает, что

$$u^h(x) = u^0(0) + \sum_{j=1}^{4} C_j h^{\lambda_j} \left(X^j(\xi) + \sum_{k=1}^{4} M_{jk} Y^k(\xi) \right) + \ldots$$
$$= u^0(0) + \sum_{j=1}^{4} C_j X^j(\xi) + h \sum_{j,k=1}^{4} C_j M_{jk} Y^k(\xi) + \ldots \quad (37)$$

Сравнивая соотношения (31), (33) и (37), уточняем внешнее (на удалении от вершины трещины) разложение

$$u^h(x) = u^0(x) + h u'(x) + \ldots, \quad (38)$$

$$u' = \sum_{j=1}^{4} C_j M_{jk} Y^k = \left. \frac{\partial u^h}{\partial h} \right|_{h=0}. \quad (39)$$

Отметим, что равенство (39) обобщает формулу Райса [32] для весовых функций на случай пьезоэлектрического тела.

Подставим разложение (38) в формулу (30) и при помощи соотношений (39) и (32) преобразуем ее к виду

$$\Delta \mathcal{V} = -\frac{h}{2} \sum_{j,k=1}^{4} C_j M_{jk} \sum_{p=1}^{3} \left(\int_{\Sigma^M} g_p \zeta_p^k ds_x - \int_{\Gamma^{\mathsf{E}}} n_p \sigma_p^{\mathsf{E}}(\zeta^k) G^{\mathsf{E}} \, ds_x \right) + O(h^2)$$
$$= -\frac{h}{2} \sum_{j,k=1}^{4} C_j M_{jk} \overline{C}_k + O(h^2) = -\frac{h}{2} \mathcal{M}(C, C) + O(h^2). \quad (40)$$

При этом $\mathcal{M}$ – полуторалинейная форма (24), а порядок точности $O(h^2)$ асимптотической формулы (40) обеспечен общими результатами [30] и сведениями о множестве S, представленными в п. 3.

Рассмотрим инвариантный интеграл

$$J(u;T) = \int\limits_T \left\{ \frac{1}{2}\bigg(\sum_{j,k=1}^{3} \sigma_{jk}^{\mathsf{M}}(u)\varepsilon_{jk}^{\mathsf{M}}(u^{\mathsf{M}}) - \sum_{j=1}^{3} \sigma_{j}^{\mathsf{E}}(u)\varepsilon_{j}^{\mathsf{E}}(u^{\mathsf{E}})\bigg) n_1 - \sum_{j=1}^{3} n_j \left(\sum_{k=1}^{3} \sigma_{jk}^{\mathsf{M}}(u)\frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \sigma_j^{\mathsf{E}}(u)\frac{\partial u^{\mathsf{E}}}{\partial x_1}\right) \right\} ds_x. \tag{41}$$

Проверим равенства

$$J(u;T) = -\frac{1}{2}q\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}; T\right) = \frac{1}{2}\mathcal{M}(C,C). \tag{42}$$

Второе вытекает из соотношений (22), (23) и (31). Поскольку берега трещины свободны от внешних воздействий, производная $\partial_1 u = \partial u/\partial x_1$ удовлетворяет уравнениям (3), (4) и условиям (5)–(8) внутри области ω, охватываемой контуром T. Обозначим через $\mathcal{L}$ матричный дифференциальный оператор системы (3), (4) и через χ – гладкую срезающую функцию, равную нулю вблизи вершины трещины и единице в окрестности дуги T. Таким образом, произведение $v = \chi u$ лишено каких-либо сингулярностей. Следующая выкладка доказывает первое равенство (42):

$$\begin{aligned}
&q(u, \partial_1 u; T) = q(v, \partial_1 v; T) \\
&= -\int\limits_\omega (\partial_1 v^\top \mathcal{L} v - v^\top \mathcal{L}\partial_1 v)\, dx - \sum_{\pm} q(v, \partial_1 v; \Lambda_0^{\pm} \cap \omega) \\
&= -2\int\limits_\omega \partial_1 v^\top \mathcal{L} v\, dx - 2\sum_{\pm}\sum_{j,k=1}^{3} \int\limits_{\Lambda^{\pm}\cap\omega} n_j \left(\sigma_{jk}^{\mathsf{M}}(v)\partial_1 v_k^{\mathsf{M}} + \sigma_j^{\mathsf{E}}(v)\partial_1 v^{\mathsf{E}}\right) dx_1 \\
&= -\int\limits_\omega \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum_{j,k=1}^{3} \sigma_{jk}^{\mathsf{M}}(v)\varepsilon_{jk}^{\mathsf{M}}(v^{\mathsf{M}}) - \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{\mathsf{E}}(v)\varepsilon_j^{\mathsf{E}}(v^{\mathsf{E}})\right) dx \\
&+ 2\int\limits_\top \sum_{j=1}^{3} n_j \left(\sum_{k=1}^{3} \sigma_{jk}^{\mathsf{M}}(u)\partial_1 u_k^{\mathsf{M}} + \sigma_j^{\mathsf{E}}(u)\partial_1 u^{\mathsf{E}}\right) ds_x = -2J(u;T).
\end{aligned}$$

Итак, в силу формул (40) и (42), верно соотношение

$$-\frac{d\mathcal{V}^h}{dh}\bigg|_{h=0} = \frac{1}{2}\mathcal{M}(C,C) = J(u^0;T). \tag{43}$$

Обычно (см. [33, 32] и др.) инвариантный интеграл $J(u^0;\Gamma)$ связывается со скоростью высвобождения энергии при продвижении вершины трещины. Соответственно и аналогично чисто упругой задаче [34] эрмитову матрицу M, составленную из коэффициентов разложений (23) и порождающую полуторалинейную форму (25), назовем *матрицей высвобождения пьезоэлектрической энергии.* Формулы (40) и (43) неизменны для всех типов рассматриваемых краевых условий на берегах трещины, но размеры матрицы M и индекс положительности формы $\mathcal{M}$ могут варьироваться (см. рис. 4–6).

Подынтегральное выражение (41) содержит плотность энтальпии (17), однако приращения функционалов $\mathcal{W}$ и $\mathcal{F}$ не связаны с инвариантным интегралом $J(u^0;T)$:

$$\begin{aligned}
-\Delta\mathcal{W} &= \Delta\mathcal{F}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3}\int\limits_{\Sigma^{\mathsf{M}}} g_p^{\mathsf{M}}\left(u_p^h - u_p^0\right) ds_x - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3}\int\limits_{\Gamma^{\mathsf{E}}} n_p\sigma_p^{\mathsf{E}}(u^h-u^0)G^{\mathsf{E}}\, ds_x\\
&= -\frac{h}{2}\sum_{j,k=1}^{4} C_j M_{jk}\Bigg\{\sum_{p=1}^{3}\int\limits_{\Sigma^{\mathsf{M}}} g_p^{\mathsf{M}}\zeta_p^k\, ds_x\\
&\qquad\qquad + \sum_{p=1}^{3}\int\limits_{\Gamma^{\mathsf{E}}} n_p\sigma_p^{\mathsf{E}}(\zeta^k)\, G^{\mathsf{E}}\, ds_x\Bigg\} + O(h^2)\\
&= -\frac{h}{2}\sum_{j,k=1}^{4}(c_j^{\mathsf{M}} + C_j^{\mathsf{E}})_{\mathsf{M}jk}\overline{(C_k^{\mathsf{M}} - C_k^{\mathsf{E}})} + O(h^2)\\
&= -\frac{h}{2}\Big(\mathcal{M}(C^{\mathsf{M}},C^{\mathsf{M}}) - \mathcal{M}(C^{\mathsf{E}},C^{\mathsf{E}})\Big) + O(h^2).
\end{aligned} \tag{44}$$

Здесь $C_j = C_j^{\mathsf{M}} + C_j^{\mathsf{E}}$, а C_j^{M} и C_j^{E} – коэффициенты разложения (31), порожденные соответственно механическими и электрическими внешними воздействиями, причем согласно интегральным представлениям

(32) верны соотношения

$$C_j^{\mathsf{M}} = \sum_{p=1}^{3} \int\limits_{\Sigma^{\mathsf{M}}} g_p^{\mathsf{M}}(x)\overline{\zeta_p^j(x)}\, ds_x, \quad C_j^{\mathsf{E}} = -\sum_{p=1}^{3} \int\limits_{\Gamma^{\mathsf{E}}} n_p\, \overline{\sigma_p^{\mathsf{E}}(\zeta^j)}\, G^{\mathsf{E}}\, ds_x. \quad (45)$$

Формулы (40) и (44) имеют качественное различие: в первой множитель при h – локальная характеристика физических полей, а во второй – глобальная, поскольку в отличие от коэффициентов C_j коэффициенты C_j^{M} и C_j^{E} не находятся путем анализа полей в устье трещины. Кроме того, при смене полярности электрических воздействий разность $\mathcal{M}(C^{\mathsf{M}}, C^{\mathsf{M}}) - \mathcal{M}(C^{\mathsf{E}}, C^{\mathsf{E}})$ не изменяется, а величины $\mathcal{M}(C^{\mathsf{M}} + C^{\mathsf{E}}, C^{\mathsf{M}} + C^{\mathsf{E}})$ и $\mathcal{M}(C^{\mathsf{M}} - C^{\mathsf{E}}, C^{\mathsf{M}} - C^{\mathsf{E}})$ совпадают лишь в случае $\mathcal{M}(C^{\mathsf{M}}, C^{\mathsf{E}}) = 0$ (ср. [35, 36] и др.).

Функционал (28) единственный, для которого скорость изменения при росте трещины – локальная характеристика. Например, по формулам (29), (18), (39) и (45) получаем

$$\Delta\mathcal{U} = \Delta\mathcal{E} - \Delta\mathcal{R}^{\mathsf{M}} - \Delta\mathcal{R}^{\mathsf{E}} = -\frac{1}{2}\Delta\mathcal{R}^{\mathsf{M}} - \frac{3}{2}\Delta\mathcal{R}^{\mathsf{E}}$$

$$= -\frac{h}{2}\Big(\mathcal{M}(C^{\mathsf{M}}, C^{\mathsf{M}}) - 3\mathcal{M}(C^{\mathsf{E}}, C^{\mathsf{E}})\Big) + O(h^2).$$

Обсуждаемые свойства энергетических функционалов зависят от характера внешних электрических воздействий. Пусть, например, вместо электрического потенциала G^{E} на Γ^{E} задана нормальная компонента вектора электрической индукции на поверхности $\Sigma^{\mathsf{E}} \setminus \Lambda$. Тогда соотношения (6) и (18) заменяются следующими:

$$\sum_{j=1}^{3} n_j \sigma_j^{\mathsf{E}} = g^{\mathsf{E}} \ \text{ на } \ \Sigma^{\mathsf{E}}, \quad \varphi = 0 \quad \text{ на } \quad \Gamma^{\mathsf{E}}, \quad (46)$$

$$\mathcal{R}^{\mathsf{M}} = \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Sigma^{\mathsf{M}}} g_j^{\mathsf{M}} u_j^{\mathsf{M}}\, ds_x, \quad \mathcal{R}^{\mathsf{E}} = -\int\limits_{\Sigma^{\mathsf{E}}} g^{\mathsf{E}} u^{\mathsf{E}}\, ds_x. \quad (47)$$

При этом знак минус при втором интеграле (47) обусловлен связью (2) вектора электрической напряженности и потенциала. В статьях [37, 38] была исправлена ошибка на стр. 296 [18] в вычислении приращения потенциальной энергии и показано, что для задачи (3)–(5), (46), (7), (8) верны соотношения

$$\Delta\mathcal{W} - \Delta\mathcal{R}^{\mathsf{M}} + \Delta\mathcal{R}^{\mathsf{E}} = -\frac{h}{2}\mathcal{M}(C,C) + O(h^2). \tag{48}$$

$$\Delta\mathcal{V} = \Delta\mathcal{E} - \Delta\mathcal{R}^{\mathsf{M}} - \Delta\mathcal{R}^{\mathsf{E}} = -\frac{h}{2}\Big(\mathcal{M}(C^{\mathsf{M}},C^{\mathsf{M}}) - \mathcal{M}(C^{\mathsf{E}},C^{\mathsf{E}})\Big) + O(h^2). \tag{49}$$

Правые части формул (48) для *энтальпийного* и (49) для *энергетического* функционалов в задаче с краевыми условиями (40) идентичны правым частям формул (48) для *энергетического* и (49) для *энтальпийного* функционалов в задаче с краевыми условиями (6). Обращая внимание на перестановку названий функционалов при переходе от одних краевых условий к другим, укажем, что смена типа функционала играет очень важную роль при изучении физических явлений, и именно поэтому ошибка в выкладках [18] привела к неправильным выводам о процессе разрушения.

7. Базисы степенных решений. В работах [25, 39] (см. также [40]) для чисто упругой задачи были построены базисы степенных решений, адаптированных к критериям разрушения разной природы – энергетическим, силовым и деформационным. Аналогичная классификация возможна и для пьезоэлектрической задачи.

Энергетический базис $\{X^{1e},\dots,X^{e4}\}$ существует при любой конфигурации показателей $\lambda_j \in \Pi_+$ и выбирается так, чтобы матрица M была диагональной, а поля X^{je} – вещественными. Отметим, что последнее влечет за собой вещественность элементов матрицы M. Рассмотрим наиболее интересную ситуацию i) (рис. 4(a)), в которой

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\tau_1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\tau_1, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - \tau_2, \quad \lambda_4 = \frac{1}{2} + \tau_2 \quad (\tau_1, \tau_2 > 0).$$

Угловые части Φ^3 и Φ^4 степенных решений X^3 и X^4 можно выбрать вещественными, а угловые части Φ^1 и Φ^2 степенных решений X^1 и X^2 оказываются комплексными, но можно считать, что $\Phi^1 = \overline{\Phi}^2$. Тогда элементы $M_{11} = M_{22} > 0$, $M_{34} = M_{43} \neq 0$ матрицы M (рис. 5(a)) вещественные. Пусть L – характерный размер тела Ω. Отделим вещественные и мнимые части, т.е. положим

$$X^{1e}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} r^{1/2} \left(\operatorname{Re} \Phi^1(\theta) \cos \left(\tau_1 \ln \frac{r}{L} \right) - \operatorname{Im} \Phi^1(\theta) \sin \left(\tau_1 \ln \frac{r}{L} \right) \right),$$
$$X^{2e}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} r^{1/2} \left(\operatorname{Re} \Phi^1(\theta) \sin \left(\tau_1 \ln \frac{r}{L} \right) + \operatorname{Im} \Phi^1(\theta) \cos \left(\tau_1 \ln \frac{r}{L} \right) \right),$$
$$X^{3e}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} r^{1/2} \left(\left(\frac{r}{L} \right)^{-\tau_2} \Phi^3(\theta) + \left(\frac{r}{L} \right)^{\tau_2} \Phi^4(\theta) \right),$$
$$X^{4e}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} r^{1/2} \left(\left(\frac{r}{L} \right)^{\tau_2} \Phi^3(\theta) - \left(\frac{r}{L} \right)^{\tau_2} \Phi^4(\theta) \right).$$

В результате получаем $M^e = \operatorname{diag}\{M_{11}, M_{22}, M_{34}, -M_{34}\}$.

В ситуации i) силовой и деформационный базисы можно ввести при условии, что все степенные решения $X^1, \ldots, X^4$ имеют одинаковый показатель $\lambda = 1/2$. Силовой базис $\{X^{1\sigma}, \ldots, X^{4\sigma}\}$, порожденный ограничениями на напряжения, задан следующими соотношениями на продолжении трещины:

$$\sigma_{2p}^{\mathsf{M}}(X^{j\sigma}; r, 0) = (2\pi r)^{-1/2} \delta_{p,j}, \quad p = 1, 2, 3,\ j = 1, \ldots, 4, \tag{50}$$

$$\sigma_2^{\mathsf{E}}(X^{j\sigma}; r, 0) = (2\pi r)^{-1/2} \delta_{4,j}, \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{51}$$

При определении деформационного базиса $\{X^{1\varepsilon}, \ldots, X^{4\varepsilon}\}$ условия накладываются на скачки смещений и электрического потенциала на берегах трещины, а именно,

$$r^{-1}[X_p^{j\varepsilon}](-r) = 2(2\pi r)^{-1/2} \delta_{p,j}, \quad p = 1, 2, 3,\ j = 1, \ldots, 4, \tag{52}$$

$$r^{-1}[X^{j\varepsilon\mathsf{E}}](-r) = 2(2\pi r)^{-1/2} \delta_{4,j}, \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{53}$$

Существование двух базисов, удовлетворяющих требованиям (50), (51) и (52), (53), доказывается по схеме [25]. Например, если нельзя соблюсти условия (50), (51), то найдется нетривиальное степенное решение $X(x) = r^{1/2}\Phi(\theta)$, для которого $\sigma_{21}^{\mathsf{M}\pm}(X) = \sigma_{22}^{\mathsf{M}\pm}(X) = \sigma_{23}^{\mathsf{M}\pm}(X) = 0$, $\sigma_2^{\mathsf{E}\pm}(X) = 0$ на продолжении трещины. Следовательно, X – решение задачи Неймана для эллиптической системы дифференциальных уравнений (3), (4) в верхней полуплоскости. Известно [41], что локально ограниченные решения такой краевой задачи гладкие, а значит, поле X не может иметь вид (10) с показателем $\lambda = 1/2$. Искомое противоречие обнаружено.

Каждому из двух базисов в линеале $\mathcal{X}$ соответствует базис в линеале $\mathcal{Y}$ сингулярных степенных решений (10) с показателями $\lambda = -1/2$, подчиненных условиям нормировки (22). Соотношения (23) порождают две эрмитовы матрицы M^σ и M^ε, а асимптотическое разложение (31) принимает вид

$$u^0(x) = u^0(0) + \sum_{j=1}^{4} K_j^\sigma X^{j\sigma}(x) + O(r) = \sum_{k=1}^{4} K_k^\varepsilon X^{k\varepsilon}(x) + O(r), \quad r \to 0.$$

Обобщенные *коэффициенты интенсивности напряжений* K_j^σ и *коэффициенты интенсивности деформаций* K_j^ε, а также соответствующие базисы сингулярных решений связаны соотношениями

$$K_j^\sigma = \sum_{k=1}^{4} N_{kj} K_k^\varepsilon, \qquad X^{k\varepsilon} = \sum_{j=1}^{4} N_{kj} X^{j\sigma}. \tag{54}$$

Здесь N_{kj} – элементы неособенной матрицы N размером 4×4. В силу формул (40), (30) и (19) имеем

$$\begin{aligned}
&-\frac{h}{2} \sum_{j,k=1}^{4} K_j^\varepsilon M_{jk}^\varepsilon K_k^\varepsilon + O(h^2) \\
&= \Delta\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_{\pm} \mp \int\limits_{\Lambda_h^\pm \setminus \Lambda^\pm} \left(\sum_{p=1}^{3} \sigma_{2p}^{\mathsf{M}}(u^0) u_p^h + \sigma_2^{\mathsf{E}}(u^0) u^{h\mathsf{E}} \right) ds \\
&= -\frac{1}{2} \int\limits_0^h \left(\sum_{p=1}^{3} \sigma_{2p}^{\mathsf{M}}(u^0; x_1, 0)\, [u_p^h](x_1) + \sigma_2^{\mathsf{E}}(u^0; x_1, 0)\, [u^{h\mathsf{E}}](x_1) \right) dx_1.
\end{aligned} \tag{55}$$

Учитывая условия нормировки (50)–(53) и внутреннее асимптотическое разложение (34), (35) поля u^h, получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{2p}^{\mathsf{M}}(u^0; x_1, 0) &= (2\pi r)^{-1/2} K_p^\sigma + O(1), \quad p = 1, 2, 3, \\
\sigma_2^{\mathsf{E}}(u^0; x_1, 0) &= (2\pi r)^{-1/2} K_4^\sigma + O(1),
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
[u_p^h](x_1) &= 2\,(2\pi)^{-1/2}\,(h-r)^{1/2}\, K_p^\varepsilon + O(h+r), \quad p = 1, 2, 3, \\
[u^{h\mathsf{E}}](x_1) &= 2\,(2\pi)^{-1/2}\,(h-r)^{1/2}\, K_4^\varepsilon + O(h+r).
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в последний интеграл (55), выводим соотношение

$$-\frac{h}{2}\sum_{j,k=1}^{4} K_j^{\sigma} M_{jk}^{\sigma} K_k^{\sigma} + O(h^2) = -\frac{h}{2}\sum_{j,k=1}^{4} K_j^{\varepsilon} M_{jk}^{\varepsilon} K_k^{\varepsilon} + O(h^2)$$

$$= -\frac{h}{2\pi}\sum_{j=1}^{4} K_j^{\varepsilon} K_j^{\sigma} \int_0^1 \rho^{-1/2}(1-\rho)^{1/2}\, d\rho + o(h)$$

$$= -\frac{h}{4}\sum_{j,k=1}^{4} K_j^{\varepsilon} N_{kj} K_k^{\varepsilon} + o(h).$$

Следовательно, матрица N, осуществляющая переход (54) от силового базиса к деформационному, равна $2M^{\varepsilon}$. Кроме того, верна формула $M^{\sigma} = (4M^{\varepsilon})^{-1}$.

В ситуации iii) существуют силовой $\{X^{1\sigma}, X^{2\sigma}, X^{3\sigma}\}$ и деформационный $\{X^{1\varepsilon}, X^{2\varepsilon}, X^{3\varepsilon}\}$ базисы в трехмерном пространстве $\mathcal{X}$, подчиненные соответственно нормировкам (50) и (52), где $j = 1,2,3$. Соотношения

$$K_p^{\varepsilon} = \lim_{r\to+0}\left(\frac{\pi}{2r}\right)^{1/2}[u_p^0](-r), \quad p = 1,2,3, \tag{57}$$

определяют три коэффициента интенсивности деформаций. Поскольку вектор электрической индукции имеет корневую сингулярность на продолжении трещины, можно указать [42] *четыре* обобщенных коэффициента интенсивности напряжений по формулам (56). Однако правильно оперировать с тремя коэффициенты интенсивности напряжений K_1^{σ}, K_2^{σ}, K_3^{σ}, так как $K_4^{\sigma} = a_1K_1^{\sigma} + a_2K_2^{\sigma} + a_3K_3^{\sigma}$, и множители a_q зависят от тензоров A^{MM}, A^{ME} и A^{EE}, но не от внешних воздействий g^{M} и G^{E}. В этом случае повторение предшествующих выкладок обеспечивает связи деформационного и силового базисов, аналогичные полученным в ситуации i).

В ситуации ii) также возникают два базиса $\{X^{1\sigma}, \dots, X^{4\sigma}\}$ и $\{X^{1\varepsilon}, \dots, X^{4\varepsilon}\}$ в пространстве $\mathcal{X}$. Первый определяется при помощи условий на продолжении трещины, а второй – на самой трещине. При этом формулы (50) и (52) сохраняются, а формулы (51) и (53) заменяются соответственно формулами

$$X^{j\sigma\mathsf{E}}(r,0) = -(2\pi)^{-1/2} r^{1/2}\delta_{4,j}, \quad j = 1,\dots,4, \tag{58}$$

$$\left[\sigma_2^{\mathsf{E}}(X^{j\varepsilon})\right](-r) = -2\,(2\pi r)^{-1/2}\delta_{4,j}, \quad j = 1,\dots,4. \tag{59}$$

Существование базисов, подчиненных требованиям (50), (58) или (52) (59), по-прежнему проверяется по схеме [25]. Эти базисы смешанные: первому отвечают три коэффициента интенсивности напряжений и один обобщенный коэффициент интенсивности деформаций, а второму – три коэффициента интенсивности деформаций (57) и один обобщенный коэффициент интенсивности напряжений. Тем не менее установленные выше соотношения между базисами сохраняют силу.

Авторы не знают подходящих условий нормировки базисов в ситуации iv).

8. Поверхностная электрическая энтальпия. Введем столбцы обобщенных деформаций и напряжений

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (\varepsilon_{11}^{\mathsf{M}}, \sqrt{2}\,\varepsilon_{13}^{\mathsf{M}}, -\varepsilon_{1}^{\mathsf{E}}, \sqrt{2}\,\varepsilon_{12}^{\mathsf{M}}, \varepsilon_{22}^{\mathsf{M}}, \sqrt{2}\,\varepsilon_{32}^{\mathsf{M}}, -\varepsilon_{2}^{\mathsf{E}})^{\top}, \\ \sigma &= (\sigma_{11}^{\mathsf{M}}, \sqrt{2}\,\sigma_{13}^{\mathsf{M}}, \sigma_{1}^{\mathsf{E}}, \sqrt{2}\,\sigma_{12}^{\mathsf{M}}, \sigma_{22}^{\mathsf{M}}, \sqrt{2}\,\sigma_{32}^{\mathsf{M}}, \sigma_{2}^{\mathsf{E}})^{\top}. \end{aligned} \tag{60}$$

Множители $\sqrt{2}$ уравнивают естественные нормы столбцов и соответствующих тензоров. Величины $\varepsilon_{33}^{\mathsf{M}}, \varepsilon_{3}^{\mathsf{E}}$ и $\sigma_{33}^{\mathsf{M}}, \sigma_{3}^{\mathsf{E}}$ не включены в столбцы (60) потому, что первые равны нулю в силу соотношений (2), а вторые не фигурируют в задаче (3)–(8).

Осуществляя частичное преобразование Лежандра (см., например, [27]), получаем еще два столбца

$$\begin{aligned} \eta &= (\varepsilon_{11}^{\mathsf{M}}, \sqrt{2}\,\varepsilon_{13}^{\mathsf{M}}, -\varepsilon_{1}^{\mathsf{E}}, -\sqrt{2}\,\sigma_{12}^{\mathsf{M}}, -\sigma_{22}^{\mathsf{M}}, -\sqrt{2}\,\sigma_{32}^{\mathsf{M}}, -\sigma_{2}^{\mathsf{E}})^{\top}, \\ \xi &= (\sigma_{11}^{\mathsf{M}}, \sqrt{2}\,\sigma_{13}^{\mathsf{M}}, \sigma_{1}^{\mathsf{E}}, \sqrt{2}\,\varepsilon_{12}^{\mathsf{M}}, \varepsilon_{22}^{\mathsf{M}}, \sqrt{2}\,\varepsilon_{32}^{\mathsf{M}}, -\varepsilon_{2}^{\mathsf{E}})^{\top}. \end{aligned} \tag{61}$$

Согласно определяющим соотношениям (1), пары столбцов (60) и (61) связаны равенствами

$$\sigma = A\varepsilon, \quad \xi = B\eta. \tag{62}$$

Здесь A и B – симметрические обратимые матрицы размером 7×7. Квадратичная форма $2^{-1}\varepsilon^{\top}\sigma = 2^{-1}\varepsilon^{\top}A\varepsilon$ – плотность электрической энтальпии (17). Поскольку при ограничениях на скачки обобщенных смещений *стесненными* в ситуации i) оказываются все компоненты столбца η, форму $\mathbf{P}(\xi) = 2^{-1}\xi^{\top}\eta$ естественно назвать *плотностью поверхностной энтальпии* (ср. [43] для чисто упругой задачи).

Пусть T_ρ – окружность с центром в вершине трещины и радиусом $\rho > 0$. Для двух степенных решений U и V с показателями $\lambda = 1/2$ в силу формулы Грина (19) верны равенства

$$0 = q\left(U, \frac{\partial V}{\partial x_2}; T_{\rho_2}\right) - q\left(U, \frac{\partial V}{\partial x_2}; T_{\rho_1}\right)$$
$$= \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\sum_{p=1}^{3} U_p \sigma^{\mathsf{M}}_{2p}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + U^{\mathsf{E}} \sigma^{\mathsf{E}}_{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)\right)\Bigg|_{x_2=-0}^{+0} dx_1. \qquad (63)$$

Отметим, что дифференцирование поля V произведено поперек трещины, т.е., вообще говоря, $q(U, \partial V/\partial x_2; T_\rho)$ – не инвариантный интеграл, однако он не зависит от радиуса окружности, так как подынтегральное выражение пропорционально ρ^{-1}. Учитывая уравнения (3), (4) и порядок подынтегрального выражения, преобразуем интеграл $I_\pm$ из правой части формулы (63) следующим образом:

$$I_\pm = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\sum_{p=1}^{3} U_p \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma^{\mathsf{M}}_{1p}(V) + U^{\mathsf{E}} \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma^{\mathsf{E}}_{1}(V)\right)\Bigg|_{x_2=\pm 0} dx_1$$
$$= \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial U_p}{\partial x_1} \sigma^{\mathsf{M}}_{1p}(V) + \frac{\partial U^{\mathsf{E}}}{\partial x_1} \sigma^{\mathsf{E}}_{1}(V)\right)\Bigg|_{x_2=\pm 0} dx_1$$
$$= \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \xi^\pm(V)^\top \eta^\pm(U)\, dx_1.$$

Ввиду произвольности чисел ρ_1 и ρ_2 отсюда вытекает, что скачок поверхностной энтальпии на берегах трещины равен нулю. Этот вывод сохраняет силу в случае составной плоскости, если базис в линеале $\mathcal{X}$ состоит из степенных решений с показателем $\lambda = 1/2$.

Согласно нормировке (52), (53) имеем

$$\begin{aligned} &\left[\varepsilon^{\mathsf{M}}_{11}(X^{j\varepsilon})\right](-r) = -(2\pi r)^{-1/2}\delta_{1,j}, \\ &\left[\varepsilon^{\mathsf{E}}_{1}(X^{j\varepsilon})\right](-r) = -(2\pi r)^{-1/2}\delta_{4,j}, \\ 2&\left[\varepsilon^{\mathsf{M}}_{31}(X^{j\varepsilon})\right](-r) = -(2\pi r)^{-1/2}\delta_{3,j}, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \qquad (64)$$

Таким образом, скачок $\eta^+(X^{2\varepsilon}) - \eta^-(X^{2\varepsilon})$ обращается в нуль, и при $j = 1, 3, 4$ справедлива формула

$$0 = \xi^+(X^{j\varepsilon})^\top \eta^+(X^{2\varepsilon}) - \xi^-(X^{j\varepsilon})^\top \eta^-(X^{2\varepsilon})$$
$$= \left(\eta^+(X^{j\varepsilon}) - \eta^-(X^{j\varepsilon})\right)^\top B \left(\eta^+(X^{2\varepsilon}) + \eta^-(X^{2\varepsilon})\right). \qquad (65)$$

Равенства (64) и (65) показывают, что столбец $\eta(X^{2\varepsilon})$, а в силу соотношения (62) и столбец $\xi(X^{2\varepsilon})$ аннулируются на берегах трещины. В частности, $\sigma_{11}^{\mathsf{M}}(X^{2\varepsilon}) = \sigma_{13}^{\mathsf{M}}(X^{2\varepsilon}) = 0$, $\sigma_2^{\mathsf{E}}(X^{2\varepsilon}) = 0$ и благодаря уравнениям (3), (4) на $\Lambda_0^{\pm}$ выполнены соотношения

$$\sigma_{2p}^{\mathsf{M}}\left(\frac{\partial X^{2\varepsilon}}{\partial x_2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{1p}^{\mathsf{M}}(X^{2\varepsilon}) = 0,\ \sigma_2^{\mathsf{E}}\left(\frac{\partial X^{2\varepsilon}}{\partial x_2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_1^{\mathsf{E}}(X^{2\varepsilon}) = 0.$$

Итак, при дифференцировании *поперек трещины* производная $\partial X^{2\varepsilon}/\partial x_2$, но не производные остальных степенных решений $X^{1\varepsilon}$, $X^{3\varepsilon}$ и $X^{4\varepsilon}$, остается степенным решением модельной задачи (3)–(9). Наконец, согласно нормирующим условиям (52), (53) получаем

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial X^{2\varepsilon}}{\partial x_2}\right](-r) = 2[\varepsilon_{12}(X^{2\varepsilon})](-r) - \frac{\partial}{\partial x_1}[X_2^{2\varepsilon}](-r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(2\frac{r}{\pi}\right)^{1/2},\\
&\left[\frac{\partial X^{2\varepsilon}}{\partial x_2}\right](-r) = [\varepsilon_{22}(X^{2\varepsilon})](-r) = 0,\\
&\left[\frac{\partial X_3^{2\varepsilon}}{\partial x_2}\right](-r) = 2[\varepsilon_{23}(X^{2\varepsilon})](-r) = 0,\\
&\left[\frac{\partial X^{2\varepsilon\mathsf{E}}}{\partial x_2}\right](-r) = [\varepsilon^{\mathsf{E}}(X^{2\varepsilon})](-r) = 0.
\end{aligned}$$

На трещине скачки полей $\partial X^{2\varepsilon}/\partial x_2$ и $-\partial X^{1\varepsilon}/\partial x_1$ совпадают и, следовательно,

$$\frac{\partial X^{2\varepsilon}}{\partial x_2} = -\frac{\partial X^{1\varepsilon}}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{4} M_{1k}^{\varepsilon} Y^{k\varepsilon}.$$

Для изотропной модельной задачи доказанные свойства степенных решений $X^{2\varepsilon}$, отвечающих напряженно-деформированному состоянию первой моды, вытекают из явных формул (25), (26). С их помощью в работах [44, 39] исследована задача о девиации трещины в чисто упругой среде.

Проведенные рассуждения нетрудно приспособить к ситуациям ii) и iii). Так, в первой из них краевые условия на берегах трещины делают равными нулю компоненты столбца η с третьей по шестую, а условия нормировки (52), (59) фиксируют скачки первой, второй и седьмой компонент этого столбца. Остальные выкладки также не претерпевают сколь-нибудь существенных изменений.

Авторы выражают глубокую признательность профессорам Э. Л. Аэро, Р. В. Гольдштейну и Х.-Г. Рюку за полезные обсуждения предмета статьи, а также А. И. Назарову за помощь в улучшении изложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–257) и гранта SFB Sonderforschungsbereich Transregio TRR 30 "Prozessintegrierte Herstellungfunktional gradierter Strukturen auf der Grundlage thermomechanischgekoppelter Phanomene".

Литература

1. В. А. Кондратьев, *О гладкости решений задачи Дирихле Для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра.* — Дифференциальные уравнения **6**, No. 10 (1970), 1831–1843.
2. В. А. Кондратьев, *Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра.* — Дифференциальные уравнения **13**, No. 11 (1977), 2026–2032.
3. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра.* — Докл. АН СССР No. 1 (1976), 33–36.
4. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе.* — Дифференц. уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л. Соболева) Вып. 2. Новосибирск: изд-во СО АН СССР (1978), 69–102.
5. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах границы.* — Алгебра и анализ **6**, No. 4 (1994), 157–186.
6. С. А. Назаров, *Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва.* — Механика твердого тела No. 2 (1989), 152–160.
7. С. А. Назаров, О. Р. Полякова, *Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве.* — Механика твердого тела No. 2 (1992), 101–113.
8. Л. К. Колтон, С. А. Назаров, *Вариация формы ребра плоской локально неравновесной трещины нормального отрыва.* — Механика твердого тела No. 3 (1997), 125–133.
9. С. А. Назаров, *О трехмерной формулировке критерия Новожилова квазистатического разрушения.* — Механика твердого тела No. 2 (2006), 107–116.
10. G. C. Sih, H. Liebowitz, *Mathematical theories of brittle fracture.* in Fracture. Vol. 2 (editor Liebowitz H.) New-York: Academic Press (1968). P. 67–190.
11. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.

12. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками.* — Math. Nachr. Bd. 76 (1977), 29–60.
13. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.* — Math. Nachr. Bd. 77 (1977), 25–82.
14. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов.* — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
15. S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries.* Berlin, New York: Walter de Gruyter (1994).
16. V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities.* Providence: Amer. Math. Soc. (1997).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред.* Наука, М. (1992).
18. В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев, *Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.* Наука, М. (1988).
19. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга, *Механика связных полей в элементах конструкций.* Наук. Думка, Киев (1989).
20. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Наука, М. (1965).
21. M. Costabel, M. Dauge, *Crack singularities for general elliptic systems.* — Math. Nachr. Bd. 235 (2002), 29–49.
22. H. G. Beom, S. N. Atluri, it Near-tip fields and intensity factors for interfacial cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric media. — Intern. J. of Fracture **75** (1996), 163–183.
23. H. G. Beom, S. N. Atluri, *Conducting cracks in dissimilar piezoelectric media.* — Intern. J. of Fracture **118** (2002), 285–301.
24. С. А. Назаров. *Весовые функции и инвариантные интегралы.* — Вычислительная механика деформируемого твердого тела. Вып. 1 (1990), 17–31.
25. С. А. Назаров. *Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы.* — Прикл. матем. и механика. **62**, No. 3 (1998), 489–502.
26. С. А. Назаров., О. Р. Полякова, *Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе.* — Труды Московского матем. общества. **57** (1996), 16–75.
27. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики.* Наука, М. (1989).
28. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости.* Мир, М. (1967).
29. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* Наука, М. (1989).
30. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten.* 1. Berlin: Akademie-Verlag (1991). Английский перевод: *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1. Basel: Birkhäuser Verlag (2000).

31. H. F. Bueckner, *A novel principle for the computation of stress intensity factor.* — ZAMM **50** (1976), 529–546.
32. J. R. Rice, *Some remarks on elastic crack-tip stress field.* — J. Solids and Structures **8** (1972), 751–758.
33. Z. Suo, C.-M. Kuo, D. M. Barnett, and J. R. Willis, *Fracture mechanics for piezoelectric ceramics.* — J. Mech. Phys. Solids **40**, No. 4 (1992), 739–765.
34. И. И. Аргатов, С. А. Назаров, *Высвобождение энергии при изломе трещины в плоском анизотропном теле.* — Прикл. матем. и механика **66**, 3 (2002), 502–514.
35. C. Park, C. T. Sun, *Fracture criteria for piezoelectric ceramics.* — J. Amer. Ceram. Soc. **78** (1995), 1475–1480.
36. H. Gao, T.-Y. Zhang, P. Tong, *Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramics.* — J. Mech. Phys. Solids **45**, No. 4 (1997), 491–510.
37. А. А. Куликов, С. А. Назаров, *Формула Гриффитса для трещины в пьезоэлектрическом теле.* — Доклады РАН **399** No. 6 (2004), 770–774.
38. А. А. Куликов, С. А. Назаров, *Трещины в пьезоэлектрических и электропроводящих телах.* — Сибирский журнал индустриальной математики **8**, No. 1 (2005), 70–87.
39. С. А. Назаров, *Коэффициенты интенсивности напряжений и условия девиации трещины в хрупком анизотропном теле.* — Прикл. механика и техническая физика **46**, No. 3 (2005), 98–107.
40. С. А. Назаров, *Базисы сингулярных решений в задачах механики трещин.* — Вестник СПбГУ. Сер. 1. Вып. 4, No. 22 (2008), ???–???.
41. S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.* II. Comm. Pure Appl. Math. **17**, No. 1 (1964), 35–92.
42. T. C. Wang, X. L. Han, *Fracture mechanics for piezoelectric materials.* — Intern. J. of Fracture **98** (1999), 15–35.
43. С. А. Назаров, *Поверхностная энтальпия.* — Доклады РАН **421**, No. 1 (2007), 49–53.
44. С. А. Назаров, О. Р. Полякова, *Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков.* — Механика твердого тела No. 1 (1995), 104–119.

Nazarov S. A., Specovius-Neugebauer M. Singularities at the tip of a crack on the interface of piezoelectric bodies.

Singularities of elastic and electric fields are investigated at the tip of a crack on the interface of two anisotropic piezoelectric media under various boundary conditions on the crack surfaces. The singularity exponents form the spectrum of a certain polynomial pencil, and although explicit formulas are not available, this spectrum is described completely though. The mathematical results apply to problems in the mechanics of fracture. In this way the Griffith formulae are obtained for increments of energy functionals due to the growth of the crack and the notion of the energy release matrix is introduced. Normalization conditions for bases of singular solutions are proposed to adapt them to the energy, stress, and deformation fracture criteria. Connections between these bases are determined and additional properties of the deformation basis related to the notion of electric surface enthalpy are established.

ИПМаш РАН

Поступило 2 декабря 2008 г.

E-mail: serna@snark.ipme.ru,
srgnazarov@yahoo.co.uk

Universität-GH Kassel, Germany

E-mail: specovi@mathematik.uni-kassel.de